This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 466075

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM CIRCUMSPICE
COLLEGE
OF
ENGINEERING

...eering
...rary
TA
405
.P63

1449

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

ET

ÉLASTICITÉ

1449

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

ET

ÉLASTICITÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
59926-50

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

ET

ÉLASTICITÉ

COURS PROFESSÉ A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

PAR

Gaston PIGEAUD

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES
CHEF DU SERVICE CENTRAL D'ÉTUDES TECHNIQUES
DU MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

AVANT-PROPOS.

Le plan d'ensemble du présent Ouvrage a été pour une bonne part déterminé par les nécessités de notre enseignement. Il est essentiel de mettre nos élèves le plus rapidement possible en mesure de faire des applications dans le domaine des pièces prismatiques, domaine qui se confond presque avec celui de la Résistance des Matériaux proprement dite. Aussi avons-nous renoncé à justifier, dès le début, les principes de cette science pratique par une exposition préalable de la théorie de l'Élasticité. On peut sans inconvénient ajourner ces justifications, dont les plus satisfaisantes, celles qui découlent par exemple du problème de Saint-Venant, ne peuvent, du reste, être que partielles et particulières, tout comme les justifications que l'on peut tirer d'une confrontation directe de la théorie avec des résultats d'expérience. Malgré les critiques dont elle est quelquefois l'objet, la Résistance des Matériaux peut se suffire à elle-même, à condition, bien entendu, que l'on n'ait pas à son égard d'exigences illégitimes, ni d'ambitions plus grandes que pour toute autre science appliquée. Il s'agit d'une approximation. Cette approximation, quel que soit son degré de complication, sera valable dans un certain domaine, si elle traduit bien un certain nombre de faits particuliers observables compris dans ce domaine. Il serait illogique de lui demander davantage. En dehors des frontières du domaine, il faut s'attendre à la nécessité de corrections de nature diverse. Dès lors, il n'est pas indispensable, ni même bien utile, de recourir à des principes abstraits et éloignés pour poser les assises de la Science appliquée. L'essentiel, c'est : d'une part, de la faire cadrer avec les faits, et, d'autre part, de la rendre aussi simple que possible, dût-on même pour cela restreindre son domaine d'application, puisque c'est seulement sur des solutions simples que le calcul peut ensuite s'exercer utilement pour en déduire des conséquences.

C'est dans cet esprit que nous avons envisagé la théorie des poutres prismatiques, en faisant volontairement cette restriction qu'il ne s'agit que de poutres à plan moyen. La *force extérieure* relative à une section transversale donnée est alors définie par trois quantités seulement. On laisse ainsi de côté les phénomènes de torsion. Cela n'a pas d'inconvénient sérieux au point de vue pratique, et l'on sait d'ailleurs que, sauf dans un cas particulier, les phénomènes de torsion ne sont pas du domaine de la Résistance des Matériaux. Il est donc naturel de les réserver.

On parvient ainsi très directement aux formules usuelles qui donnent les composantes de la force extérieure, les tensions moléculaires normales et tangentielles à la section, les déformations du prisme élémentaire et la déformation d'ensemble d'un arc de la fibre moyenne. Le principal outil de la Résistance des Matériaux est dès lors constitué. Il consiste dans les trois équations générales de déformation, ou équations de Navier, complétées par Bresse.

Ces équations, qui contiennent, sous une forme explicite, les déplacements linéaires et angulaires des appuis, lorsqu'on les applique à toute la longueur de la fibre moyenne comprise entre ces appuis, se prêtent de la manière la plus directe et la plus simple à la traduction des conditions variées dans lesquelles se trouvent les systèmes *hyperstatiques*. Nous ne voyons aucune raison valable pour les abandonner.

Nous ne méconnaissons nullement l'intérêt, ni la beauté mathématique, de ce que l'on appelle les « Méthodes Modernes » basées sur les principes généraux de la Mécanique, principe du travail virtuel, principe des forces vives, ou de l'Énergie. Mais si l'on s'attache surtout au point de vue pratique, on n'aperçoit pas bien nettement les avantages du détour qu'elles imposent.

S'agit-il d'une poutre, ou d'un arc, reposant sur deux appuis seulement? On retombe fatalement sur les équations explicites de Bresse, compte tenu des conditions des appuis.

S'agit-il d'un système plus complexe? On fait valoir l'avantage que l'on trouve dans l'élimination automatique des inconnues

dites auxiliaires, qui sont les déplacements linéaires et angulaires au droit des points d'appui, ou des assemblages de pièces. Ce résultat est indéniable. Mais est-il bien certain que ce soit toujours là un avantage? Il est souvent utile de déterminer les inconnues auxiliaires, car ce que l'on mesure surtout, lorsque l'on fait des épreuves de constructions, ce sont précisément des éléments de déformation, tassements, déviations angulaires sur appuis. Dans d'autres cas, ce sont ces déformations qui se trouvent des données de la question, et il faut bien alors recourir aux équations qui les contiennent. Enfin, et surtout, il n'est pas exact que le système d'équations auquel on parvient, avec élimination des inconnues auxiliaires, soit plus simple à établir, ni surtout à résoudre en pratique, que le système complet qui les renferme. Le caractère très général des systèmes d'équations auxquels conduit l'application pure et simple des formules de Bresse, c'est de constituer des systèmes linéaires étagés à partir d'un petit nombre d'inconnues. Or, les systèmes étagés se prêtent à un mode de résolution particulier et très avantageux, et, en regard de cet avantage, il est bien peu important d'avoir obtenu une réduction du nombre des inconnues. Il faudrait se garder, au contraire, de faire mal à propos des éliminations, sans s'être assuré que le système final ne cessera pas d'être étagé. Mieux vaux donc pour les théories générales conserver le système complet, sauf à reconnaître dans chaque cas particulier les éliminations que l'on peut faire sans inconvénient, ou avec avantage.

Toutefois, il n'était pas inutile de donner un aperçu de ces théories modernes, ne fût-ce que pour parvenir au théorème de Maxwell, sur la réciprocité des déplacements, dont la démonstration directe serait difficile et qui a une très réelle utilité lorsqu'il s'agit de tracer des lignes d'influence de déplacements. Mais cet aperçu peut être très sommaire et nous n'avons rien vu de mieux à faire que de transposer purement et simplement la méthode même de Maxwell, telle qu'elle est exposée dane le Chapitre III de son célèbre Traité d'Électricité, chapitre intitulé « Travail électrique et Énergie d'un système de conducteurs ». Il suffit que le

travail soit exprimé par une somme de termes, qui soient chacun le produit de deux facteurs, tels que potentiel et charge électrique, force et déplacement, couple et rotation, pour que la transposition puisse se faire pour ainsi dire à vue. On trouve ainsi dès le début le principe de réciprocité général, attribué à Betti, puis le théorème de Castigliano, sur les dérivées partielles du travail. Point n'est besoin de supposer nul le travail des réactions des appuis. La seule chose essentielle, puisqu'il s'agit toujours de systèmes de forces en équilibre, c'est de n'introduire dans l'expression du travail que des forces qui soient analytiquement indépendantes, en utilisant d'une manière ou d'une autre les équations d'équilibre statique.

Le problème fondamental qui se pose dans l'étude des poutres prismatiques, ou des assemblages des poutres, c'est la recherche des réactions d'appui. Tout le reste s'en déduit. Les systèmes *statiques* sont ceux pour lesquels les réactions d'appui peuvent être déterminées par les seules équations de la statique. Ils sont en petit nombre. Les autres sont appelés *hyperstatiques*. On les ramène à l'un des premiers en supposant négligées certaines des conditions imposées, ce qui permet de déterminer des réactions provisoires, satisfaisant aux conditions d'équilibre statique et d'obtenir ainsi une sorte d'état initial correspondant aux charges. On tient compte ensuite des conditions négligées en introduisant des réactions complémentaires d'appui, qui constituent bien entendu dans leur ensemble un nouveau système de forces en équilibre. En chaque point un effet de nature quelconque s'obtient en ajoutant à l'effet similaire, dans l'état initial, une fonction linéaire des réactions complémentaires d'appui, ou du moins des constantes qui suffisent à les définir. En choisissant un système précis d'appuis provisoires, on peut traiter tous les problèmes particuliers d'une manière uniforme. On peut choisir, par exemple, un seul appui encastré, ou deux appuis simples ne développant que des réactions parallèles aux charges. Nous avons choisi ce dernier parti, qui présente d'assez nombreux avantages pratiques, et bien qu'il soit un peu plus particulier que le premier, car il suppose

toutes les charges parallèles à une même direction. Mais c'est là le cas le plus habituel, et l'on peut d'ailleurs y ramener tous les autres.

La méthode générale ainsi tracée se simplifie d'ailleurs considérablement aussitôt que l'on s'est pénétré de la notion des *lignes d'influence*. On ne saurait trop insister là-dessus. Dès que l'on sait déterminer l'effet produit en un point par une charge unité, parallèle à une direction fixe, mais de position arbitraire, on peut évidemment déterminer l'effet produit au même point par un groupe de charges, parallèles à la même direction, mais de valeurs quelconques et de positions quelconques. C'est l'application pure et simple de la loi de Hooke, ou principe de superposition, qui est à la base de tout. Il faut donc de plus en plus réserver une large place aux lignes d'influence, et l'on pourrait même souhaiter que toute théorie particulière se réduisît un jour au seul examen de la charge unité, de position variable.

Les lignes d'influence les plus importantes seront donc naturellement celles qui se rapportent aux réactions complémentaires d'appui, car toutes les autres peuvent s'en déduire par des procédés plus ou moins directs.

Il n'est pas inutile d'appeler à ce propos l'attention sur le théorème si simple, et d'application si commode, qui permet de ramener la ligne d'influence de toute intégrale telle que

$$\int_0^l \mu(\xi, \alpha)\, \varphi\, d\xi$$

au tracé du polygone funiculaire de charges fictives égales à $\varphi d\xi$. Dans cette intégrale $\mu(\xi, \alpha)$ désigne le moment fléchissant que produirait au point ξ une charge unité placée à l'abscisse α, si la poutre était sur appuis simples (et d'ailleurs réduite à sa projection horizontale). Le théorème est évident, en vertu de la réciprocité particulière dont jouit la fonction μ. On a $\mu(\xi, \alpha) = \mu(\alpha, \xi)$. Il a d'ailleurs un complément non moins évident quand la fonction μ est remplacée par sa dérivée $\frac{d\mu}{d\xi}$.

Nous avons fait une large place aux procédés et au langage de la

statique graphique, sans toutefois lier d'une manière trop étroite les résultats à ces procédés et à ce langage. La statique graphique se réduit au fond à quelques règles permettant de remplacer l'exécution matérielle de certains calculs par des constructions. Les plus importantes d'entre ces règles ne sont pas, à notre avis, les plus générales, mais bien les règles particulières qui s'appliquent au cas de forces parallèles, à répartition continue, ou non. La considération des polygones funiculaires de ces forces permet de trouver d'un seul coup tout un ensemble de résultats; d'abord tous ceux qui se rapportent à des groupes partiels plus ou moins étendus de ces forces, et ensuite tous ceux qui dérivent des premiers par un simple déplacement de la droite origine. On fait ainsi des sommations de produits, et même de quatrièmes proportionnelles, entre certaines limites variables. C'est donc un procédé commode d'intégration graphique, ou plus exactement de quadratures graphiques. Mais il serait excessif d'y voir, soit une méthode de recherches théoriques, soit une condamnation définitive de tout calcul numérique. L'Analyse doit conserver sa primauté; c'est elle seule qui fait découvrir les résultats essentiels. Seulement, il peut être avantageux de donner après coup à ces résultats une forme géométrique, souvent plus expressive, ou plus commode à retenir, et permettant parfois des transformations heureuses dans le développement des conséquences de la théorie proprement dite. Il est également avantageux, du moins pour ceux qui savent dessiner, de faire des quadratures graphiques, au lieu de faire des quadratures numériques. Mais c'est là affaire d'appréciation individuelle. Il ne convient pas de subordonner la théorie proprement dite à des procédés d'exécution. Si cette manière de voir n'était pas justifiée suffisamment par le simple bon sens, on pourrait l'appuyer de l'autorité de l'illustre savant, Maurice Lévy, qui, lorsqu'il a écrit son magistral Traité de Statique graphique, a conservé à l'Analyse un rôle de premier plan dans tous les Chapitres essentiels.

Il ne peut être question ici d'analyser, même sommairement, les différents Chapitres du présent Ouvrage. Toutefois, il n'est peut-

être pas inutile de mettre en relief certains points importants.

Nous avons consacré un Chapitre entier à la théorie générale des poutres encastrées, non pas tant à cause de leur importance propre que pour en faire une sorte d'introduction à la théorie des poutres continues. On peut en pousser l'analyse très loin en n'utilisant que des données assez simples. D'une part, on fait intervenir trois constantes, analogues à des moments d'inertie, qui définissent la poutre au point de vue mécanique, et d'où se déduisent les foyers principaux, le centre fixe, etc. D'autre part, on considère les lignes d'influence des déplacements angulaires qui se produiraient aux deux extrémités de la poutre, si celle-ci reposait sur deux appuis simples. Toutes les lignes d'influence des moments fléchissants et efforts tranchants aux différents points en découlent d'une manière fort simple, et la considération des lignes de charge permet de démontrer les caractères généraux de ces lignes d'influence, suivant que l'on se trouve dans la région interfocale, ou dans les régions extrêmes. Ces caractères généraux facilitent grandement le tracé approximatif des lignes enveloppes dans les cas les plus ordinaires de surcharges.

Nous avons jugé útile de donner une théorie assez générale des poutres continues liées à leurs appuis d'une manière plus ou moins complète, et ces appuis étant eux-mêmes supposés déformables. C'est en somme tout le problème des *portiques*, qui se pose principalement pour le béton armé. On trouve facilement les caractères généraux des lignes d'influence des réactions d'appui, des moments fléchissants et des efforts tranchants, et l'on reconnait nettement le caractère « étagé » que présente toujours le système d'équations du premier degré, quand on ajoute aux équations de liaison et aux équations de la statique les équations de déformation de Bresse. Lorsque l'on considère en particulier le cas d'appuis incompressibles, mais capables de développer des couples de réaction, en même temps que des réactions verticales, on peut suivre pas à pas la théorie des poutres encastrées et faire ressortir des analogies intéressantes. Nous ajoutons, pour le cas d'appuis incompressibles ou non, mais incapables de couples de

réaction, le principe d'une méthode due à M. de Fontviolant, qui peut être avantageux lorsque le nombre des travées est petit.

En ce qui concerne les arcs, nous n'avons pas jugé utile d'exposer les méthodes dites géométriques qui sont en faveur surtout à l'étranger. Ce ne sont, au fond, que des transpositions des résultats analytiques qu'on déduit directement des équations de Bresse, et qui résultent, dans le cas d'arcs encastrés, des indications de Maurice Lévy pour la séparation des inconnues. Les moments d'inertie de la fibre moyenne (ou des deux courbes tracées de part et d'autre à une distance égale au rayon de gyration) apparaissent assez directement dans les intégrales pour qu'on puisse les utiliser sans détour aucun, par voie de calcul numérique ou graphique. Par contre, nous avons tenu à analyser d'une manière complète les résultats de Bresse sur les arcs articulés, à fibre moyenne circulaire et à section constante. Nous avons donné un analyse semblable pour plusieurs autres cas d'arcs articulés, ou encastrés, et donné dans chaque cas des Tableaux qui équivalent à la connaissance des lignes d'influence des réactions des appuis. On peut les utiliser directement pour des calculs sommaires, dès que l'on connaît le rayon de gyration moyen attribué à l'arc, et tout le reste s'en déduit. Nous insistons sur ce fait que la fatigue maxima dans le cas des arcs ne correspond ni au maximum de l'effort normal, ni au maximum du moment fléchissant, et qu'il faut, par suite, après avoir arrêté les dimensions transversales de l'arc, au moins pour certains points donnés, tracer le plus directement possible les lignes d'influence des fatigues en ces points.

Après avoir traité, à titre d'exemples, divers cas de poutres et d'arcs associés, nous parlons assez longuement des systèmes qui deviennent instables quand la charge dépasse une certaine valeur critique. Les poutres *chargées de bout* en sont l'exemple le plus classique. Nous exposons la théorie d'Euler, qui ne nous paraît pas mériter les reproches dont elle a été quelquefois l'objet, et nous montrons que la formule de Rankine et les règles qu'on en déduit assurent tout simplement un surcroît de sécurité. Des méthodes approchées permettent, dans des cas moins simples,

d'obtenir des valeurs approximatives des charges critiques.

Dans l'exposé des systèmes articulés, nous donnons une place à part aux systèmes simplement triangulés, avec un canevas type, auquel on peut rattacher tous les autres et qui fournit sans ambiguité, moyennant un simple numérotage, des règles précises pour la détermination des sommets opposés aux barres et pour la composition des moments de flexion correspondants.

Un Chapitre est consacré aux câbles flexibles. Leur théorie se rattache directement à celle des poutres prismatiques, et la forme prise par un câble est pour ainsi dire, par définition, un polygone funiculaire des charges. Nous exposons le procédé de rectification de Résal et nous en donnons une variante, qui suffit dans la plupart des cas et qui a l'avantage de fournir directement la valeur de la poussée. Dans le cas de câbles associés à des poutres de rigidité, nous reprenons aussi la théorie de Résal, avec l'équation différentielle de M. Godard, et montrons qu'on peut conserver les résultats de Rankine et de Maurice Lévy en ce qui concerne la détermination des réactions d'appui.

Les principes de la Résistance des Matériaux s'appliquent aux ouvrages en maçonnerie, ou en ciment armé, quand on les suppose incapables d'efforts de traction, à la seule condition de déterminer des sections réduites convenables, par élimination des aires exposées à se fissurer. La section réduite est alors telle que l'axe neutre ne la coupe plus. Une méthode indirecte permet de trouver sans peine l'axe neutre lorsque la section primitive possède un axe de symétrie dans le plan moyen.

Là se termine le domaine de la Résistance des Matériaux et commence celui de la théorie de l'Élasticité. Nous avons pensé que le moment était venu d'introduire dans l'enseignement des ingénieurs, non pas seulement les principes de cette science et ses applications les plus simples, mais aussi et surtout les problèmes généraux qu'elle a permis d'aborder et de résoudre au moins en partie. Mais, pour vulgariser, il fallait coordonner, condenser, simplifier des exposés souvent fort étendus, et parfois les compléter. C'était une tâche assez ardue et délicate, et l'avenir seul nous dira si nous l'avons convenablement remplie.

Dans l'exposé des principes, nous n'avons rien changé, ni à la méthode, ni aux notations de Lamé qui sont aussi claires que possible et qui sont conservées d'ailleurs dans les Cours de l'École Polytechnique. Nous donnons, d'après Lamé, les caractères généraux des solutions des équations indéfinies, et nous rappelons les solutions générales que ce savant a rattachées aux potentiels ordinaires et aux potentiels *directs* (*ou de seconde espèce*), ainsi que les solutions simples particulières qui peuvent servir, combinées par voie d'addition, à composer des solutions suffisamment générales pour satisfaire aux conditions à la surface, d'une manière plus ou moins approchée.

La théorie de l'Élasticité plane méritait une attention particulière, en raison des simplifications qu'elle apporte et en raison de ce fait qu'on peut obtenir des solutions élastiques en partant directement des tensions, pourvu qu'on adjoigne aux deux équations générales d'équilibre la condition dite de Maurice Lévy, qui traduit simplement dans ce cas, l'une des conditions de Lamé. Les solutions sont indépendantes des coefficients d'élasticité. D'autre part, on peut préparer l'étude des problèmes particuliers en faisant une discussion détaillée des tensions autour d'un point, reconnaître les valeurs et les directions des plus grandes tensions normales et tangentielles, et les directions les plus exposées aux ruptures par glissement dans les massifs cohérents ou non cohérents.

Le premier des grands problèmes qui se présentent, après les applications simples connues, c'est le problème de Saint-Venant. Nous résumons en quelques pages la solution développée par Clebsch, puis nous nous attardons au problème de la flexion composée, pour montrer l'accord des résultats obtenus avec les règles de la Résistance des Matériaux, tant en ce qui concerne l'effort normal qu'en ce qui concerne l'effort tranchant. Nous étudions en détail, à cet effet, le cas des sections elliptiques et des sections rectangulaires. Le problème de la torsion reçoit dans la théorie de Saint-Venant une solution rationnelle applicable pratiquement dans un certain nombre de cas simples.

Un second problème important est celui des plaques planes qui, dans un certain sens, fait le pendant du problème de Saint-Venant

ou des poutres prismatiques à fibre moyenne. Ici, tout se rattache à la déformation du feuillet moyen, et tout se ramène à l'équation de Lagrange. On peut traiter complètement le cas des plaques circulaires, encastrées ou appuyées à leur pourtour et celui des plaques rectangulaires appuyées et uniformément chargées. La belle solution que Navier a donnée dans ce dernier cas se trouve, malgré l'emploi de séries doubles, très accessible à la pratique, et il suffirait, pour la rendre tout à fait pratique, de dresser des Tables fournissant les valeurs numériques de certaines séries. Nous en avons donné une ébauche.

Dans le cas de plaques incomplètement chargées, Résal, corrigeant une formule de Navier, a montré que l'on pouvait utiliser la même méthode lorsque la charge occupe un rectangle concentrique à la plaque. Il suffit d'introduire dans chaque solution simple un facteur tel que $(-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \sin\frac{m\pi a'}{2a} \sin\frac{n\pi b'}{b}$. Là encore on pourrait rendre d'importants services en calculant la valeur de certaines séries pour diverses valeurs simples des rapports $\frac{a}{b} = \rho$, $\frac{a'}{a}$ et $\frac{b'}{b}$.

Nous donnons en terminant quelques indications sur les travaux de Maurice Lévy et sur les solutions simples (se confondant avec celles de Lamé) que l'on peut employer pour composer des solutions approximatives dans le cas des plaques encastrées et même dans des cas plus complexes. On peut toujours ajouter à une solution particulière de l'équation de Lagrange d'autres solutions de la même équation privée de second membre, qui n'est pas autre chose alors qu'une des conditions de Lamé.

Nous avons pensé aussi qu'il fallait faire connaître et vulgariser les remarquables travaux de M. Boussinesq sur les massifs indéfinis sollicités dans une région limitée. Il semble qu'en se familiarisant avec les résultats qu'ils a obtenus, on arrive à se former une vision assez nette du mode de propagation des efforts dans un milieu élastique. De là pourraient découler des règles pratiques fécondes sur l'étendue des zones de répartition des charges dites concentrées à travers un « matelas » d'une certaine épaisseur. Après avoir résumé

les propriétés des potentiels logarithmiques à trois variables, que M. Boussinesq a envisagés dans le problème du massif indéfini limité par un plan, nous avons pu opérer une vérification simple des deux solutions types qui conviennent, l'une au cas de charges normales, l'autre au cas de charges tangentielles, puis en développer les principales conséquences. Ces solutions peuvent être transposées en élasticité plane, sans difficulté spéciale d'analyse, lorsque l'on part des formules relatives aux tensions.

Les travaux de M. Boussinesq paraissent avoir tout au moins préparé, sinon inspiré, la théorie de Hertz sur les corps au contact. Nous avons pu exposer assez brièvement cette dernière théorie, qui doit désormais servir de base logique pour l'établissement d'un certain nombre de pièces importantes dans la construction des machines et même des ouvrages d'art, rouleaux, rotules, billes, paliers, etc. La généralisation des essais à la bille de Brinel est un nouveau motif de ne plus ignorer ces résultats.

Enfin, nous avons consacré un Chapitre assez long aux massifs pesants, et notamment à la poussée des terres. Nous avons tenu à marquer bien nettement toutes les réserves qui s'imposent, et elles sont nombreuses. En étudiant les massifs de barrage à forme triangulaire, déjà étudiés par Maurice Lévy, nous avons montré que la solution linéaire est la seule compatible avec l'hypothèse d'efforts variant proportionnellement au rayon vecteur. Quand cette solution linéaire cesse d'être applicable, par exemple dans le cas de digues en terre à talus adoucis, il reste la ressource d'admettre des lignes de discontinuité pour les déplacements. Un massif triangulaire doit alors être considéré comme la juxtaposition de plusieurs massifs différents. C'est peut-être traduire bien librement les travaux de M. Boussinesq, que de rattacher à cette notion de lignes de discontinuité la belle solution qu'il a trouvée pour l'équilibre d'un massif terreux limité par un mur de soutènement. Mais la nécessité d'être bref ne nous a pas permis d'entrer dans de plus longs développements pour un Cours déjà très surchargé.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

ET

ÉLASTICITÉ

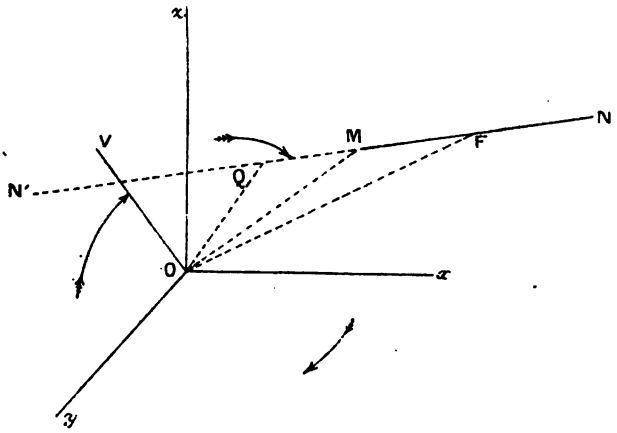
CHAPITRE I.

RAPPEL DE NOTIONS DE MÉCANIQUE. MOMENTS D'INERTIE.

I. — Rappel de quelques notions de Mécanique.

Trièdre normal de référence. Sens positif des rotations. — En Mécanique on rapporte ordinairement la position d'un point, tel que M, à trois axes concourants rectangulaires Ox, Oy, Oz au sujet

Fig. 1.



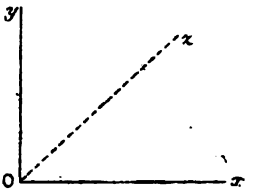
desquels on fait expressément les conventions suivantes. La direction positive sur l'axe Oz est telle qu'un observateur placé le long de cet axe, les pieds en O et la tête sur la direction positive Oz, voie la direction positive Oy à droite de la direction positive Ox.

Il est aisé de reconnaître que, par permutation, un observateur placé le long de Ox, verra Oz à droite de Oy, et qu'un observateur placé le long de Oy verra Ox à droite de Oz.

Cette convention fixe le sens des rotations positives sur les trois plans coordonnés. Ces rotations, toutes effectuées de gauche à droite pour un observateur placé sur la direction positive de l'axe perpendiculaire au plan, sont celles qui permettent d'amener respectivement Ox, Oy, Oz sur Oy, Oz, Ox en décrivant un seul quadrant.

Lorsqu'on envisage un système plan, on représente généralement les deux seuls axes de coordonnées Ox et Oy comme il est indiqué sur la figure n° 2. Pour que les conventions et les formules

Fig. 2.



générales demeurent applicables il est nécessaire de supposer que le troisième axe Oz, à considérer éventuellement, a sa direction positive en arrière du plan du tableau. C'est ainsi qu'on obtient un trièdre positif de référence et que le sens positif des rotations reste celui qui amène Ox en coïncidence avec Oy par une rotation d'un angle droit.

Demi-droites et faces associées des plans perpendiculaires. — Il y a un grand intérêt, pour éviter des erreurs de signe, à distinguer sur chaque plan ou surface la face positive et la face négative. On y parvient de la manière suivante.

La face positive sur chacun des plans coordonnés est celle qui se trouve du côté de la direction positive de l'axe perpendiculaire. Ainsi la face positive du plan Oxy est celle qui est du côté de la demi-droite Oz.

Pour chaque plan, ou élément plan infiniment petit d'une surface courbe, on définit un sens positif sur l'une de ses normales. La face positive du plan, ou de l'élément plan, sera celle qui est située du côté de la direction positive de la normale.

A chaque demi-droite de l'espace, définie par ses cosinus directeurs α, β, γ, correspond ainsi sans ambiguïté une face bien déterminée du plan perpendiculaire. Le système formé par la demi-droite et la face associée est évidemment tel que, si on le déplace de façon que la demi-droite vienne coïncider respectivement avec Ox, Oy, Oz, la face associée vienne coïncider avec la face positive des plans Oyz, Ozx, Oxy respectivement.

Vecteurs. Moment d'un vecteur. — Étant donné un point M, de coordonnées x, y, z, et une demi-droite MN de cosinus directeurs α, β, γ, si l'on porte dans la direction de cette demi-droite une longueur $MF = F$, on a un segment MF parfaitement défini en *grandeur* et en *position* par les coordonnées x, y, z du point M, qui porte le nom de *point d'application*; par les cosinus directeurs α, β, γ de la demi-droite, qui porte le nom de *ligne d'action*, et par la longueur F.

Si la longueur F était portée dans la direction MN′ de la demi-droite prolongement de MN, il faudrait bien entendu changer les cosinus directeurs α, β, γ en $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. On peut dire alors conventionnellement que la ligne d'action n'a pas changé et conserve les cosinus directeurs α, β, γ, mais que le vecteur MF′ est négatif.

Les projections suivant les axes coordonnés d'un vecteur tel que MF ont respectivement pour valeur

$$X = F\alpha,$$
$$Y = F\beta,$$
$$Z = F\gamma.$$

Ces trois projections, qu'on appelle *composantes du vecteur*, peuvent être substituées pour définir le vecteur, en *grandeur* et en *orientation*, aux quatre quantités F, α, β, γ, dont les trois dernières ne sont pas indépendantes, mais sont liées par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

En supposant F essentiellement positif, on a, en effet,

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
$$\alpha = \frac{X}{F}, \qquad \beta = \frac{Y}{F}, \qquad \gamma = \frac{Z}{F}.$$

D'un autre côté on peut substituer aux trois coordonnées x, y, z, qui définissent l'origine M du vecteur et qui fixent, par suite, la *position* de sa ligne d'action, trois autres quantités fonctions de x, y, z et de X, Y, Z. On choisit, à cet effet, les trois fonctions

$$(1) \qquad \begin{cases} A = yZ - zY, \\ B = zX - xZ, \\ C = xY - yX. \end{cases}$$

Les trois quantités ainsi définies, qu'on appelle *moments du vecteur* OF *par rapport aux trois axes coordonnés*, sont considérées comme représentant en grandeur et en signe les composantes suivant les axes d'un second vecteur OV, issu de l'origine O des coordonnées et qu'on appelle *le moment par rapport au point* O *du vecteur* MF.

On démontre facilement que le vecteur OV est perpendiculaire au plan OMF, car il est perpendiculaire à la fois aux deux directions OM et MF en vertu des relations

$$(2) \qquad Ax + By + Cz = 0,$$

$$(3) \qquad AX + BY + CZ = 0,$$

qu'on déduit des expressions de ABC.

On démontre aussi que sa direction est telle qu'un observateur placé les pieds en O et la tête en V voie s'effectuer dans le sens positif, c'est-à-dire de gauche à droite, la rotation qui amènerait la droite OM sur la droite OF.

Enfin la grandeur de OV est égale au double de l'aire du triangle OMF, ou égale au produit de MF par la perpendiculaire OQ abaissée de O sur MN.

La connaissance du vecteur OV, *moment du vecteur* MF *par rapport au point* O, ou de ses trois composantes A, B, C, *moments du vecteur* MF *par rapport aux trois axes coordonnés*, ne remplace pas complètement la connaissance du point d'application M du vecteur. Les trois composantes A, B, C ne sont pas, en effet, trois fonctions distinctes puisqu'elles sont liées à X, Y, Z par la relation (3) et ne définissent, avec X, Y, Z, que la position de la ligne d'action MN.

Deux vecteurs qui ont mêmes composantes X, Y, Z et mêmes moments A, B, C, par rapport aux trois axes coordonnés, ces six

quantités étant liées par l'équation (3), sont donc simplement deux vecteurs égaux ayant la même ligne d'action, mais non le même point d'application. Mais, en Mécanique, deux semblables vecteurs jouent des rôles identiques et on les qualifie *d'équivalents*.

Il est bien évident que deux vecteurs équivalents ont mêmes composantes et mêmes moments par rapport à trois axes coordonnés quelconques.

Si l'origine des coordonnées ne change pas et si l'on désigne par α, β, γ les cosinus directeurs de l'un des nouveaux axes, OX' par exemple, on a

$$X' = X\alpha + Y\beta + Z\gamma,$$
$$A' = A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

Si l'on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes et si a, b, c désignent les coordonnées de la nouvelle origine par rapport au système primitif, X, Y, Z ne changent pas, mais on a

$$A' = (y - b)Z - (z - c)Y = A - (bZ - cY),$$

B' et C' s'en déduisant par permutation.

Systèmes de vecteurs. — Supposons qu'on ait un système de vecteurs F_1, F_2, ... distribués d'une manière quelconque dans l'espace et définis chacun par leurs composantes (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), ..., et par leurs moments (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), ... par rapport aux axes coordonnés.

Considérons le vecteur OF mené par l'origine et dont les composantes soient

$$P = X_1 + X_2 + \ldots = \Sigma X,$$
$$Q = Y_1 + Y_2 + \ldots = \Sigma Y,$$
$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots = \Sigma Z,$$

et le vecteur OV également mené par l'origine et dont les composantes soient

$$L = A_1 + A_2 + \ldots = \Sigma A,$$
$$M = B_1 + B_2 + \ldots = \Sigma B,$$
$$N = C_1 + C_2 + \ldots = \Sigma C.$$

Le vecteur OF s'appelle la *résultante de translation*, ou plus simplement la *résultante* du système donné. Le vecteur OV s'appelle le *moment résultant*.

En généralisant la notion d'équivalence, on dit que deux systèmes de vecteurs sont *équivalents* quand ils ont à la fois *même résultante et même moment résultant*. Il y a une infinité de systèmes de vecteurs équivalents à un système donné, et le problème dit de la composition ou de la réduction des vecteurs consiste à rechercher les systèmes équivalents les plus simples possibles.

On démontre facilement que deux systèmes équivalents satisfont encore aux conditions d'équivalence quel que soit le système de coordonnées choisi. Par exemple, en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, PQR ne changent pas pour l'un quelconque des systèmes, et l'on a

$$L' = L - (bR - cQ),$$
$$M' = M - (cP - aR),$$
$$N' = N - (aQ - bP).$$

L'égalité des six quantités PQR; LMN entraîne celle de L'M'N' pour deux systèmes équivalents.

Lorsqu'on a un système de vecteurs concourants, c'est-à-dire issus d'un même point d'application O, en prenant ce point comme origine, on a évidemment

$$L = M = N = 0.$$

On obtient alors un système équivalent en prenant simplement la résultante du système, vecteur passant par O et dont les composantes sont P, Q, R.

Si l'on a un système de vecteurs parallèles on peut, en général, le remplacer aussi par un vecteur unique parallèle à la direction donnée. C'est le cas limite du précédent.

Dans le cas le plus général on ne saurait réduire un système de vecteurs à un vecteur unique, car les six quantités P, Q, R; L, M, N sont alors indépendantes et l'on a vu (équation 3) que pour un vecteur unique les six quantités correspondantes sont liées par une condition, qui serait ici

$$PL + QM + RN = 0.$$

On peut trouver un système équivalent et simple en adjoignant à la résultante de translation, passant par l'origine, et dont le moment est, par suite, nul, un système quelconque dont la résultante

soit nulle et dont le moment résultant ait pour composantes L, M, N.

Parmi les systèmes de cette espèce le plus simple est celui qui peut être constitué par deux vecteurs égaux agissant sur deux droites parallèles et en sens inverse l'un de l'autre. Un pareil système porte le nom de *couple*. Sa résultante de translation est nulle, et son moment résultant est le même par rapport à tout point de l'espace. Deux couples sont équivalents quand ils ont même moment résultant.

On peut donc avoir un système équivalent à un système donné *en prenant sa résultante de translation et en y adjoignant un couple quelconque ayant même moment résultant que lui.*

L'origine des coordonnées étant arbitraire, ce résultat s'applique à un point quelconque de l'espace. Quelle que soit l'origine choisie, la résultante de translation demeure la même en grandeur et en direction; mais le couple varie évidemment, comme le moment résultant, quand on déplace l'origine.

II. — Constantes mécaniques d'un système matériel. Somme. Moments et centres de gravité. Moments d'inertie.

Systèmes de points ou d'éléments matériels. — Soit un système de points M_1, M_2, ... situés d'une manière quelconque dans l'espace, et dont les coordonnées sont respectivement (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... Ces points peuvent être des points matériels, au sens de la Mécanique rationnelle, auxquels sont attachées des masses m_1, m_2, ... qui sont de véritables coefficients numériques, positifs ou négatifs. Ils peuvent aussi être considérés comme faisant partie d'éléments de lignes, de surfaces, de volumes continus dont les coefficients m_1, m_2, ... représentent les grandeurs respectives.

Un pareil système est défini au point de vue mécanique par un certain nombre de constantes, parmi lesquelles se place en premier lieu la somme des masses ou éléments définie par l'égalité

$$S = m_1 + m_2 + \ldots = \Sigma m.$$

Les autres constantes fondamentales sont celles qui interviennent dans l'expression de la quantité de mouvement ou de la force vive du

système, quand on lui fait subir un déplacement d'ensemble : translation ou rotation autour d'un axe.

Constantes de translation. Moments du premier ordre. Centre de gravité. — Supposons qu'on fasse subir au système une translation égale à l'unité dans la direction $\alpha\beta\gamma$.

À chaque point M sera attaché un vecteur égal au produit de sa masse par le vecteur constant qui représente la translation. Les composantes de ce vecteur seront donc d'une manière générale

$$X = m\alpha, \qquad Y = m\beta, \qquad Z = m\gamma.$$

La résultante de tous ces vecteurs aura pour composantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} P = \alpha\Sigma m = \alpha S, \\ Q = \beta S, \\ R = \gamma S. \end{cases}$$

Leur moment résultant aura pour composantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} L = \Sigma(yZ - zY = \overset{\gamma}{\beta}\Sigma my - \overset{\beta}{\gamma}\Sigma mz, \\ M = \ldots\ldots\ldots\ldots = \gamma\Sigma mz - \alpha\Sigma mx, \\ N = \ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha\Sigma mx - \beta\Sigma my. \end{cases}$$

Il dépend des trois quantités Σmx, Σmy, Σmz qu'on appelle les *moments du premier ordre*, ou simplement les *moments* du système *par rapport aux plans coordonnés*.

On appelle *centre de gravité* du système le point dont les coordonnées sont définies par les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} aS = \Sigma mx, \\ bS = \Sigma my, \\ cS = \Sigma mz, \end{cases}$$

et l'on démontre facilement que sa position est indépendante du système de coordonnées choisi.

Les moments du premier ordre et, par suite, aussi toutes les constantes de translation sont ainsi susceptibles d'une représentation simple. *Tout se passe comme si la masse entière du système était concentrée en son centre de gravité.*

Remarque I. — Il est bien évident que si le système possède un

plan de symétrie le centre de gravité sera contenu dans ce plan. S'il possède un axe de symétrie, le centre de gravité sera situé sur cet axe.

Remarque II. — Si l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de gravité, on a

$$a = b = c = 0,$$

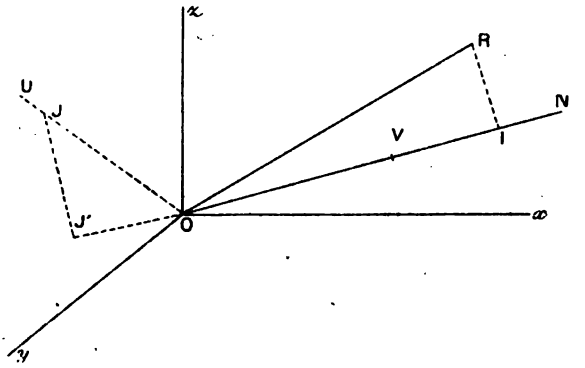
ou, ce qui revient au même,

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0.$$

Constantes de rotation. Moments et produits d'inertie. — Supposons maintenant qu'on fasse subir au système une rotation infiniment petite, prise comme unité, autour d'une droite ON de cosinus directeurs α, β, γ.

Si l'on attache encore à chaque point M un vecteur égal au pro-

Fig. 3.



duit de sa masse par son déplacement, ce vecteur aura pour composantes

$$X = m(\beta z - \gamma y), \qquad Y = m(\gamma x - \alpha z), \qquad Z = m(\alpha y - \beta x).$$

La résultante de tous ces vecteurs aura pour composantes

$$(4) \qquad \begin{cases} P = \beta\Sigma mz - \gamma\Sigma my = S(\beta c - \gamma b), \\ Q = \gamma\Sigma mx - \alpha\Sigma mz = S(\gamma a - \alpha c), \\ R = \alpha\Sigma my - \beta\Sigma mx = S(\alpha b - \beta a), \end{cases}$$

en désignant toujours par a, b, c les coordonnées du centre de gravité.

On voit que cette résultante ne fait intervenir que les moments du premier ordre, ou les coordonnées du centre de gravité et que tout se passe encore comme si toute la masse était concentrée en ce dernier.

Quant au moment résultant OR ses composantes seront :

$$(5)\quad \begin{cases} L = \Sigma(yZ - zY) = \Sigma m(\alpha y^2 - \beta xy - \gamma xz + \alpha z^2) \\ \quad = \alpha\Sigma m(y^2 + z^2) - \beta\Sigma mxy - \gamma\Sigma mxz, \\ M = \beta\Sigma m(z^2 + x^2) - \gamma\Sigma myz - \alpha\Sigma myx, \\ N = \gamma\Sigma m(x^2 + y^2) - \alpha\Sigma mzx - \beta\Sigma mzy. \end{cases}$$

Elles dépendent des six constantes suivantes :

$$(6)\quad \begin{cases} A_1 = \Sigma m(y^2 + z^2), & B_1 = \Sigma myz, \\ A_2 = \Sigma m(z^2 + x^2), & B_2 = \Sigma mzx, \\ A_3 = \Sigma m(x^2 + y^2), & B_3 = \Sigma mxy. \end{cases}$$

Les coefficients A_1, A_2, A_3 portent le nom de *moments d'inertie* par rapport aux axes Ox, Oy, Oz respectivement. Les coefficients B_1, B_2, B_3 sont appelés *produits d'inertie* ou *moments composés d'inertie* par rapport aux axes respectivement perpendiculaires à Ox, Oy, Oz. Leur ensemble s'appelle *coefficients d'inertie*.

Avec ces notations le moment résultant, qu'on peut appeler *vecteur d'inertie de la rotation* $\alpha\beta\gamma$, a pour composantes, suivant les axes,

$$(7)\quad \begin{cases} L = A_1\alpha - B_3\beta - B_2\gamma, \\ M = -B_3\alpha + A_2\beta - B_1\gamma, \\ N = -B_2\alpha - B_1\beta + A_3\gamma. \end{cases}$$

Si la rotation s'effectuait autour de Ox, on aurait $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, et le vecteur d'inertie correspondant aurait pour composantes A_1, $-B_3$, $-B_2$.

De même les composantes des vecteurs d'inertie relatifs aux rotations effectuées autour de Oy, Oz, respectivement, seraient

$$\begin{array}{rrrl} -B_3 & A_2 & -B_1 & \text{(pour } Oy\text{)}, \\ -B_2 & -B_1 & A_3 & \text{(pour } Oz\text{)}. \end{array}$$

Cela précise la signification des six constantes.

Il est facile d'avoir la projection du vecteur d'inertie OR sur

une direction quelconque $(\alpha', \beta', \gamma')$. On n'a qu'à former l'expression

$$L\alpha' + M\beta' + N\gamma'.$$

Si, en particulier, on le projette sur la direction (α, β, γ) de l'axe de rotation, on obtient comme résultat

$$(8) \qquad I = A_1\alpha^2 + A_2\beta^2 + A_3\gamma^2 - 2B_3\alpha\beta - 2B_2\beta\gamma - 2B_1\gamma\alpha.$$

Cette projection I porte spécialement le nom de *moment d'inertie par rapport à la droite* ON (α, β, γ).

On voit qu'elle se réduit respectivement à A_1, A_2, A_3 lorsque l'axe de rotation coïncide avec l'un des axes coordonnés Ox, Oy, Oz.

Elle représente par suite la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse m par le carré de la distance à la droite ON. Elle est toujours positive.

Représentation générale des vecteurs d'inertie et des moments d'inertie autour d'un point. — Lorsque la droite ON varie, le vecteur d'inertie et le moment d'inertie subissent des variations corrélatives que l'on peut suivre aisément au moyen d'un mode de représentation employé dans plusieurs théories de Mécanique.

1° Vecteur d'inertie. — *La surface décrite par l'extrémité* R *du vecteur d'inertie* OR *est un ellipsoïde.*

L'équation de cette surface s'obtient, en effet, en éliminant α, β, γ entre les équations (7) et la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Or, les équations (7) fournissent pour α, β, γ des expressions du premier degré en fonction des coordonnées L, M, N de l'extrémité du vecteur OR.

Cette surface s'appelle l'*ellipsoïde des vecteurs d'inertie.*

2° Moment d'inertie. — Si l'on porte à partir de O, dans la direction de l'axe de rotation ON, un vecteur proportionnel à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie, égale par suite à $\frac{\lambda}{\sqrt{I}}$, son extrémité décrira un second ellipsoïde.

En effet, les coordonnées X, Y, Z de cette extrémité sont telles que l'on ait

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{\lambda}{\sqrt{I}}.$$

En éliminant α, β, γ entre ces équations et l'équation (8), on obtient comme équation de la surface

$$(9) \qquad A_1X^2 + A_2Y^2 + A_3Z^2 - 2B_3XY - 2B_2YZ - 2B_1ZX = \lambda^2.$$

Ce second ellipsoïde s'appelle l'*ellipsoïde des moments d'inertie* ou, plus simplement, *ellipsoïde d'inertie*. On peut le particulariser en disposant de la constante arbitraire λ.

On tire de là cette conséquence qu'il existe autour du point O trois directions, appelées *directions principales*, qui sont telles que, si on les choisit pour axes coordonnés, les produits d'inertie correspondants sont nuls. Ce sont les axes de l'ellipsoïde d'inertie. En effet, dans son équation, rapportée à ses axes, les termes *rectangles en* B doivent disparaître.

La détermination des trois axes d'un ellipsoïde dont on connaît l'équation est un problème connu de Géométrie analytique. Si le système possède un plan de symétrie passant par O, une des directions principales est évidemment perpendiculaire à ce plan.

Nous ne nous y arrêterons pas dans le cas général, et nous supposerons qu'on ait fait choix des axes de l'ellipsoïde comme axes coordonnés.

Dans ces conditions, le vecteur d'inertie se confond avec le moment d'inertie pour chacun des axes coordonnés.

D'un autre côté, les composantes L, M, N du vecteur d'inertie relatif à l'axe ON (α, β, γ) se réduisent à

$$L = A_1\alpha, \qquad M = A_2\beta, \qquad N = A_3\gamma,$$

et l'ellipsoïde des vecteurs d'inertie a pour équation

$$(10) \qquad \frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{A_2^2} + \frac{Z^2}{A_3^2} = 1.$$

Quant à l'ellipsoïde des moments d'inertie, il a pour équation

$$(11) \qquad A_1X^2 + A_2Y^2 + A_3Z^2 = \lambda^2.$$

Si, dans ce dernier ellipsoïde, on prend le plan diamétral con-

jugué de la direction ON (α, β, γ), ce plan a pour équation

$$A_1\alpha X + A_2\beta Y + A_3\gamma Z = 0.$$

Sa normale a pour cosinus directeurs des quantités proportionnelles à $A_1\alpha$, $A_2\beta$, $A_3\gamma$, qui sont les composantes du vecteur d'inertie.

Il en résulte que ce second ellipsoïde suffit pour faire connaître non seulement les moments d'inertie, mais aussi la direction et par suite la grandeur du vecteur d'inertie, dont le moment d'inertie n'est qu'une composante.

Si, dans le plan diamétral conjugué de la direction ON, on prend la trace OU du plan ONR, cette droite jouit de la propriété que chacun de ses points demeure dans le plan diamétral lorsqu'on lui fait subir une rotation infiniment petite autour de ON. Le vecteur d'inertie d'un de ses points est donc dirigé suivant OR, et, pour que ce vecteur soit égal à celui du système donné, il suffit que sa projection sur ON, ou que le moment d'inertie du point par rapport à ON soit égal au moment d'inertie I du système donné.

On appelle *rayon de gyration* par rapport à un axe tel que ON une longueur r telle que l'on ait la relation $I = Sr^2$. Les rayons de gyration relatifs aux axes coordonnés sont

$$r_1 = \sqrt{\frac{A_1}{S}}, \qquad r_2 = \sqrt{\frac{A_2}{S}}, \qquad r_3 = \sqrt{\frac{A_3}{S}}.$$

En tenant compte de cette nouvelle notion, l'ellipsoïde d'inertie est tel que, dans chaque direction ON, *le rayon vecteur soit proportionnel à l'inverse du rayon de giration*.

D'un autre côté, le point J, *situé sur la droite* OU *à une distance* JJ' $= r$ *de* ON, *est tel que, si on lui attribue une masse totale égale à* S, *il aura même moment d'inertie et aussi même vecteur d'inertie par rapport à* ON *que le système donné.*

Ellipsoïde central d'inertie. — Tout ce qui vient d'être dit s'applique, quel que soit le point O choisi pour origine des coordonnées. Quand cette origine coïncide avec le centre de gravité du système, on obtient un ellipsoïde d'inertie particulier qu'on

appelle *ellipsoïde central d'inertie*, dont la connaissance facilite la détermination des vecteurs et moments d'inertie par rapport à un point et à une droite quelconque de l'espace.

Il suffit pour s'en rendre compte de chercher comment on passe des coefficients d'inertie A ou B, par rapport à des axes coordonnés quelconques menés par le centre de gravité G, aux coefficients analogues relatifs à des axes coordonnés parallèles menés par un point quelconque O.

Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque dans le nouveau système, et par a, b, c celles du centre de gravité, on trouve facilement, en tenant compte des relations $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$,

$$\begin{aligned} A'_1 = \Sigma m(y'^2 + z'^2) &= \Sigma m(y^2 + z^2) + 2b\Sigma my + 2c\Sigma mz + (b^2 + c^2)S \\ &= A_1 + (b^2 + c^2)S, \end{aligned}$$

les termes en Σmy et Σmz étant nuls en vertu de la définition du centre de gravité.

Le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à la droite parallèle menée par le centre de gravité augmenté du produit de S *par le carré de la distance* $(b^2 + c^2)$ *du centre de gravité à la droite donnée.*

Opérons de même pour un produit d'inertie tel que B'_1. Nous trouverons

$$\begin{aligned} B'_1 = \Sigma my'z' &= \Sigma myz + b\Sigma mz + c\Sigma my + bcS \\ &= B_1 + bcS. \end{aligned}$$

Le produit d'inertie relatif à deux axes rectangulaires est égal au produit d'inertie relatif aux deux axes parallèles menés par le centre de gravité, augmenté du produit de S *par les deux coordonnées du centre de gravité relatives à ces axes.*

Tout se passe donc comme si l'on composait le vecteur d'inertie relatif à un axe passant par le centre de gravité avec le vecteur d'inertie, relatif à l'axe parallèle mené par le point O, que l'on obtiendrait en concentrant toute la masse au centre de gravité.

Vecteurs et moments d'inertie des systèmes plans. — En pratique, on a le plus souvent affaire à des systèmes plans (lignes ou

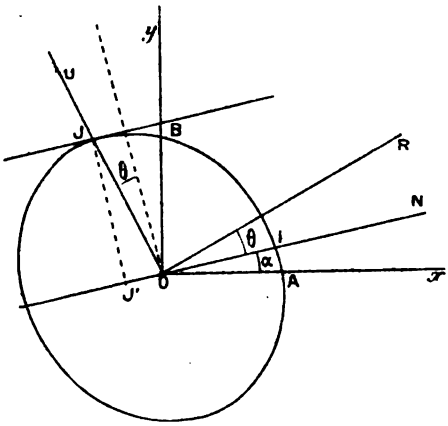
surfaces). Il en résulte des simplifications notables et une plus grande précision.

Toutes les coordonnées z étant nulles, par exemple, on a

$$(6') \quad \begin{cases} A_1 = \Sigma m y^2, & B_1 = 0, \\ A_2 = \Sigma m x^2, & B_2 = 0, \\ A_3 = \Sigma m (x^2 + y^2), & B_3 = \Sigma m xy. \end{cases}$$

Il en résulte $A_3 = A_1 + A_2$, de sorte qu'il ne reste plus que trois coefficients distincts A_1, A_2 et B_3. Par raison de symétrie, l'axe Oz est toujours une direction principale.

Fig. 4.



Si l'on se borne à examiner ce qui se passe quand la droite ON ne sort pas du plan Oxy contenant le système, on peut supposer aussi $\gamma = 0$ et les deux cosinus directeurs α et β seront : l'un le cosinus, l'autre le sinus de l'angle α que fait ON avec l'axe Ox par exemple.

Dans ces conditions, les formules (7) s'écriront

$$(7') \quad \begin{cases} L = \quad A_1 \cos\alpha - B_3 \sin\alpha, \\ M = - B_3 \cos\alpha + A_2 \sin\alpha, \\ N = 0. \end{cases}$$

Le vecteur d'inertie OR est dans le plan Oxy. Il suffit d'étudier

l'ellipse d'inertie, intersection avec ce plan, de l'ellipsoïde d'inertie.

Le moment d'inertie par rapport à ON a pour expression

$$(8') \qquad I = A_1 \cos^2\alpha + A_2 \sin^2\alpha - 2B_3 \sin\alpha \cos\alpha,$$

et l'ellipse d'inertie a pour équation générale

$$(9') \qquad A_1 X^2 + A_2 Y^2 - 2B_3 XY = \lambda^2.$$

On détermine facilement la direction de ses axes et les coefficients des termes en X^2 et Y^2 de son équation rapportée à ceux-ci par les procédés connus de Géométrie analytique. On peut traduire ces procédés en langage mécanique de la manière suivante :

Calculons la projection du vecteur d'inertie (dont les composantes sont L et M) sur la perpendiculaire à ON, qui fait avec Ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$ et dont les cosinus directeurs sont, par suite, $-\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. Nous obtiendrons

$$(12) \quad J = -L\sin\alpha + M\cos\alpha = (A_2 - A_1)\sin\alpha\cos\alpha - B_3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$
$$= \frac{A_2 - A_1}{2}\sin 2\alpha - B_3 \cos 2\alpha.$$

L'axe ON sera une direction principale si $J = 0$, c'est-à-dire si le vecteur d'inertie et le moment d'inertie I se confondent. On obtient donc les angles α que font avec Ox les axes de l'ellipse en résolvant l'équation

$$\frac{A_2 - A_1}{2}\sin 2\alpha - B_3 \cos 2\alpha = 0,$$

d'où

$$(13) \qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2B_3}{A_2 - A_1}.$$

Si β désigne le plus petit angle fourni par cette équation, la seconde direction principale correspondra à l'angle $\beta + \frac{\pi}{2}$.

Le moment d'inertie I_1 correspondant à l'angle β aura d'ailleurs pour expression, en éliminant B_3 au moyen de l'équation (13).

$$I_1 = A_1 \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + A_2 \frac{1 - \cos 2\beta}{2} - \frac{A_2 - A_1}{2} \operatorname{tang} 2\beta \sin 2\beta$$
$$= \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2} \frac{1}{\cos 2\beta}.$$

Le moment d'inertie I_2 correspondant à l'angle $\beta + \frac{\pi}{2}$ aura de même pour valeur

$$I_2 = \frac{A_1 + A_2}{2} - \frac{A_1 - A_2}{2} \frac{1}{\cos 2\beta}.$$

On vérifie facilement les conditions d'invariance des coefficients

$$I_1 + I_2 = A_1 + A_2,$$
$$I_1 I_2 = A_1 A_2 - B_3^2,$$

et l'on a cette autre relation utile

$$I_1 - I_2 = (A_1 - A_2) \frac{1}{\cos 2\beta}.$$

Cette dernière montre que le signe de $I_1 - I_2$ est toujours le même que celui de $A_1 - A_2$.

Considérons à présent l'ellipse d'inertie et supposons-la rapportée à ses axes Ox et Oy préalablement déterminés. Son équation est de la forme

$$A_1 X^2 + A_2 Y^2 = \lambda^2,$$

ou encore, en faisant intervenir les rayons de gyration principaux r_1 et r_2,

$$r_1^2 X^2 + r_2^2 Y^2 = \frac{\lambda^2}{S}.$$

Disposons de λ de telle sorte que $\lambda^2 = S r_1^2 r_2^2$, l'équation deviendra

$$\frac{X^2}{r_2^2} + \frac{Y^2}{r_1^2} = 1.$$

(Avec la convention admise précédemment : $A_1 > A_2$ ou $r_1 > r_2$, cette ellipse a son grand axe suivant Oy.)

On a, suivant Ox, $OA = r_2$; et, suivant Oy, $OB = r_1$. Son rayon vecteur OI, suivant la direction ON, est égal à $\frac{\lambda}{\sqrt{I}} = \frac{r_1 r_2}{r}$.

Considérons le diamètre OU conjugué de ON, il est perpendiculaire à la direction OR du vecteur d'inertie, et le point J où il coupe l'ellipse est tel que

$$OJ \times OI \times \sin \widehat{JOI} = r_1 r_2.$$

On en déduit que

$$JJ' = OJ \times \sin \widehat{JOI} = r.$$

C'est donc en ce point que l'on devra concentrer toute la masse S du système pour obtenir le vecteur d'inertie relatif à ON.

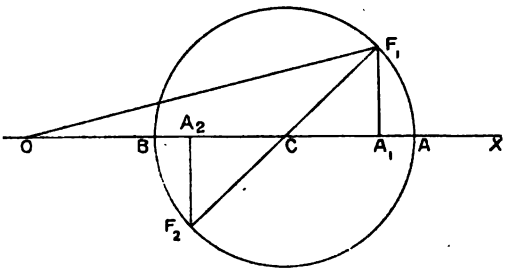
L'ellipse d'inertie, au lieu d'être regardée comme le lieu des points I, peut être considérée comme le lieu des points J. *Elle est alors l'enveloppe des droites menées parallèlement aux différentes droites telles que* ON *et à une distance de celles-ci égale au rayon de giration qui leur correspond.*

Construction graphique. — On peut, au moyen d'une construction graphique très simple, déterminer l'angle β et les moments d'inertie principaux I_1 et I_2, et ensuite suivre les variations du vecteur d'inertie pour une direction quelconque.

Supposons, pour fixer les idées, $A_1 > A_2$ et B_3 négatif. Le vecteur d'inertie correspondant à l'axe Ox a pour composantes A_1 et $-B_3$. Le vecteur correspondant à l'axe Oy a pour composantes $+B_3$ et $-B_3$, d'après les formules (7') ou bien A_2 et $+B_3$ par rapport aux axes Oy et Ox' tournés de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ par rapport aux axes primitifs.

Sur une droite indéfinie OO portons $OA_1 = A_1$, et sur la perpendiculaire élevée en A_1 portons $A_1F_1 = -B_3$. Le vecteur OF_1

Fig. 5.



représentera le vecteur d'inertie relatif à Ox. Portons de même $OA_2 = A_2$ et $A_2F_2 = B_3$. Le vecteur OF_2 représentera le vecteur d'inertie relatif à Oy.

Joignons maintenant F_1F_2. Cette droite coupera OO en un point C, milieu de A_2A_1, et l'on aura

$$OC = \frac{A_1 + A_2}{2}, \qquad CA_1 = -CA_2 = \frac{A_1 - A_2}{2}.$$

L'angle aigu $\widehat{F_1CA_1}$ sera tel que, en valeur absolue,

$$\operatorname{tang} \widehat{F_1CA_1} = \frac{2B_3}{A_1 - A_2}.$$

Il sera donc égal à 2β.

Si maintenant on décrit de C comme centre une circonférence de rayon CF_1, cette circonférence coupera OO en deux points A et B, le point A tombant par rapport à C du même côté que A_1, et le point B du côté de A_2.

Dans ces conditions, on a

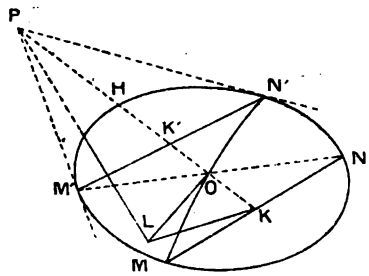
$$OA = OC + CA = \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2\cos 2\beta} = I_1,$$
$$OB = OC - CA = I_2.$$

Inversement, si l'on connaissait les deux vecteurs OA et OB qui représentent respectivement I_1 et I_2, ainsi que l'angle aigu β formé par Ox avec la direction principale correspondant à I_1, il suffirait de faire au point C l'angle $\widehat{ACF_1} = 2\beta$ pour obtenir le point F_1 et l'on aurait en OF_1 le vecteur d'inertie relatif à Ox, en OA_1 sa composante suivant Ox, c'est-à-dire le moment d'inertie relatif à cette même droite, et enfin en A_1F_1 sa composante suivant la droite Oy perpendiculaire à Ox. L'angle θ que fait avec Ox le vecteur d'inertie relatif à cette droite serait $\widehat{AOF_1}$.

Cette construction est générale, la droite Ox étant arbitraire par rapport aux deux directions principales.

Antipôles et antipolaires. Noyau central d'une aire plane. — Étant donnée une ellipse de centre O et un point P, on appelle

Fig. 6.

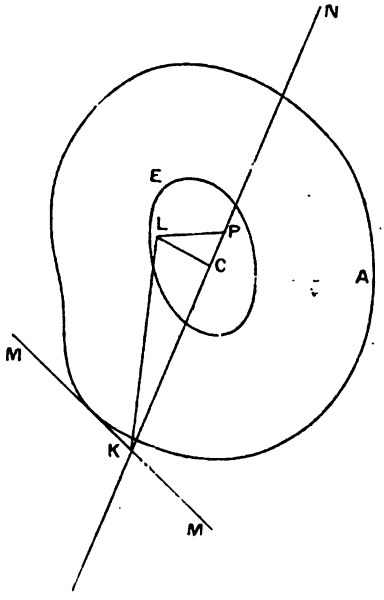


antipolaire du point P la droite MN qui est symétrique, par rapport au centre, de la polaire M'N' du point.

Inversement, le point P est appelé l'*antipôle* de la droite MN. Les deux directions OP et MN sont conjuguées.

On a en valeur absolue $\overline{OH}^2 = OP \times OK$. On peut donc

Fig. 7.



déterminer le point K en élevant en O la perpendiculaire à OP, en portant OL = OH et en traçant ensuite LK perpendiculaire à PL.

Soit maintenant A une aire fermée, dont C est le centre de gravité et E l'ellipse centrale d'inertie.

Supposons que, sur une droite quelconque ON, issue de C, on fasse mouvoir un point P, d'abord confondu avec C, et que, pour chaque position de P, on détermine son antipolaire MM par rapport à l'ellipse E.

Au fur et à mesure que P s'éloigne, l'antipolaire, qui reste toujours parallèle à la direction conjuguée de ON, se rapproche de C, et il arrivera un moment où elle deviendra tangente au contour de l'aire, ou bien se confondra avec quelqu'un de ses éléments rectilignes, si elle en possède.

Soit P la position particulière du point variable correspondant à cette condition.

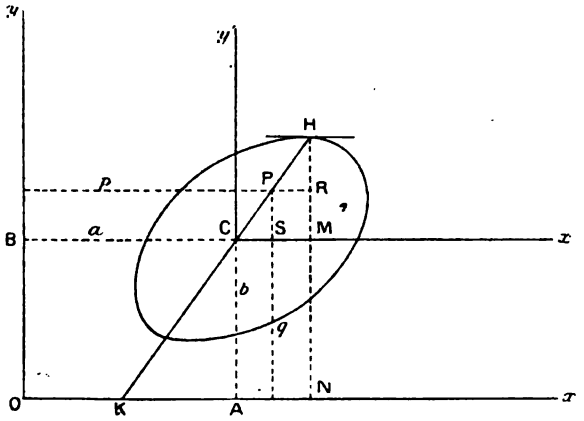
Le lieu des points P lorsque CN tourne autour de C est une nouvelle courbe enfermant à son intérieur une certaine aire que l'on appelle le *noyau central* de l'aire primitive. Son contour est l'ensemble des antipôles des tangentes au contour primitif.

Si ce dernier contour présente des portions de ligne droite, à chacune d'elles correspondra un antipôle unique. S'il présente des points anguleux, à chacun d'eux correspondra une suite d'antipôles en ligne droite, sur l'antipolaire du point anguleux.

Nouvelle détermination des vecteurs et moments d'inertie d'une aire plane par rapport à des axes quelconques, connaissant l'ellipse centrale d'inertie. — Supposons que l'on ait construit l'ellipse centrale d'inertie relative à une aire, ou plus généralement à un système plan quelconque. On en déduit facilement les composantes A_1 et B_2 du vecteur d'inertie relatif à un axe quelconque tel que Ox, que l'on peut regarder comme faisant partie d'un système d'axes coordonnés Oxy.

Soient a et b les coordonnées du centre de gravité C, et p et q

Fig. 8.



celles du point P, *antipôle de l'axe* Ox par rapport à l'ellipse centrale.

Soit H l'extrémité du diamètre de l'ellipse passant par P et

conjugué par suite de la direction Ox. Sa distance HM à Cx', parallèle à Ox, est r, rayon de giration correspondant à Cx'.

On sait que le vecteur d'inertie par rapport à Cx' a pour composantes, suivant Cx' et Cy' respectivement,

$$S \times \overline{HM}^2 = Sr^2 \quad \text{et} \quad S \times HM \times CM.$$

On sait d'autre part que les composantes par rapport à Ox et Oy du vecteur d'inertie relatif à l'axe Ox, s'obtiennent en ajoutant respectivement aux valeurs précédentes les quantités

$$S \times b^2 \quad \text{et} \quad S \times ab.$$

On a donc

$$A_1 = S\left(b^2 + \overline{HM}^2\right) \quad \text{et} \quad B_3 = S(ab + HM \times CM).$$

On peut transformer ces expressions et les simplifier un peu en y introduisant les coordonnées de l'antipôle P.

La relation $\overline{CH}^2 = CP \times CK$ subsiste en projection et l'on en déduit

$$\overline{HM}^2 = MR \times MN = b(q - b).$$

D'autre part,

$$CM = HM \times \frac{CS}{PS} = HM\frac{p - a}{q - b}.$$

Par suite,

$$CM \times HM = \overline{HM}^2 \frac{p - a}{q - b} = b(p - a).$$

En portant ces valeurs de $\overline{HM}^2$ et de $CM \times HM$ dans les expressions de A_1 et B_3, on obtient

$$A_1 = S \times b \times q,$$
$$B_3 = S \times b \times p.$$

Formules usuelles relatives à quelques aires planes. — 1° Rectangle ABCD, de base $AB = b$ et de hauteur $AC = h$.

Le moment d'inertie par rapport à la base AB est

$$I = \frac{bh^3}{3}.$$

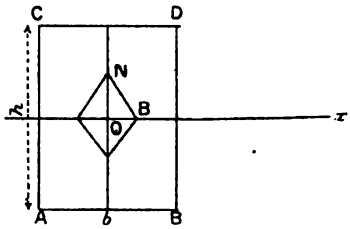
Par rapport à la parallèle à la base menée par le centre de

gravité O, on a

$$I = \frac{bh^3}{12}.$$

Ces formules sont à retenir, car elles sont d'une application cons-

Fig. 9.

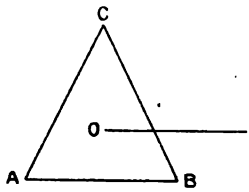


tante. Le noyau central est un losange dont les demi-diagonales sont

$$OH = \frac{h}{6} \quad \text{et} \quad OB = \frac{b}{6}.$$

2° Triangle ABC, de base AB $= b$ et de hauteur h.

Fig. 10.



Par rapport à la base AB, le moment d'inertie est

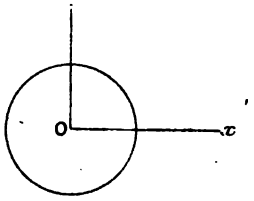
$$I = \frac{bh^3}{12}.$$

Par rapport à la parallèle à la base menée par le centre de gravité, on a

$$I = \frac{bh^3}{36}.$$

3° Cercle de rayon r.

Fig. 11.



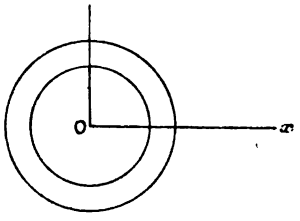
Par rapport à un diamètre Ox, le moment d'inertie est

$$I = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Le noyau central est un cercle concentrique de rayon $r' = \frac{r}{4}$.

4° Surface annulaire comprise entre deux cercles concentriques de rayon R et r.

Fig. 12.



Par rapport à un diamètre Ox, le moment d'inertie est

$$I = \pi \frac{R^4 - r^4}{4}.$$

5° Ellipse dont les demi-axes sont respectivement a et b par rapport à Ox et Oy.

On a

$$I_x = \pi \frac{ab^3}{4} \qquad \text{et} \qquad I_y = \pi \frac{ba^3}{4}.$$

Le noyau central est une ellipse concentrique et semblable dont les demi-axes sont respectivement $\frac{a}{4}$ et $\frac{b}{4}$.

CHAPITRE II.

STATIQUE GRAPHIQUE. CALCUL GRAPHIQUE D'INTÉGRALES.

I. — Statique graphique.

Objet de la statique graphique. — L'objet principal de la statique graphique est de fournir un procédé de composition des systèmes de vecteurs ou de forces contenus dans un plan. Il résulte de la grande généralité de ce procédé une souplesse remarquable qui permet de l'appliquer à des recherches très diverses et notamment au calcul graphique. Nous nous bornerons à en exposer les principes.

En statique graphique on représente systématiquement les forces à l'aide de deux figures distinctes.

La première (*fig.* 13), qu'on appelle *plan de situation des forces*, contient les lignes d'action des forces.

Fig. 13.

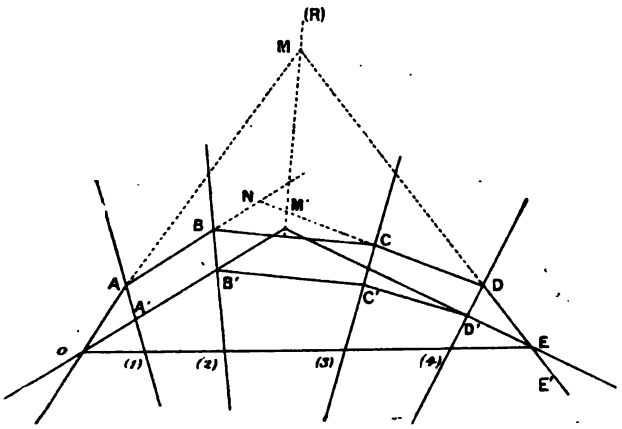
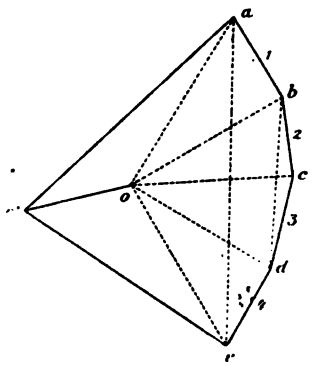


Fig. 14.



La deuxième (*fig.* 14), qu'on appelle *polygone des forces*, ou *polygone de Varignon*, s'obtient en portant bout à bout, à partir d'un point origine *a*, pris arbitrairement, des vecteurs qui, à

une échelle convenue, représentent la grandeur, la direction et le sens de chaque force.

La direction de chaque force se trouve ainsi représentée sur les deux figures à la fois, mais son *sens* ne l'est que sur la seconde.

Habituellement on désigne les lignes d'action des forces par des numéros (placés entre parenthèses), dans l'ordre où l'on fait succéder les forces dans le polygone des forces. Les mêmes numéros (sans parenthèse) désignent les côtés successifs de ce polygone.

Dans la figure 13 on a représenté les lignes d'action de quatre forces numérotées (1), (2), (3), (4), et dans la figure 14 le polygone de ces forces qui se compose de quatre côtés 1, 2, 3, 4, et dont on a désigné, pour plus de clarté, les sommets par des lettres a, b, c, d, e. Le point a est *l'origine* du polygone et e son *extrémité*.

Problème de la composition des forces. — Un système de forces situées dans un même plan peut, en général, se ramener à une force unique située dans ce plan et appelée *résultante* du système. Cette résultante peut du reste avoir une intensité nulle, lorsque le système est en équilibre. Lorsqu'il n'y a pas de résultante, le système est équivalent à un couple. Quel que soit le cas où l'on se trouve, la réduction se fait méthodiquement par le procédé général suivant.

Soit à réduire le système des quatre forces définies par leur plan de situation et leur polygone des forces (*fig.* 13 et 14).

La résultante des forces est représentée en grandeur, direction et sens sur le polygone des forces par *le vecteur ae allant de son origine à son extrémité*. Si les points a et e étaient confondus (le polygone des forces étant *fermé*), la résultante serait nulle et l'on aurait ou bien un système en équilibre, ou bien un système réductible à un couple.

Reste donc à trouver, soit la ligne d'action de la résultante, si elle existe, comme dans le cas de la figure, soit les deux forces du couple capable de remplacer le système donné.

Dans le plan du polygone des forces, prenons arbitrairement un point O, que nous appellerons *pôle*, et joignons-le aux différents sommets a, b, c, d, e du polygone. Les lignes oa, ..., oe s'appellent les *rayons polaires* ou *forces polaires*.

Dans le plan de situation, à partir d'un point O arbitraire,

traçons OA parallèle à *oa*, puis à partir du point A, où elle rencontre la ligne d'action de la force (1), traçons une parallèle AB à *ob*, puis du point B, où AB rencontre la ligne d'action de la force (2), traçons une parallèle BC à *oc*, et ainsi de suite. La dernière ligne tracée sera DE, parallèle à *oe*, le point D étant sur la ligne d'action de la dernière force (4). La figure ainsi obtenue s'appelle *un polygone funiculaire* des forces données. Tous ses sommets se trouvent *sur le réseau des lignes d'action de ces forces;* ses différents côtés sont respectivement parallèles aux rayons polaires; *ses côtés extrêmes* (OA et DE) sont parallèles aux rayons polaires extrêmes, qui correspondent à l'origine *a* et à l'extrémité *e* du polygone des forces.

Supposons qu'on applique suivant OA, considérée comme une ligne d'action, deux forces égales et de sens contraire, dont l'intensité soit représentée par la longueur du rayon polaire *oa*. L'équilibre du système ne sera pas troublé; autrement dit, on aura un second système équivalent au premier.

Laissons provisoirement de côté la force dont le sens serait défini par *ao* et composons la force de sens *oa* avec la force (1). La résultante sera égale, en grandeur et direction, au rayon polaire *ob*. Sa ligne d'action doit passer par le point A et être parallèle à *ob* (en vertu de la règle ordinaire de composition des forces). Elle ne peut être que AB.

Composons de même cette première résultante partielle avec la force (2). Leur résultante sera représentée par la ligne d'action BC et par le rayon polaire *oc*, et ainsi de suite.

La dernière résultante partielle sera représentée par DE sur le plan de situation et par le rayon polaire *oe* sur le polygone des forces.

Le système des forces données, ou celui qui lui a été substitué, peut donc en définitive se remplacer par un système de deux forces, l'une égale à *ao* et ayant comme ligne d'action OA, l'autre égale à *oe* et ayant comme ligne d'action DE.

Si les points *a* et *e* sont distincts, c'est-à-dire si le polygone des forces ne se ferme pas, les deux droites OA et DE, côtés extrêmes du polygone funiculaire, respectivement parallèles à *oa* et *oe*, se rencontrent forcément en un point M et la ligne d'action de la résultante doit passer par ce point. Comme elle doit d'autre

part être parallèle à *ae*, elle se trouve ainsi complètement définie.

Si les points *a* et *e* étaient confondus, c'est-à-dire si le polygone des forces se fermait, les deux droites OA et DE seraient ou bien confondues, ou bien parallèles.

Dans le premier cas le système proposé se trouverait remplacé par deux forces égales, de sens opposé, agissant suivant la même ligne d'action et se faisant par suite équilibre.

Dans le second cas, il serait remplacé par deux forces égales, de sens opposé, agissant suivant deux lignes d'action parallèles et distinctes, et par suite équivalentes à un couple.

Remarque I. — Les deux points *o* et O étant complètement arbitraires, on voit qu'on peut tracer, pour un système donné de forces, une infinité de polygones funiculaires différents. On peut donc toujours s'arranger pour que la construction soit possible.

D'une manière générale il suffit pour cela que le pôle *o* soit pris en dehors des côtés du polygone des forces. Mais cette condition n'est même pas nécessaire. On peut par exemple prendre le pôle sur la direction du premier côté *ab*, à condition de prendre le point O sur la ligne d'action (1), qui deviendrait le premier côté du polygone funiculaire, pourvu toutefois que toutes les autres lignes d'action ne lui fussent pas parallèles. Si le pôle *o* est confondu avec le point *a*, la construction revient purement et simplement au procédé ordinaire de composition successive des différentes forces.

Remarque II. — Il est essentiel de remarquer que la même construction peut servir à trouver *la résultante partielle d'un groupe quelconque de forces* faisant partie du système donné, pourvu que les forces de ce groupe soient successives eu égard à l'ordre adopté dans la construction du polygone des forces. Ainsi les forces (2) et (3) ont pour résultante une force représentée sur le polygone des forces par *bd* et sur le plan de situation par la parallèle à *bd* menée par le point N où se rencontrent les côtés AB et CD, qui jouent le rôle de côtés extrêmes pour le polygone funiculaire partiel du groupe des forces (2) et (3).

Remarque III. — Si l'on remplace un groupe quelconque de

forces successives du système par leur résultante partielle, par exemple les forces (2) et (3) par leur résultante partielle, dont la ligne d'action passe en N, il est évident que ce changement n'altérera le polygone des forces et le polygone funiculaire que dans l'intervalle compris entre la première et la dernière force du groupe. Par exemple la ligne brisée *bcd* est remplacée par la droite *bd*; de même BC est supprimé, mais CD demeure la parallèle à *od* passant par le point N, où AB rencontre la ligne d'action de la résultante partielle.

A la limite le polygone funiculaire peut se réduire à ses côtés extrêmes OA et DE, se rencontrant sur la ligne d'action de la résultante totale parallèle à *ae*.

Remarque IV. — Lorsque, au lieu de forces isolées, on a affaire à des forces réparties d'une manière continue dans le plan de situation, chacune d'elles étant assimilable à un infiniment petit, les mêmes résultats subsistent, à la condition de remplacer le polygone des forces et le polygone funiculaire par des lignes courbes, limites de lignes brisées à côtés infiniment petits. Les tangentes à la courbe des forces sont parallèles aux lignes d'action successivement rencontrées en allant dans un sens convenu. Les tangentes à la courbe funiculaire sont parallèles aux rayons polaires successifs, infiniment rapprochés.

Au point de vue graphique, il est pratiquement nécessaire de grouper les forces qui sont réparties dans certains intervalles finis et de les remplacer par leur résultante de grandeur finie. La remarque précédente trouve alors son application. On est conduit à remplacer sur la courbe des forces certains arcs par leur corde, mais les sommets du polygone simplifié demeurent sur la courbe dont ils sont des points exacts. De même sur la courbe funiculaire on remplace certains arcs par leurs deux tangentes extrêmes, mais les points de contact des côtés du polygone simplifié demeurent des points exacts de la courbe funiculaire. Ces points de contact sont d'ailleurs placés à la rencontre des côtés du polygone funiculaire simplifié avec les lignes d'action extrêmes de chaque groupe de forces.

Remarque V. — Il n'y a rien de changé à la théorie générale lorsque le système donné est composé de forces toutes parallèles à

une même direction. Dans ce cas, le polygone des forces a tous ses sommets sur une même ligne droite, en dehors de laquelle on doit prendre le pôle o.

La distance du pôle à la droite qui constitue le polygone des forces s'appelle alors la *distance polaire*, ou *la force polaire*.

Ce cas des forces parallèles donne lieu à des développements importants, que nous retrouverons plus loin, et qui sont la base de nombreux procédés de calcul graphique.

Propriétés générales des polygones funiculaires relatifs à un même système de forces :

THÉORÈME. — *Deux polygones funiculaires correspondant à un même système de forces, mais tracés avec des pôles différents, sont tels que la ligne joignant les points d'intersection de leurs côtés extrêmes soit parallèle à la ligne des pôles.*

Soit OABCDE un premier polygone funiculaire des forces (1), ... (4), tracé avec le pôle o et OA'B'C'D'E un deuxième polygone tracé avec le pôle o'. Les premiers côtés se coupent en O, les derniers en E. Je dis que OE est parallèle à oo'.

En effet le système des forces données peut se ramener aux deux forces ao et oe, ayant respectivement pour lignes d'action MO et ME, car on peut décomposer de cette façon la résultante R des forces.

Supposons qu'on trace avec le pôle o' un polygone funiculaire de ces deux forces MO et ME en faisant passer le premier côté par O. Son premier côté sera OA'M' parallèle à $o'a$. Son second côté sera une droite OE', parallèle au rayon polaire $o'o$, et son troisième côté sera une parallèle à $o'e$, et il devra d'ailleurs être tel que son point de rencontre avec le premier côté OM' soit sur la résultante (R) des forces. Ce point de rencontre ne pouvant être que M', le troisième côté du polygone ne peut différer de M'E qui remplit précisément ces conditions. Cela implique que E' soit à la rencontre de ME et de M'E, c'est-à-dire au point E. Autrement dit OE est la parallèle à oo' menée par le point O.

COROLLAIRE. — *Deux polygones funiculaires correspondant à un même système de forces sont tels que leurs côtés correspondants se coupent sur une même droite parallèle à la ligne des pôles.*

Cela résulte du théorème qui vient d'être démontré. On a vu en effet que si l'on prend le point de rencontre O des deux premiers côtés et le point de rencontre des deux derniers, la ligne qui les joint est parallèle à la ligne des pôles $o'o$. Il en est de même pour tous les polygones partiels, qu'on obtient en supprimant la dernière force, puis les deux dernières, etc. Donc tous les côtés correspondants se coupent sur une même parallèle à oo' tracée par le point O d'intersection des deux premiers côtés.

Quand toutes les lignes d'action sont concourantes, les deux polygones funiculaires sont deux figures homologiques, le centre d'homologie étant le point de concours des lignes d'action et l'axe d'homologie étant la parallèle à la ligne des pôles dont il vient d'être parlé.

Dans le cas de forces parallèles, les lignes d'action concourent en un point situé à l'infini dans leur direction; les deux polygones funiculaires sont donc deux figures homologiques dont le centre d'homologie est rejeté à l'infini. Leurs ordonnées comptées à partir de l'axe d'homologie dans la direction des forces sont alors proportionnelles. Autrement dit ce sont deux figures déduites l'une de l'autre par dilatation ou par réduction d'ordonnées dans la direction considérée. Cette propriété sera très fréquemment invoquée.

Décomposition d'un système de forces suivant deux lignes d'action données. — Le problème n'est possible qu'autant que les lignes d'action données se rencontrent sur la ligne d'action de la résultante du système ou bien lui sont parallèles. Il existe de nombreux cas, notamment celui des forces parallèles où cette condition est facile à vérifier *à priori*. Dans tous les autres cas on pourra la vérifier après la détermination de la ligne d'action de la résultante au moyen d'un polygone funiculaire, détermination qui aura au surplus comme conséquence de ramener le problème posé à celui de la décomposition d'une force unique suivant les deux lignes d'action données.

Soient (X), (Y) les lignes d'action données se rencontrant au point S de la ligne d'action (R) de la résultante. Soit ae le segment qui, sur le polygone des forces, représente cette résultante.

Dans le cas général la solution la plus simple est celle qui est

fournie par la statique et qui consiste à tracer par a une parallèle à (X) et par e une parallèle à (Y) et à prendre leur intersection ω. Les vecteurs $a\omega$ et ωe sont les composantes cherchées. Mais ce

Fig. 15.

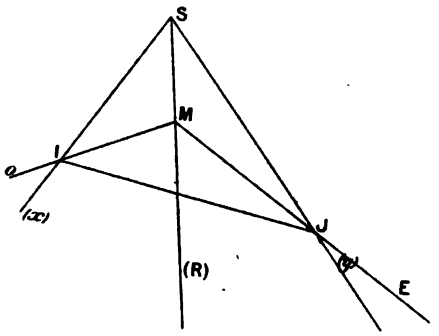
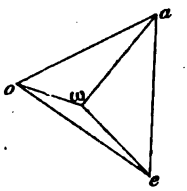


Fig. 16.



tracé tombe en défaut quand (X) et (Y) sont parallèles à (R) et est peu précis lorsque (X) et (Y) sont presque parallèles. Voici un deuxième moyen plus général qui découle du théorème précédent.

Soient OM et ME les côtés extrêmes du polygone funiculaire de pôle O qui a servi à déterminer la résultante (R).

Ils peuvent être considérés comme constituant un polygone funiculaire afférent à la force unique (R).

Soient I et J les points où ils rencontrent respectivement (X) et (Y). Les deux droites IS et SJ peuvent être de leur côté considérées comme constituant un polygone funiculaire afférent à la même force (R) et tracé avec le pôle ω.

Les points I et J d'intersection des côtés extrêmes de ces deux polygones funiculaires sont donc tels que IJ est parallèle à $o\omega$.

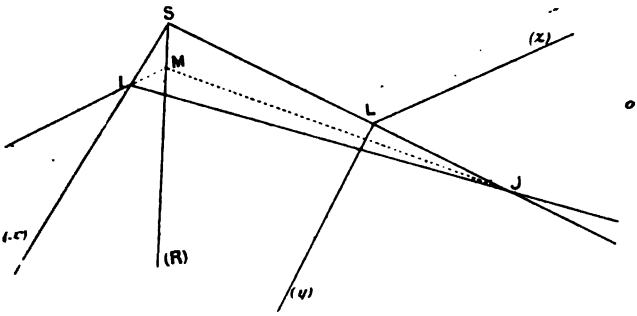
Il en résulte qu'on peut déterminer ω par l'intersection de $o\omega$, parallèle à IJ, et de l'une quelconque des droites $a\omega$ et $e\omega$ considérées précédemment et parallèles respectivement à (X), (Y).

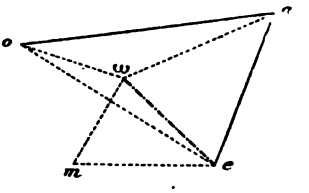
Dans le cas très important où (X) et (Y) seraient parallèles à (R), $a\omega$ et $e\omega$ se confondent avec ae et ω se trouve sur cette droite.

La droite IJ qui joint les points où les droites (X) et (Y) rencontrent les côtés extrêmes du polygone funiculaire primitif s'appelle la *ligne de fermeture* de ce polygone primitif relativement aux droites (X) et (Y).

Décomposition d'un système de forces suivant trois lignes d'action données non concourantes. — Le problème est toujours possible. Soient (X), (Y), (Z) les trois lignes d'action données. Supposons

Fig. 17. Fig. 18.





qu'on ait déterminé la résultante du système des forces : soient (R) sa ligne d'action et *ae* sa représentation sur le polygone des forces. Soient S le point de rencontre de (R) et de (X) et L le point de rencontre des deux dernières lignes d'action (Y) et (Z). Nous décomposerons d'abord R suivant les deux lignes d'action (X) et SL, en appliquant la construction précédemment indiquée.

Si IM et MJ sont les deux côtés extrêmes du polygone funiculaire supposé tracé avec le pôle O, on mènera la ligne de fermeture IJ, relative aux deux lignes d'action (X) et SL. On tracera $o\omega$ parallèle à IJ et $a\omega$ parallèle à (X). $a\omega$ sera la composante suivant (X) et ωe serait la composante suivant SL.

Il restera à décomposer ωe suivant les deux lignes d'action (Y) et (Z) qui concourent au point L. On fera cette décomposition en menant ωm parallèle à (Y) et em parallèle à (Z).

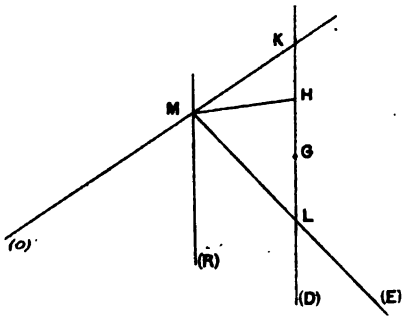
Le contour polygonal $a\omega me$ fournit les trois composantes cherchées de la force $R = ae$ et, par suite, du système de forces proposé.

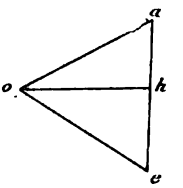
Comme on peut prendre pour première ligne d'action (X) l'une quelconque des trois lignes d'action données, on voit que la construction peut s'opérer de plusieurs manières, entre lesquelles on choisira la plus commode au point de vue graphique.

Expression graphique du moment d'un système de forces par

rapport à un point donné. — Supposons qu'au moyen d'un polygone funiculaire de pôle O on ait déterminé la ligne d'action (R) de

Fig. 19. Fig. 20.





la résultante, dont la grandeur est représentée en *ae* sur le polygone des forces. Par le point donné G menons (D), parallèle à (R) et coupant en K et L respectivement les côtés extrêmes du polygone funiculaire (O) et (E). Le moment du système par rapport à G est égal au produit de *ae* par la distance MH de M à la droite (D).

Si *oh* représente la distance du pôle *o* à la résultante *ae* dans le polygone des forces, les deux triangles semblables MKL et *oae* fournissent la relation

$$\frac{MH}{oh} = \frac{KL}{ae},$$

d'où

$$MH \times ae = KL \times oh.$$

On obtient donc une nouvelle expression du moment. Il est égal *au produit de la distance oh par le segment* KL *découpé, entre les deux côtés extrêmes du polygone funiculaire, sur la droite* (D) *menée par* G *parallèlement à la résultante.*

La même construction s'appliquerait au moment par rapport au point G d'un groupe quelconque des forces du système, pourvu que ces forces soient successives. Dans chaque cas il faudrait considérer la résultante partielle du groupe, ainsi que les côtés extrêmes du polygone funiculaire partiel correspondant.

Moments de forces toutes parallèles à une même direction. — Le

résultat qui précède a une importance particulière dans le cas de forces parallèles. En effet, le polygone des forces à tous ses sommets sur la droite *ae*, parallèle à leur direction commune et la distance *oh* demeure la même quel que soit le groupe partiel de forces que l'on considère. La droite (D) menée par le point G ne change pas non plus et il suffit de marquer sur elle les points d'intersection avec les côtés extrêmes du polygone funiculaire partiel.

En particulier, si l'on a besoin des moments par rapport au point G d'un groupe de plus en plus étendu de forces à partir de la première d'entre elles, tous ces moments seront proportionnels aux segments découpés sur (D) entre le premier côté du polygone funiculaire et ses côtés successifs.

De même pour les groupes de forces qu'on pourrait avoir à considérer à partir de la dernière d'entre elles. Les différents segments seraient à compter à partir du dernier côté du polygone funiculaire.

Enfin, à la limite, si l'on cherchait le moment d'une seule des forces du système, ce moment serait proportionnel au segment découpé entre les deux côtés du polygone funiculaire qui se rencontrent sur la ligne d'action de la force.

Supposons maintenant que le point G se déplace.

Si son déplacement s'opère sur (D) parallèlement à la direction commune des forces, il est bien évident que le moment des forces considérées ne changera pas, ce qui permet de ne prendre en considération que la position de la parallèle (D) par rapport aux lignes d'action de ces forces.

Si la ligne (D) se déplace, le moment par rapport à un quelconque de ses points varie comme le segment KL (qui est proportionnel à MH) et s'annule bien entendu quand (D) passe par le point M.

Si, au lieu de considérer le système complet des forces données, on ne considère à chaque instant que le groupe des forces situées à gauche de la droite (D) supposée variable, le moment correspondant est proportionnel au segment découpé sur (D) entre le premier côté du polygone funiculaire et ses côtés successifs. Le polygone funiculaire apparaît donc *comme une courbe représentative des moments des forces situées à gauche de* (D), *par rapport à un point quelconque de cette droite, à la seule condition*

de compter les ordonnées parallèlement à la direction commune des forces et de les rapporter, comme ligne de référence, au premier côté du polygone funiculaire.

On arriverait à un résultat tout semblable en considérant a chaque instant le groupe des forces situées à droite de (D).

Les considérations qui précèdent s'appliquent, bien entendu, au cas où l'on aurait des forces parallèles infiniment petites réparties d'une manière continue, au lieu d'avoir des forces isolées. Au point de vue théorique il n'y a qu'à remplacer le mot *polygone funiculaire* par le mot *courbe funiculaire*. Au point de vue pratique, on groupera les forces réparties dans certains intervalles finis et, en les remplaçant par leur résultante de grandeur finie, on obtiendra un polygone funiculaire *enveloppe* de la courbe funiculaire théorique.

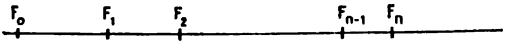
On reconnaît d'ailleurs que ces considérations sont tout à fait indépendantes de l'idée de *force* et qu'elles peuvent s'appliquer sans changement à toute grandeur susceptible d'être graphiquement représentée par un système de vecteurs parallèles soit isolés, soit répartis d'une manière continue dans le plan. Nous allons les généraliser un peu à ce point de vue.

II. — Sommations ou intégrations graphiques.

Étant donnée une fonction F d'une variable indépendante σ, un des moyens les plus simples pour la représenter graphiquement consiste à construire son *échelle fonctionnelle*. Si l'on suppose que σ ne prend qu'une suite de valeurs isolées $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ et si l'on appelle $F_1, F_2, \ldots, F_n$ les valeurs correspondantes de F_1, on obtiendra l'échelle fonctionnelle en portant sur une droite indéfinie, à partir d'un même point origine F_0, des segments

$$\overline{F_0F_1} = F_1, \quad \overline{F_0F_2} = F_2, \quad \ldots, \quad \overline{F_0F_n} = F_n.$$

Fig. 21.



Si σ varie d'une manière continue dans un intervalle $s_0 s_n$, on supposera cet intervalle décomposé en intervalles partiels corres-

pondant à une suite de valeurs σ_1, σ_2, ..., σ_n, et l'on opérera comme dans le cas précédent.

L'ensemble des points F représentés sur l'échelle fournit les valeurs exactes de la fonction pour les valeurs particulières σ_1, σ_2, ..., σ_n et permet de trouver par interpolation les valeurs de la fonction correspondant à des valeurs intercalaires de σ.

Par un simple déplacement d'origine l'échelle fonctionnelle représente évidemment toute fonction de la forme $F + a$, a étant une constante.

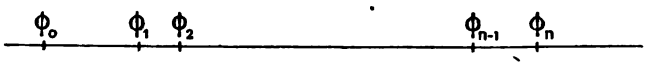
Mais dans une foule de questions on a à opérer la sommation des valeurs prises par une fonction F, pour une suite de valeurs de la variable indépendante σ. S'il s'agit d'une suite de valeurs isolées σ_1, σ_2, ..., σ_n, on a à envisager les sommes successives

$$\Phi_1 = F_1, \qquad \Phi_2 = F_1 + F_2, \qquad \ldots, \qquad \Phi_n = F_1 + F_2 + \ldots F_n,$$

et alors on a pour représenter Φ à construire son échelle fonctionnelle. Celle-ci peut s'obtenir en portant bout à bout à partir d'une origine Φ_0 des segments

$$\Phi_0\Phi_1 = F_1, \qquad \Phi_1\Phi_2 = F_2, \qquad \ldots, \qquad \Phi_{n-1}\Phi_n = F_n.$$

Fig. 22.



Cette échelle fonctionnelle de Φ peut être appelée *l'échelle intégrale de* F.

Dans la plupart des questions, F a le caractère d'une différentielle. Il apparaît comme le produit d'une fonction finie f, par la différentielle $d\sigma$ de la variable indépendante. Dans le calcul graphique, $d\sigma$ ne peut être pratiquement un infiniment petit; c'est l'un des intervalles $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, ..., $d\sigma_n$ en lesquels a été subdivisé l'intervalle total $s_0 s_n$ et les diverses valeurs de F sont des quantités plus ou moins petites, mais finies, qui sont représentées, avec une approximation plus ou moins grande, par $f_1 d\sigma_1, f_2 d\sigma_2, \ldots, f_n d\sigma_n$. En cumulant de proche en proche leurs valeurs, et en construisant comme précédemment leur échelle intégrale, on obtient les valeurs

successives prises par la fonction intégrale

$$\Phi = \int_{s_0}^{s} f\,d\sigma.$$

Cela posé le problème fondamental du calcul graphique peut se poser ainsi :

Étant données une fonction V *définie par son échelle intégrale, et deux fonctions* X *et* Z *données par leurs échelles fonctionnelles, déterminer l'échelle intégrale de la fonction*

Fig. 23.

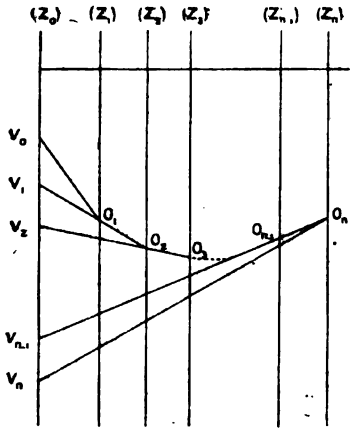
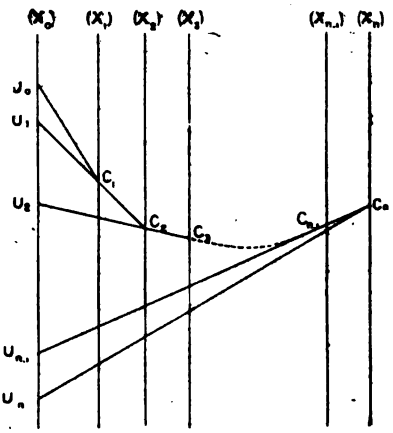


Fig. 24.



$$U = \frac{X}{Z} V.$$

Soient :

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n;$$
$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n;$$
$$Z_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_n,$$

la suite des valeurs prises par les fonctions V, X, Z respectivement pour la suite des valeurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ de la variable indépendante.

Construisons sur une verticale origine (Z_0) l'échelle intégrale $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, V_n$ de V, échelle tout à fait analogue à un polygone des forces, dans le cas des forces parallèles.

Puis menons une série de verticales $(Z_1), (Z_2), \ldots, (Z_{n-1}), (Z_n)$

à des distances de (Z_0) égales aux valeurs de $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. Ce réseau de droites, que nous appellerons *le réseau des droites* (Z) découperait évidemment sur une horizontale quelconque l'échelle fonctionnelle de Z.

Traçons de même sur une seconde figure une série de verticales $(X_0), (X_1), (X_2), \ldots, (X_{n-1}), (X_n)$, dont les distances respectives à (X_0) soient égales aux valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Nous l'appellerons *le réseau des droites* X.

Prenons maintenant sur (Z_1) un point arbitraire O_1 et joignons-le aux extrémités V_0V_1 du premier segment V_1 de l'échelle intégrale de V, puis prolongeons V_1O_1 jusqu'à sa rencontre en O_2 avec la verticale (Z_2). Joignons V_2O_2 et prolongeons jusqu'à sa rencontre en O_3 avec la verticale (Z_3), et ainsi de suite. Nous obtenons une figure polygonale $V_0O_1O_2 \ldots O_{n-1}O_n$ dont les sommets successifs se trouvent sur le réseau des droites (Z) et dont les côtés successifs déterminent sur la verticale (Z_0) l'échelle intégrale de V.

D'un autre côté, partant d'un point arbitraire U_0 sur (X_0), traçons U_0C_1 parallèle à V_0O_1, puis par C_1, situé sur (X_1), traçons $U_1C_1C_2$ parallèle à $V_1O_1O_2$, et ainsi de suite. Nous obtenons une seconde figure polygonale dont les sommets successifs se trouvent sur le réseau des droites (X) et dont les côtés successifs déterminent sur la verticale (X_0) l'échelle intégrale de U.

En effet, les triangles semblables tels que $V_0O_1V_1$ et $U_0C_1U_1$ donnent des relations de la forme

$$\frac{\overline{U_0U_1}}{X_1} = \frac{V_1}{Z_1} \qquad \text{ou} \qquad \overline{U_0U_1} = \frac{X_1}{Z_1}V_1 = U_1.$$

Le second polygone est tout à fait analogue comme construction à un polygone funiculaire de forces fictives égales aux valeurs de V, agissant sur le réseau des droites (X), avec cette seule différence que, au lieu d'avoir un pôle fixe, on a un pôle variable se déplaçant sur le réseau des droites (Z).

Aussi emploierons-nous le langage de la statique graphique pour résumer la construction en ces termes :

On passe de l'échelle intégrale de V *à l'échelle intégrale de* $U = \frac{X}{Z}V$ *en construisant sur le réseau des droites* (X) *un*

polygone funiculaire des forces fictives V *avec une distance polaire variable et égale à* Z.

Il est bien évident qu'il y a réciprocité absolue entre les deux figures et qu'on passerait inversement de l'échelle intégrale de U à l'échelle intégrale de V, le premier polygone $V_0 O_1 O_2 \ldots O_n$ jouant le rôle de polygone funiculaire.

Il est bien évident aussi que le procédé peut se généraliser, et que si X′ et Z′ désignent de nouvelles fonctions, on pourra passer de l'échelle intégrale de U à l'échelle intégrale de la fonction W définie par la relation

$$W = \frac{X'}{Z'} U = \frac{X'}{Z'} \times \frac{X}{Z} V.$$

Remarque I. — Quand plusieurs *valeurs successives*, soit de X, soit de Z, sont égales, les droites (X) ou (Z) correspondantes sont confondues et les polygones ont plusieurs sommets confondus sans que leurs côtés cessent pour cela d'être distincts.

Supposons notamment que Z soit une constante, tous les points tels que O sont confondus et l'on retombe sur le cas d'un polygone funiculaire ordinaire.

Remarque II. — Si l'on déplace la verticale (X_0) parallèlement à elle-même, sans modifier le réseau des droites (X), cela revient évidemment à substituer à la fonction X la fonction X + M, M étant une constante mesurant à l'échelle des X le déplacement de (X_0). On obtiendra donc sur la nouvelle verticale (X'_0) l'échelle intégrale de la fonction

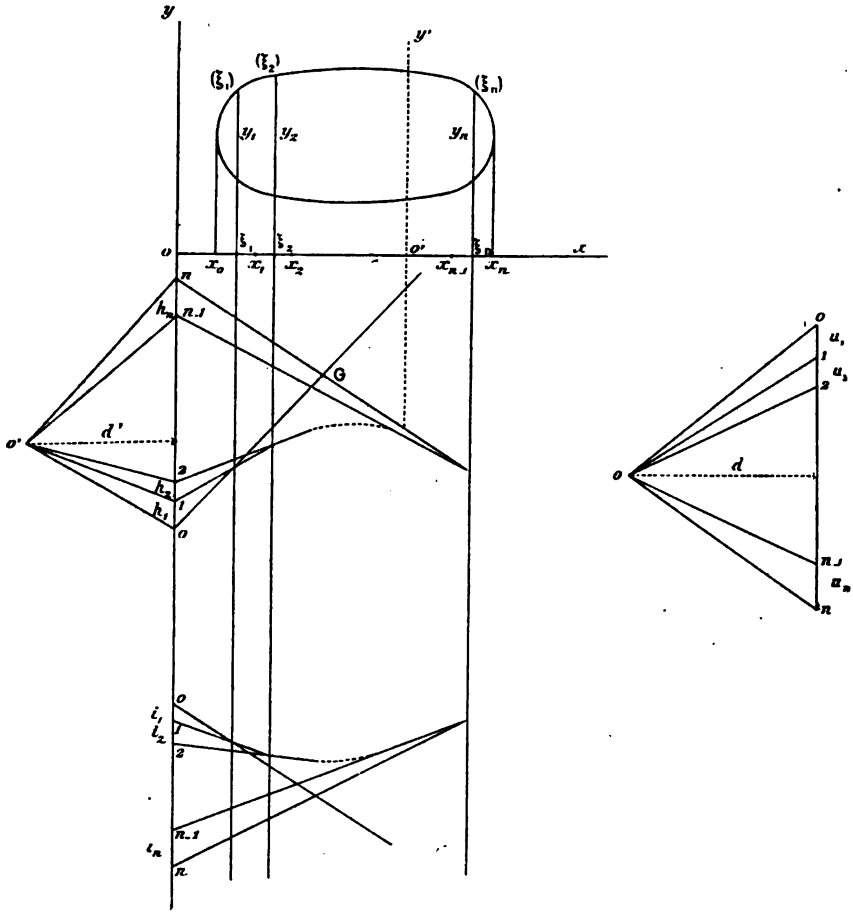
$$U' = \frac{X + M}{Z} V.$$

Remarque III. — Il est très important de faire grande attention aux échelles métriques qui auront servi à la représentation des diverses quantités X, Z, V. L'échelle de U se déduit des trois autres. Si l'on s'est arrangé pour que X et Z soient représentés à une même échelle, les fonctions U et V seront aussi représentées à la même échelle. Mais cela n'est pas toujours possible.

Application à la recherche du centre de gravité, des moments du premier ordre et des moments d'inertie d'une aire plane. — Soit

une aire plane quelconque rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy. Traçons les tangentes parallèles à Oy coupant l'axe des x

Fig. 25.



aux points x_0 et x_n, puis divisons l'intervalle $x_0 x_n$ en n intervalles partiels par les points de division $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Nous appellerons $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les milieux des intervalles dont la grandeur sera désignée par $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$. (Bien entendu, si rien ne s'y oppose, on prendra pour simplifier tous les intervalles partiels dx égaux entre eux.)

Si l'on désigne par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les longueurs des segments

découpés par le contour de la surface sur les verticales (ξ_1), (ξ_2), ..., (ξ_n), les éléments d'aire ont pour valeur respective

$$u_1 = y_1 dx_1, \qquad u_2 = y_2 dx_2, \qquad \ldots, \qquad u_n = y_n dx_n.$$

Nous les supposerons connus ou déterminés directement (ce qui sera particulièrement facile si les dx sont égaux).

La surface totale est

$$S = \int_1^n y\, dx = \int_1^n u.$$

Nous nous proposons d'obtenir, d'abord, son moment du premier ordre par rapport à un point de Oy, moment dont l'expression est

$$H = \int_1^n \xi u = d \int_1^n \frac{\xi u}{d}$$

(d désignant une longueur arbitraire) ou, ce qui revient au même, d'obtenir la longueur $\frac{H}{d}$.

Nous formerons sur une verticale l'échelle intégrale de u, ou polygone des forces fictives u_1, u_2, ..., u_n. Ensuite nous tracerons le réseau des droites (ξ). Le réseau des droites (d) se réduit ici à une seule droite à la distance d de l'échelle intégrale de u. Sur cette droite nous prendrons un pôle arbitraire, puis nous tracerons le polygone funiculaire des forces fictives u_1, u_2, ..., u_n sur le réseau des droites (ξ). Ses côtés successifs traceront sur Oy l'échelle intégrale des éléments

$$\bar{h} = \frac{\xi u}{d}.$$

Le segment découpé entre les côtés extrêmes sera la longueur cherchée

$$\frac{H}{d} = \int_1^n \frac{\xi u}{d}.$$

Cherchons maintenant le moment d'inertie par rapport à Oy, dont l'expression est

$$I = \int_1^n \xi^2 u = d \times d' \int_1^n \frac{\xi}{d'} \times \frac{\xi}{d} u = dd' \int_1^n \frac{\xi}{d'} h$$

(d' désignant une nouvelle longueur arbitraire) ou, ce qui revient au même, la longueur $\frac{1}{d \times d'}$.

L'échelle intégrale de h étant obtenue sur Oy par la construction précédente, il suffit de prendre un nouveau pôle O' à une distance d' de Oy, puis de tracer sur le réseau des droites (ξ) le polygone funiculaire des forces fictives $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Les côtés successifs traceront sur Oy l'échelle intégrale des éléments tels que

$$i = \frac{\xi}{d'} \times h.$$

Le segment découpé entre les côtés extrêmes sera la longueur cherchée $\frac{1}{d \times d'}$.

La construction très générale qui précède donne lieu aux remarques suivantes :

1° Elle fournit, sans construction nouvelle, les aires, les moments du premier ordre et les moments d'inertie de toute surface partielle comprise entre deux abscisses x_p et x_q comprises dans la série des points de division de $x_0 x_n$. Il suffit de limiter par la pensée l'échelle intégrale de u aux seuls éléments $u_{p+1}, \ldots, u_q$, et de prendre comme côtés extrêmes des polygones funiculaires correspondants ceux qui précèdent et qui suivent les sommets situés sur (ξ_{p+1}) et (ξ_q).

2° Si l'on envisage les segments découpés par le premier polygone funiculaire, non plus sur Oy, mais sur une parallèle Oy' dont l'abscisse soit p, ces segments seront respectivement les valeurs de

$$h' = \frac{(\xi - p)}{d} u,$$

et le segment découpé entre les côtés extrêmes sera

$$\frac{H'}{d} = \int_1^n \frac{\xi - p}{d} u = \int_1^n \frac{\xi}{d} u - \frac{p}{d} \int_1^n u = \frac{H}{d} - p \frac{S}{d}.$$

Le centre de gravité est par définition sur la verticale $O'y'$ qui fournit une valeur $H' = 0$. Cette verticale du centre de gravité doit donc passer par le point de rencontre G des côtés extrêmes du premier polygone funiculaire.

3° De même, le segment découpé par les côtés extrêmes du second polygone funiculaire sur la verticale quelconque $O'y'$ a pour valeur

$$\frac{I'}{d \times d'} = \int_1^n \frac{(\xi - p)}{d'} h = \int_1^n \frac{\xi}{d'} h - \frac{p}{d'} \int_1^n h = \frac{I}{d \times d'} - \frac{p}{d \times d'} H.$$

Si $O'y'$ est, non plus une verticale quelconque, mais la verticale du centre de gravité G, son abscisse p satisfait à la relation

$$H - pS = 0,$$

et l'on a

$$\frac{I'}{d \times d'} = \frac{I}{d \times d'} - \frac{p^2 S}{dd'}.$$

I' représente donc *le moment d'inertie par rapport à la verticale du centre de gravité*, puisque ce moment d'inertie doit être tel que

$$I = I' + p^2 S.$$

4° Une méthode toute semblable s'appliquerait à la recherche des centres de gravité ou des moments d'inertie d'une ligne.

D'autre part, si chaque élément de surface ou de ligne était affecté d'un coefficient variable k, de telle sorte qu'on ait à envisager, non plus les éléments $u_1, u_2, \ldots, u_n$, mais les éléments $\frac{u_1}{k_1}, \frac{u_2}{k_2}, \ldots, \frac{u_n}{k_n}$, il pourra être avantageux de conserver l'échelle intégrale des u, et de tracer le premier polygone funiculaire avec la distance polaire variable kd, en traçant le réseau des droites (d) situées à la distance kd de l'échelle intégrale de u. Ce pourra être plus simple que de calculer les quotients $\frac{u}{k}$.

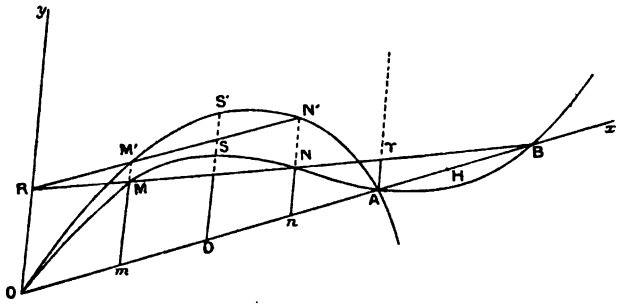
Note sur la construction des paraboles cubiques. — Les méthodes graphiques particulières à chaque problème sont tellement variées que nous ne pourrons pas songer à les décrire dans ce cours. Mais nous dirons quelques mots de la construction des paraboles cubiques dont l'équation en coordonnées obliques se présente sous la forme

$$y = \omega x \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right),$$

car on a très fréquemment à envisager ces sortes de courbes. Nous supposons $b > a$.

La parabole coupe l'axe des x, ou ligne de référence, aux points

Fig. 26.



$x = 0$, $x = a = \mathrm{OA}$, $x = b = \mathrm{OB}$. De plus, le coefficient angulaire de sa tangente, donné par la relation

$$\frac{dy}{dx} = \omega\left[1 - 2x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{3x^2}{ab}\right],$$

se réduit à ω pour $x = 0$, et à $\omega' = \omega\left(\frac{a}{b} - 1\right)$ pour $x = a$.

Considérons la parabole du second degré, OM'S'A, définie par l'équation

$$y' = \omega x\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Elle lui est tangente en O et passe par A, sa construction est facile.

Or, pour toute valeur de x, on a

$$\frac{y}{y'} = \frac{b - x}{b}.$$

Cela revient à dire que sur une ligne de rappel telle que $m\mathrm{M}'$, on passe de l'ordonnée $y' = m\mathrm{M}'$ à l'ordonnée $y = m\mathrm{M}$ en réduisant la première dans le rapport $\frac{b - x}{b} = \frac{m\mathrm{B}}{\mathrm{OB}}$. Il suffira donc de tracer M'R parallèle à Ox et de joindre RB pour obtenir le point M sur la ligne de rappel de m.

Pour deux abscisses telles que x et $a - x$, autrement dit pour deux lignes de rappel également distantes du milieu D de OA, on a deux valeurs de y' égales. On obtiendra donc par un même tracé les deux points correspondants M et N.

Si, en particulier, on fait la construction pour la ligne de rappel correspondant à D, ligne sur laquelle est le sommet de la parabole y', la droite BR correspondante sera tangente à la parabole y.

Il est à peine besoin d'ajouter que le tracé effectif de la parabole du second degré n'est nullement nécessaire. Il suffit que l'on ait porté sur Oy les valeurs de OR correspondant à diverses valeurs de x, c'est-à-dire que l'on ait construit sur Oy l'échelle fonctionnelle de y'.

On peut déterminer facilement l'abscisse du point d'inflexion de la courbe. En effet, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\omega\left[2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{6x}{ab}\right].$$

Cette dérivée seconde s'annule pour

$$x = \frac{a+b}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{a+b}{2}.$$

Il suffit de prendre le milieu H de AB et de prendre ensuite les $\frac{2}{3}$ de OH. Inversement, si l'on connaît l'abscisse du point d'inflexion, cette donnée pourra remplacer la connaissance du point B. On déterminerait d'abord H, puis B.

Il arrive souvent que l'on ne connaît pas directement la longueur $OB = b$, et que la parabole cubique soit définie par ses deux points O et A, sa tangente en O et sa tangente en A. La relation donnée plus haut

$$\omega' = \omega\left(\frac{a}{b}-1\right), \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad b = a\,\frac{\omega}{\omega+\omega'},$$

permettra alors facilement de calculer b ou de le construire graphiquement. On a $b > a$ toutes les fois que $\omega > 0$ avec $0 > \omega' > -\omega$.

Si le point B tombe en dehors des limites de l'épure, on emploiera pour tracer les droites telles que RB un artifice quelconque. Par exemple, sur la verticale passant par A on déterminera une échelle fonctionnelle des segments

$$Ar = OR \times \frac{AB}{OB} = OR\,\frac{b-a}{a} = OR\,\frac{\omega'}{\omega}$$

en valeur absolue.

CHAPITRE III.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES SOLIDES NATURELS.

APPLICATION DES CONDITIONS GÉNÉRALES D'ÉQUILIBRE AUX SOLIDES NATURELS.

Les solides naturels diffèrent notablement des solides invariables considérés dans la mécanique rationnelle. Sous l'influence des forces qui leur sont appliquées, ils éprouvent des déformations dont la grandeur varie avec la nature du solide. En exceptant le cas tout à fait théorique où deux forces égales agiraient sur le même point matériel, on peut donc dire qu'il n'y a aucun système de forces qui puisse tenir en équilibre un solide naturel auquel il vient d'être appliqué.

Mais si les forces appliquées sont telles qu'après une période de déformation du corps ce dernier, supposé primitivement au repos, revienne à l'état de repos, c'est-à-dire si les forces appliquées se font à un certain moment équilibre sur le corps déformé, on pourra dire en général, d'une manière abrégée et approchée, que ces forces se font équilibre sur le corps lui-même. En voici la raison.

L'expérience apprend que, dans le cas le plus ordinaire, lorsque les forces appliquées ne sont pas assez grandes pour briser le corps et qu'en outre elles sont appliquées lentement, les déformations subies par les différentes parties du corps sont très petites par rapport aux dimensions du corps, ou par rapport aux distances séparant les points d'application des forces. Il en résulte que les équations d'équilibre que l'on écrirait pour le corps déformé ne différeraient de celles relatives au corps dans son état naturel que par des termes de valeur relativement petite, négligeables en pratique. On écrira donc les conditions nécessaires d'équilibre en supposant le corps dans son état primitif.

On peut ajouter que, inversement, si un système de forces est

en équilibre statique sur un corps pris dans son état primitif, et dans l'hypothèse où ce corps serait invariable, le même corps, supposé déformable, reprendra généralement un état de repos, ou d'équilibre, sous l'action des mêmes forces après une première période de déformation, pourvu encore que les forces ne brisent pas le corps et qu'elles soient appliquées lentement. En effet, l'expérience apprend qu'il en est toujours ainsi quand le système se réduit à deux forces égales de sens contraire, et dirigées suivant la droite qui joint leurs points d'application. D'un autre côté, elle apprend aussi que des forces en équilibre appliquées au voisinage d'un même point d'un corps ne lui font pas subir de déformation sensible. Ces conditions suffisent évidemment pour démontrer qu'un système de forces qui se feraient équilibre sur un solide invariable doivent laisser un solide naturel au repos après une première période de déformation. Il en résulte que les conditions d'équilibre des solides invariables sont en général suffisantes aussi pour les solides naturels, moyennant les hypothèses admises et le degré d'approximation que l'on recherche.

Cependant, il ne faut jamais oublier que cette conclusion n'est pas exacte d'une manière absolue.

Ainsi, lorsque les déformations du corps sont considérables et ne peuvent plus être regardées comme négligeables par rapport aux distances des points d'application des forces, par exemple lorsque l'on a affaire à des ressorts, ou à des corps analogues au caoutchouc, on ne peut se dispenser de tenir compte de la valeur de ces déformations avant d'appliquer les conditions d'équilibre, ou bien d'introduire dans les équations d'équilibre un terme les représentant.

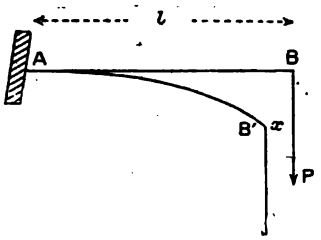
L'exemple le plus simple qu'on en puisse donner est celui que présente une lame de ressort AB horizontale encastrée à son extrémité A et libre à son extrémité B. Si en B on applique une charge verticale P, la lame de ressort se courbera et B viendra quelque part en B′, en dehors de la verticale BP. Si la lame est très mince et très souple, il pourra se faire que l'écart x' entre les verticales B et B′ ne soit pas du tout négligeable devant la longueur $AB = l$ du ressort.

Par suite il n'est plus permis d'écrire les conditions d'équilibre en supposant que P agit suivant sa ligne d'action primitive. Ces

conditions d'équilibre doivent s'écrire en considérant l'état du corps déformé.

De même lorsqu'on étudie spécialement les déformations du corps, ou bien les forces élastiques développées dans son intérieur,

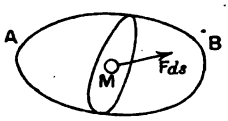
Fig. 27.



il n'est plus permis de considérer comme nulles, c'est-à-dire sans action, deux forces égales et opposées. Les opérations ordinaires de composition et de décomposition des forces, de transport des forces en un point quelconque de la direction, ne sont plus du tout légitimes à ce point de vue.

Classification des corps naturels d'après leurs propriétés élastiques. — Considérons un corps solide naturel soumis à l'action d'un certain nombre de forces ~~extérieures constituant~~ *un système en équilibre statique*. Ce corps éprouvera au moment où les forces commenceront à agir sur lui un changement de forme plus ou moins grand, mais susceptible d'être constaté et mesuré. En même temps, il se développera à l'intérieur du corps des efforts ou tensions moléculaires, assurant l'équilibre de chacune des parties en lesquelles le corps peut être décomposé. En particulier, supposons

Fig. 28.



le corps séparé en deux parties A et B par une surface de séparation S. Les efforts moléculaires sur les éléments dS de cette surface devront être tels que leur ensemble maintienne en équilibre les deux parties A et B. La partie A sera en équilibre sous l'action

des forces qui lui sont directement appliquées et qui ne forment pas en général un système en équilibre et des efforts moléculaires qu'elle subit de la part de B.

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction les efforts moléculaires exercés par A sur B seront égaux et de signe contraire à ceux exercés par B sur A. Ils formeront un système équivalent au système des forces appliquées à A.

Mais ces efforts moléculaires intérieurs, dont l'existence nécessaire est ainsi reconnue, ne se révèlent pas à l'observation directe, comme le font les changements de forme.

Supposons ensuite que les forces extérieures cessent de solliciter le corps, il pourra se présenter plusieurs cas.

Si la déformation constatée antérieurement persiste sans modification, on dira que le corps est formé d'une matière *plastique*, dont la terre glaise mouillée fournit un exemple type.

Si au contraire la déformation disparaît avec la cause qui l'a produite, et si le corps revient à sa forme primitive, on dira qu'il est formé d'une matière *élastique*. Le type d'une matière élastique est le caoutchouc.

Si enfin les déformations ne disparaissent qu'incomplètement, si le corps s'est rapproché de sa figure primitive sans y revenir exactement, on dira que la matière est *semi-élastique*.

En ce qui concerne les efforts moléculaires intérieurs, les corps élastiques méritent une mention spéciale. Il est au moins vraisemblable que ces efforts moléculaires cessent, tout comme les déformations apparentes, aussitôt que cesse d'agir la cause qui les a produits. On ne saurait rien dire d'analogue dans le cas de corps plastiques, ou semi-élastiques.

Un même corps peut être rangé dans l'une ou l'autre de ces catégories suivant son état physique, et, même sans modification de son état physique, suivant l'importance des déformations qu'on lui fait subir.

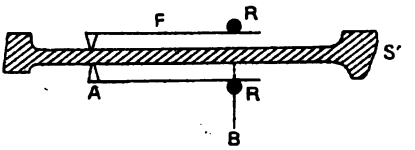
Les notions les plus précises que l'on ait des corps au point de vue de leurs propriétés élastiques sont fournies par des essais de laboratoire et particulièrement par l'essai des matériaux usuels à l'extension et à la compression.

Essai des matériaux à la traction. L'une des expériences les

plus fréquentes des laboratoires d'essai consiste à déterminer les déformations subies par une tige métallique travaillant à la traction. On emploie à cet effet une tige d'environ 20^{mm} à 25^{mm} de diamètre et de 300^{mm} de longueur. L'expérience consiste à mesurer l'allongement qu'éprouve la portion centrale de la tige, comprise entre deux points de repère distants de 100^{mm} à 150^{mm}. Cet allongement étant très petit il est nécessaire d'avoir un appareil assez sensible pour le constater.

Les appareils à miroir, généralement employés, permettent de faire des mesures avec une exactitude d'un dix-millième de millimètre. Ils se composent essentiellement de deux ressorts F fixés à

Fig. 29.



une de leurs extrémités au point de repère A pris sur la partie centrale de l'éprouvette. L'extrémité libre des ressorts s'appuie légèrement sur deux roulettes d'ébonite R qui peuvent tourner librement sur leurs axes. Ces axes sont portés par un cadre qui est lui-même fixé sur l'éprouvette au droit du second point de repère B. Lorsque l'éprouvette subit un effort d'extension, la distance comprise entre les deux points de repère A et B s'allonge et les ressorts F font tourner les roulettes d'un certain angle proportionnel à l'allongement de AB. Les axes des roulettes portent des miroirs qui permettent de mesurer cet angle avec une régle divisée et une lunette.

L'emploi de deux roulettes tournant en sens inverse est destiné à corriger les erreurs dues à des imperfections de calage de l'éprouvette, ou à la dissymétrie des efforts de traction par rapport à l'axe de l'éprouvette. Ces erreurs sont éliminées dans la moyenne des lectures.

On peut de la même façon faire des observations sur le raccourcissement de tiges soumises à des efforts de compression.

Si l'on opère sur une tige d'acier doux on constate que la longueur entre repères reprend sa valeur initiale lorsque l'effort de

traction cesse, du moins tant que cet effort de traction se maintient au-dessous d'une certaine limite. L'éprouvette se comporte comme un corps parfaitement élastique. La déformation plastique, c'est-à-dire celle qui persiste après que l'effort a cessé, est, sinon absolument nulle, du moins inappréciable par les moyens d'investigation dont on dispose et peut être négligée devant la déformation élastique.

Mais si l'on répète l'expérience avec des efforts de traction de plus en plus grands, il arrive un moment où la déformation plastique devient perceptible, et où la matière présente le caractère de semi-élasticité. C'est ce que l'on exprime en disant que la *limite d'élasticité de la matière* a été dépassée. Pour l'acier doux cette limite varie de 18^{kg} à 22^{kg} par millimètre carré de section.

Sous des efforts suffisamment grands, la déformation plastique pourra atteindre l'ordre de grandeur de la déformation élastique et même devenir prépondérante. Le corps se comporte alors comme s'il était composé d'une matière plastique, la déformation élastique ne jouant qu'un rôle insignifiant dans son changement de figure.

Enfin, pour une certaine valeur de l'effort de traction, la tige se rompt; on dit que l'on a atteint sa limite de rupture. Pour l'acier doux cette limite varie de 45^{kg} à 50^{kg} par millimètre carré. Elle est égale ou même supérieure ou double de la limite d'élasticité.

La période de semi-élasticité et la période de plasticité sont ainsi très caractérisées pour l'acier doux. Il en est de même pour le fer et pour la plupart des métaux durs. Elles sont plus courtes pour la fonte et davantage encore pour les bois et les matériaux pierreux naturels ou artificiels dont la limite de rupture suit d'assez près la limite d'élasticité.

Ces derniers matériaux présentent d'ailleurs d'autres singularités. Si on les prend dans leur état naturel ils sont d'abord semi-élastiques. Mais une application répétée des forces finit par établir un état de régime, les déformations deviennent alors parfaitement élastiques. Le temps durant lequel les forces agissent sur ces corps a aussi une influence. Les déformations augmentent avec ce temps, surtout si l'état de régime dont nous venons de parler n'a pas encore été atteint par une application réitérée des charges. Mais ces phénomènes, du reste assez mal connus encore, sont relativement peu intenses, et l'on ne s'en occupe pas dans la pratique.

D'une manière générale, nous distinguerons pour les matériaux naturels deux périodes, l'une d'élasticité parfaite, correspondant à des efforts inférieurs *à la limite d'élasticité*, l'autre d'élasticité imparfaite, comprise entre la limite d'élasticité et la *limite de rupture*.

Loi de Hooke. Proportionnalité des déformations aux efforts qui les produisent. — Les expériences de traction ou de compression dont nous venons de parler mettent en évidence les lois qui lient les déformations aux efforts qui les produisent et aux dimensions de l'éprouvette expérimentée.

Pour les métaux, tant qu'on se trouve dans la période d'élasticité parfaite, les allongements sont proportionnels aux efforts de traction exercés sur l'éprouvette. On trouve de plus que pour un même effort de traction les allongements sont proportionnels à la longueur entre les repères et inversement proportionnels à la section de l'éprouvette, de sorte que si l est la distance entre repères, Δl l'allongement, S la section, F l'effort de traction, on a

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{Fl}{S},$$

E désignant une constante dépendant des propriétés de la matière et appelée *coefficient d'élasticité*. Cette constante a pour dimensions FL^{-2}. Elle s'exprime en kilogrammes par mètre carré. Sa valeur numérique est environ de 2.10^{10} pour l'acier doux et le fer

On peut écrire la formule précédente sous la forme

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}.$$

L'allongement proportionnel $\frac{\Delta l}{l}$, appelé aussi *dilatation linéaire*, est proportionnel à $\frac{F}{S}$, c'est-à-dire à l'effort moyen de traction par unité de section de l'éprouvette.

Cette loi porte le nom de *loi de Hooke*, du nom du physicien qui la formula pour la première fois. Nous verrons que sa généralisation est un des fondements de la théorie de l'Élasticité : *Tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, les déformations*

produites sont des fonctions linéaires des intensités des forces extérieures.

Sous une autre forme c'est le principe dit de *superposition*, qui se vérifie aussi dans les essais de traction. Tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, si l'on superpose un effort de traction à un autre antérieurement appliqué, le nouvel allongement qui se superpose à l'allongement primitif est le même que si le nouvel effort de traction agissait seul.

Contraction transversale. — Dans une expérience de traction, l'allongement de la tige n'est pas la seule déformation que l'on puisse constater et mesurer. Il se produit en même temps une contraction transversale de la section. (Dans un essai à la compression on observerait inversement une augmentation de l'aire de la section.)

Cette déformation transversale, tout comme la déformation longitudinale, demeure, tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, proportionnelle à l'effort de traction exercé sur l'éprouvette. Elle est par suite proportionnelle à l'allongement longitudinal.

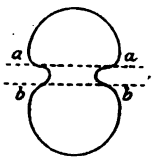
Le facteur de proportionnalité ou rapport de la contraction transversale à l'allongement longitudinal, dépend, comme le coefficient d'élasticité, de la nature de la matière. On l'appelle *coefficient de contraction transversale* et on le désigne par la lettre η ou par $\frac{1}{m}$. Certaines considérations théoriques, que nous verrons dans la théorie de l'élasticité, tendraient à faire admettre que η a pour tous les corps la valeur constante $\eta = \frac{1}{4}$. Expérimentalement on le trouve généralement un peu supérieur et compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$. Pour le fer et l'acier on admet généralement $\eta = \frac{3}{10}$.

Conservation des sections transversales. Loi de répartition des efforts intérieurs. — Des mesures précises permettent de reconnaître que sous un effort donné l'allongement entre repères demeure le même quelle que soit la génératrice du prisme sur laquelle on ait pris ces repères, et même, d'une manière plus complète, que si l'on trace sur la surface le contour d'une section normale, le contour déformé demeure dans un plan.

Toutefois cela n'est rigoureusement exact que si la partie du barreau sur laquelle sont tracés les repères, ou bien le contour de la section transversale, est une partie courante suffisamment éloignée des têtes de l'éprouvette ou des points d'application des efforts extérieurs.

On a fait notamment l'expérience suivante sur un morceau de caoutchouc ayant la forme ci-dessous, qui est usitée pour les éprou-

Fig. 30.



vettes de mortier. Dans la région centrale, qui est relativement petite, on constate, en opérant l'essai de traction, que deux droites primitivement parallèles *aa* et *bb* se transforment en deux courbes présentant l'une à l'autre leur convexité. Les allongements au milieu de l'éprouvette peuvent être le quart seulement de ceux qui sont constatés au voisinage des arêtes.

Mais sous la réserve indiquée, c'est-à-dire si les observations portent sur une région un peu éloignée des têtes de l'éprouvette, ou des points d'application des forces extérieures, les allongements sont égaux en tous les points du contour d'une section transversale, quelle que soit la forme de ce contour, du moins dans des conditions très variées de cette forme.

On est ainsi conduit à penser qu'il en est de même des allongements en tous les points intérieurs, et que non seulement le contour, mais toute l'aire d'une section transversale plane, demeure plane après la déformation.

En ce qui concerne les efforts intérieurs aux différents points d'une section transversale, on est conduit à penser qu'ils sont partout parallèles entre eux et proportionnels aux allongements aux mêmes points. Ils restent donc constants sur tout le contour d'une section transversale, quelle que soit la forme de celle-ci. Par suite, on peut admettre qu'ils restent constants dans toute l'étendue de la section transversale. C'est du moins l'hypothèse la

plus simple que l'on puisse faire pour rendre compte des faits observés. Ils sont égaux partout à l'effort moyen $\frac{F}{S}$.

Tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, la loi de Hooke est donc applicable aux efforts intérieurs aussi bien qu'aux déformations.

En outre il y a une indépendance relative assez grande entre les déformations et les efforts intérieurs d'une part et la répartition réelle des efforts de traction d'autre part, pourvu que ceux-ci soient appliqués à une certaine distance de la région observée.

Phénomènes de flexion. — On a pu également étudier en détail des phénomènes de flexion sur des barreaux prismatiques à section circulaire, ou rectangulaire principalement, et dans des conditions variées.

Tantôt le barreau est placé debout et maintenu à sa base dans un massif indéformable et l'on fait agir sur lui soit une force horizontale, soit un couple. Tantôt le barreau est placé horizontalement sur deux couteaux et par l'intermédiaire d'un troisième couteau on fait agir sur lui en son milieu, ou en tout autre point, une force verticale.

On a toujours reconnu que les métaux se comportent élastiquement sous des charges suffisamment modérées. Les déformations et principalement les flèches prises soit à l'extrémité libre, soit au milieu, soit en d'autres points cessent en même temps que la force qui les produit.

Mais si l'on augmente progressivement celle-ci, il arrive toujours un moment où les déformations ne disparaissent pas complètement quand on cesse de faire agir la force. La limite d'élasticité est dépassée quelque part, et il subsiste en certains points, ou régions, des déformations permanentes.

Tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, c'est-à-dire tant que les déformations restent élastiques, et disparaissent avec les charges, on reconnaît encore la proportionnalité des déformations à la grandeur des charges appliquées, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes bien entendu. Autrement dit la loi de Hooke est applicable.

En outre, les déformations dans les régions un peu éloignées des points d'application des forces ne dépendent pas d'une manière

appréciable de la façon réelle dont ces forces sont appliquées. Autrement dit deux systèmes de forces statiquement équivalentes y produisent sensiblement les mêmes effets.

Enfin, en variant de diverses façons les conditions des expériences, on peut reconnaître les relations qui lient certaines déformations, telles que les flèches, aux forces appliquées, aux longueurs des barreaux et à leurs dimensions transversales. Ces recherches ont servi de contrôle aux théories de la Résistance des matériaux et à celles de l'Élasticité. Celles-ci sont réputées exactes quand leurs conséquences peuvent ainsi être confirmées par l'expérience.

En ce qui concerne les efforts intérieurs, inaccessibles à l'expérience, on admet qu'ils sont, comme les déformations, proportionnels aux forces appliquées et dans une certaine mesure indépendants de leur mode réel d'application, du moins tant qu'il s'agit de phénomènes élastiques.

Hypothèses fondamentales de la Résistance des matériaux et de la théorie de l'Élasticité. Loi de Hooke généralisée. — Dans toutes les constructions on fait en sorte que sous l'action des charges, ou forces extérieures, qui entrent en jeu et qui sont supposées des données du problème, les déformations et les efforts intérieurs restent élastiques, c'est-à-dire disparaissent en même temps que les charges elles-mêmes. Dès lors, dans tous les raisonnements et calculs qu'on peut être amené à faire pour déterminer les déformations ou les actions moléculaires d'un corps, il devient naturel et légitime d'admettre, comme postulatum, ou à titre de première approximation, les lois générales dont il a été question à propos des phénomènes de traction ou de flexion.

La première est la loi de Hooke généralisée, en vertu de laquelle les relations existant entre les forces extérieures, les actions moléculaires et les déformations sont des relations linéaires. Il en résulte que les effets dus à deux systèmes de forces simultanément appliquées se superposent, c'est-à-dire sont la somme des effets qui seraient dus à chacun des systèmes de forces agissant isolément.

En second lieu, tant qu'il s'agira uniquement d'étudier des corps ne supportant d'actions extérieures qu'en des régions limitées, on pourra pour les régions éloignées, ou même simplement extérieures

aux premières, admettre que deux systèmes de charges statiquement équivalents y produisent des effets sensiblement égaux. Quand il s'agira des régions d'application des charges elles-mêmes, cette dernière règle devra évidemment cesser d'être considérée comme exacte, soit d'une manière absolue, soit d'une manière approchée.

Il ne faut jamais oublier, lorsqu'on extrapole des formules obtenues dans l'hypothèse des phénomènes élastiques, et qu'on cherche à en déduire par exemple certaines conséquences relatives à l'état de rupture ou à des états voisins de celui-ci, que ces conséquences sont tout à fait sujettes à caution. Les formules obtenues ne peuvent inspirer confiance que si la limite d'élasticité n'est atteinte en aucun point du corps. Faute d'avoir tenu compte de cette remarque évidente, on a souvent à tort opposé certains résultats d'expériences à ceux que fournit la théorie.

Non seulement il est nécessaire que dans les constructions la limite d'élasticité ne soit atteinte en aucun point, mais il faut encore pour de multiples raisons s'assurer d'une large marge de sécurité, autrement dit s'assurer que les efforts moléculaires calculés se tiennent notablement au-dessous de ceux qui pourraient conduire à des déformations permanentes. Voici un certain nombre de ces raisons empruntées à l'Ouvrage de M. Résal (*Résistance des matériaux*).

Hétérogénéité des matériaux. — Presque tous les matériaux sont plus ou moins hétérogènes, ce qui veut dire que leur constitution varie d'un point à l'autre.

Cette hétérogénéité est manifeste pour certains d'entre eux, comme le bois, qui est divisé en fibres accolées, ou comme le granit qui est formé d'une agglomération de minéraux différents. Pour d'autres, le fer, l'acier, la fonte, ce caractère est mis en évidence par l'analyse microscopique, ou par l'analyse chimique.

Les actions moléculaires dans un corps hétérogène ne varient pas d'une manière continue; elles peuvent subir des changements brusques quand on passe d'une particule à une particule voisine de nature différente. Les déformations constatées expérimentalement, ou les tensions moléculaires qu'on en déduit sont celles qui conviendraient à un corps homogène dont les propriétés élastiques

représenteraient une moyenne de celles relatives aux divers éléments constitutifs du corps naturel.

Tant que les forces extérieures sont petites, les valeurs extrêmes des actions moléculaires peuvent ne pas s'écarter beaucoup de la valeur moyenne qui correspondrait à l'hypothèse de l'homogénéité. Mais supposons que les forces extérieures aillent en croissant indéfiniment. La limite de rupture à partir de laquelle il y a séparation des molécules contiguës sera atteinte tout d'abord dans les points où l'action moléculaire passe par des maxima et où l'adhérence mutuelle des molécules est la plus faible, c'est-à-dire sur les surfaces de séparation des particules de nature différente. Il y aura sur ces points de petites ruptures et ces ruptures partielles seront définitives, modifiant d'une manière définitive la constitution du corps.

La limite d'élasticité des matériaux qui définit la limite à partir de laquelle la matière est altérée pourrait ainsi correspondre au début de la période de désagrégation des différents éléments constituant la matière hétérogène.

Ces considérations sont confirmées pour les métaux tels que le fer et l'acier, par les propriétés nouvelles qu'ils acquièrent lorsque la limite d'élasticité y a été dépassée et que la déformation permanente y est devenue appréciable sur quelques points. On dit alors que le métal est *écroui*.

Le métal écroui est devenu beaucoup plus attaquable aux acides, et beaucoup plus oxydable à l'air humide, ce qui semble impliquer l'existence de fissures imperceptibles où pénètrent les liquides corrosifs et l'air.

Quand on abandonne à l'air une plaque de blindage soumise à des essais de tir au canon, on voit souvent apparaître au bout de quelques jours des sillons de rouille dessinant des spirales se coupant à angle droit. Ces sillons sont l'indice d'un écrouissage et il est vraisemblable qu'ils correspondent à des fissures imperceptibles, mais favorisant la production de la rouille.

Des phénomènes du même genre s'observent sur des tôles poinçonnées, cisaillées ou martelées à froid, ou sur la surface extérieure des tubes mandrinés à l'intérieur (expériences de Hartmann).

En ployant alternativement dans un sens et dans l'autre une barre de fer on parvient assez rapidement à la casser, et cela sous

un effort inférieur à celui qui serait nécessaire pour produire d'un seul coup une rupture. Il suffit que l'effet soit tel qu'il détermine chaque fois une déformation permanente, c'est-à-dire qu'il fasse dépasser la limite d'élasticité en quelques points.

Il résulte de ces considérations qu'il faut s'abstenir avec soin de faire travailler les matériaux de construction au delà de la limite d'élasticité, parce qu'il se produit alors en eux une rupture d'équilibre moléculaire et un commencement de désagrégation.

Actions moléculaires latentes. Fragilité. — La prudence est encore plus commandée lorsque l'on a affaire à des matériaux qui, comme la fonte ou certains matériaux pierreux, ne présentent pas de période de semi-élasticité bien marquée et dont la limite de rupture suit d'assez près la limite d'élasticité.

On a quelque raison de penser que cette rapidité de la rupture définitive au delà de la limite d'élasticité est l'indice d'actions moléculaires latentes existant entre certains éléments à leurs surfaces de contact. Au moment où la limite d'élasticité est dépassée et où commencent certaines ruptures locales, ces actions latentes peuvent intervenir pour les aggraver ou les précipiter.

On a de nombreux exemples de pareilles actions latentes.

Par exemple, si deux matières inégalement fusibles sont intimement mélangées, en se refroidissant l'une d'elles, la moins fusible, se solidifiera d'abord sous forme de grains isolés dans le liquide constitué par l'autre. Celui-ci se solidifiant à son tour comprimera pendant sa période de retrait les grains de la première matière.

On a un phénomène analogue quand un corps hétérogène passe de l'état liquide à l'état solide par voie de cristallisation successive de ses éléments.

Des actions latentes peuvent encore se manifester sans changement d'état, par le seul fait d'un changement de température, quand les éléments constitutifs sont inégalement dilatables. C'est ainsi qu'on explique la désagrégation rapide de certains granits à gros grains.

On peut même obtenir des actions latentes particulièrement énergiques quand on fait varier rapidement la température de certaines parties des corps. On transforme certains granits en une masse friable en les *étonnant*, c'est-à-dire en les plongeant

dans l'eau après les avoir fait rougir au feu. C'est ainsi encore qu'on explique la production des *larmes bataviques* et les effets de la trempe.

Des actions moléculaires latentes peuvent ne pas modifier d'une manière sensible la résistance initiale de la matière aux déformations, mais elles sont susceptibles d'influer fortement sur la limite d'élasticité et surtout sur la limite de rupture, qui se trouve très notablement abaissée.

Mais surtout elles ont cette propriété caractéristique de rendre les corps *fragiles*, c'est-à-dire susceptibles de se rompre aisément par le choc. Il suffit que dans une région peu étendue un choc ait produit un commencement de rupture, pour que les éléments ainsi rendus libres dégagent un travail mécanique susceptible de s'ajouter à la force vive du choc et entraînent une rupture de plus en plus étendue, jusqu'à la rupture complète. C'est à peu près le mécanisme par lequel on rend compte des propriétés des corps explosifs.

Dans l'industrie métallurgique on prend un certain nombre de précautions pour diminuer la fragilité des pièces moulées et trempées, par exemple le recuit. Mais ce dernier procédé est inapplicable à la fonte qui passe presque directement de l'état liquide à l'état solide, sans transition appréciable par l'état pâteux. La fonte blanche principalement, très résistante aux efforts statiques, ne saurait être usinée à froid sans danger de rupture.

Pour les matériaux *fragiles*, qui n'ont généralement qu'une période très courte de semi-élasticité, il est donc nécessaire de se tenir notablement au-dessous de la limite d'élasticité.

Corps isotropes et hétérotropes. — On dit qu'un corps est isotrope quand il présente la même constitution dans toutes les directions autour d'un point. Dans le cas contraire on dit qu'il est hétérotrope. Tous les matériaux sont à quelque degré hétérotropes. Ceux qui, *a priori*, sembleraient devoir présenter une isotropie presque parfaite ont presque tous une structure, ou granuleuse, ou cristalline, ou schisteuse, ou bien présentent des plans de clivage ou des plans de lits qui sont l'indice d'une texture hétérotrope. Il n'y a que les corps fabriqués par voie de fusion, verre, laiton, acier moulé qui se rapprochent de l'isotropie parfaite. Pour les métaux laminés, la résistance et principalement la ductilité sont

plus grandes dans le sens du laminage que dans la direction perpendiculaire.

On peut tenir compte de ces circonstances dans l'art des constructions. Par exemple on évite de placer en délit les pierres schisteuses, mais on ne tient pas compte de ces considérations dans les calculs, car ce serait rendre ceux-ci inabordables. On suppose presque toujours l'isotropie.

Autres raisons d'adopter une limite de sécurité inférieure à la limite d'élasticité. — 1° Une première raison c'est qu'on est la plupart du temps imparfaitement renseigné sur la valeur numérique à attribuer à la limite d'élasticité pour une catégorie déterminée de matériaux.

Si la détermination de la limite d'élasticité d'un barreau de fer ou d'acier est un problème assez précis au moyen d'une série d'expériences de traction ou de compression, il n'en est pas de même pour d'autres matériaux, bois, fonte, matériaux pierreux, dont les déformations ne sont pas une fonction longtemps linéaire des efforts.

D'autre part, quand on passe d'un échantillon à un autre, on trouve des écarts souvent notables et sans cause bien marquée. Les chiffres fournis par une série d'expériences ne sont donc et ne peuvent être que des moyennes et il n'est jamais sûr que la matière employée sera conforme à cette moyenne.

Enfin, même avec une fabrication soignée et une mise en œuvre irréprochable, on n'est pas certain de pouvoir toujours éviter des défauts locaux de la matière, qui peuvent diminuer sa résistance et abaisser sa limite d'élasticité. Il faut donc par prudence considérer les indications fournies par les expériences de laboratoire comme des maxima dont on ne doit pas se rapprocher.

2° Les formules pratiques dont on se sert pour évaluer la fatigue des différents éléments d'une construction n'ont, comme nous le verrons, qu'une exactitude relative, et les résultats peuvent être entachés d'erreur dans une mesure souvent difficile à apprécier. Pour éviter tout mécompte, il est prudent, soit de majorer les taux de fatigue indiqués par le calcul, soit, ce qui revient au même, d'opérer une réduction équivalente sur la limite d'élasticité admise comme maximum.

3° Le moindre problème pratique est en général d'une telle complexité qu'il faut pour le résoudre en modifier et en simplifier les données, en écartant une foule de circonstances qu'on estime *a priori* ne pas devoir exercer d'influence sensible.

Avec le perfectionnement des méthodes, on tient compte aujourd'hui de bien des circonstances qu'autrefois on jugeait à tort négligeables, ou dont on était impuissant à apprécier les effets. Mais une grande prudence reste encore nécessaire.

4° Les formes des différents éléments d'une construction, leurs assemblages et leurs liaisons mutuelles ne correspondent jamais d'une façon rigoureuse aux données qu'on soumet au calcul. Il faut compter avec les sujétions d'ordre pratique qui ne permettent de réaliser que par à peu près l'ouvrage étudié.

5° Enfin le fer et l'acier sont sujets à la rouille qui corrode leurs surfaces et diminue les sections utiles des pièces métalliques. On a beau combattre cette cause de destruction par un entretien soigné, un ouvrage métallique perd tous les ans une partie de sa résistance et il serait voué à une ruine prochaine si l'on n'avait eu la prévoyance en l'établissant de lui donner un surcroît de solidité.

Pour tous ces motifs, il est bon, si l'on veut éviter toute éventualité de catastrophe et éviter un dépérissement rapide de la construction, de s'imposer l'obligation de ne pas dépasser une *limite de sécurité* très inférieure à la limite d'élasticité, qui n'en soit par exemple que le quart ou le tiers; telle est la règle appliquée au fer et à l'acier et à la plupart des métaux ductiles qui subissent une déformation plastique notable avant de se rompre et pour lesquels l'écart entre les limites d'élasticité et de rupture est notable.

Avec des matériaux très hétérogènes, ou très fragiles, ou offrant peu de résistance à l'extension, comme la fonte, le bois, les maçonneries, dont la limite d'élasticité est parfois mal définie, ou semble voisine de la limite de rupture, il convient de se montrer encore plus réservé. La limite de sécurité ne doit pas dépasser le $\frac{1}{20}$ ou tout au plus le $\frac{1}{10}$ de la limite de rupture, surtout quand il s'agit d'un travail à la compression pour lequel la limite en question est toujours imparfaitement connue, du moment qu'on s'écarte des conditions particulières dans lesquelles les expériences d'essai ont pu être faites.

CHAPITRE IV.

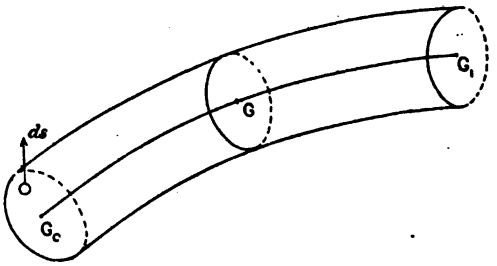
THÉORIE DES POUTRES PRISMATIQUES. DÉFINITIONS. RÉACTIONS DES APPUIS. FORCE EXTÉRIEURE RELATIVE A UNE SECTION.

DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DES POUTRES PRISMATIQUES.

Le principal problème qu'on ait à envisager dans les constructions et, par suite, dans la résistance des matériaux est celui des pièces ou poutres prismatiques dont la définition géométrique est la suivante :

Considérons un arc G_0G_1 d'une courbe plane ou gauche et considérons, d'autre part, une aire plane, fermée, évidée ou non, dont

Fig. 31.



le centre de gravité soit G. Puis supposons que cette aire, placée d'abord perpendiculairement à la courbe, de manière que G vienne en G_0, soit déplacée de telle sorte : 1° que son centre de gravité décrive la courbe G_0G_1 ; 2° que dans chacune de ses positions elle soit normale à la courbe ; 3° que les déplacements de chacun de ses points soient à chaque instant normaux à son plan et, par suite, parallèles à l'axe de la courbe G_0G_1. Le volume, ainsi engendré, sera ce qu'on appelle une *pièce prismatique*.

La courbe G_0G_1 s'appelle l'*axe longitudinal* de la pièce ou encore la *fibre moyenne* de cette pièce.

L'aire plane, génératrice du volume, s'appelle la *section trans-*

versale ou le *profil*. Dans les différentes positions qu'elle occupe elle porte aussi le nom de *section normale* de la pièce.

On appelle *fibre* de la pièce le volume engendré par un élément superficiel infiniment petit dS de la *section normale*.

On appelle *prisme élémentaire* le volume compris entre une section normale telle que G et une section normale infiniment voisine. On appelle de même *fibre élémentaire* la portion d'une même fibre comprise dans les limites d'un prisme élémentaire.

Cette définition, très générale, implique quelques restrictions :

1° Au point de vue purement géométrique, pour que le prisme entier puisse être considéré comme la réunion de tous les prismes élémentaires, il faut que les plans de deux sections normales successives se coupent suivant une droite extérieure à l'aire de la section. Cela écarte la possibilité de points anguleux pour la courbe G_0G_1. Cela conduit même à supposer que les dimensions de la section transversale sont petites par rapport aux rayons de courbure de G_0G_1.

2° Pour que nous puissions faire abstraction de la loi de répartition des forces extérieures, dans le cas où ces forces sont isolées ou bien réparties par groupes intéressant des régions isolées de la pièce, il est nécessaire que la longueur de cette pièce, ou la longueur de G_0G_1, soit grande relativement aux régions d'action des forces, c'est-à-dire qu'elle soit grande relativement aux dimensions de la section transversale.

3° Pour que la pièce ne soit pas *défigurée* par la déformation et pour qu'on puisse appliquer aux forces extérieures les équations de la statique sans tenir compte de cette déformation, il faut que la pièce ne soit pas trop grêle, et, par suite, que sa section transversale ne soit pas trop petite par rapport à sa longueur. Cette restriction est en sens inverse de la précédente. L'ensemble de ces restrictions montre que la section transversale doit être maintenue dans des limites convenables de grandeur relative par rapport à sa longueur et par rapport aux rayons de courbure de son axe longitudinal. Quand ces conditions ne sont pas remplies, les déductions tirées de la théorie de la Résistance des matériaux peuvent être suspectées d'inexactitude.

On n'a pas souvent, dans la pratique, à considérer des pièces prismatiques définies d'une manière aussi générale.

Souvent l'axe longitudinal de la pièce est une ligne droite. On a alors affaire à une *pièce droite* ou à une *poutre droite*.

Presque toujours l'axe longitudinal est tout au moins une ligne plane. On a alors affaire à une *poutre courbe*. Le plan qui contient l'axe longitudinal s'appelle le *plan moyen* de la poutre. La plupart du temps ce plan est un plan de symétrie de la poutre. Celle-ci est alors engendrée par un profil ayant un axe de symétrie et cet axe demeure dans le plan moyen lorsque le profil se déplace.

En revanche les poutres ne remplissent pas toujours en pratique les conditions qui viennent d'être supposées dans la définition des pièces prismatiques.

La plupart du temps la section transversale ne reste pas constante d'un bout à l'autre, elle varie progressivement. On a alors ce qu'on appelle une poutre à *section variable*. Si ces variations sont suffisamment lentes et au total peu considérables, on conçoit que les procédés de calcul applicables aux poutres parfaites demeurent encore admissibles à titre d'approximation. On suppose alors que chaque élément dS de la section est lui-même variable, et l'on appelle encore *fibre* le petit volume engendré par cet élément variable.

Parfois aussi au lieu de poutres homogènes, c'est-à-dire composées d'un seul matériau ayant partout le même coefficient d'élasticité, on envisage des poutres hétérogènes dont les différentes fibres sont formées de matériaux différents. C'est le cas des poutres en ciment armé dont les applications se développent de plus en plus. On est alors conduit à substituer aux éléments réels dS' de l'aire de la section transversale des éléments fictifs $dS = m\,dS'$ obtenus en multipliant les aires réelles dS' par des coefficients convenables, théoriquement proportionnels aux coefficients d'élasticité des différents matériaux. Si les variations de forme et de composition de la section sont suffisamment lents, on aura une première approximation tout au moins en substituant la pièce fictive homogène, et de section variable, à la pièce réelle.

Hypothèses et définitions relatives aux forces appliquées et aux réactions d'appui. — Nous ne considérerons dans ce qui suit que des

poutres à plan moyen et nous supposerons que toutes les forces appliquées sont parallèles à ce plan moyen et symétriques par rapport à ce plan qui sera pris pour plan Oxy. Nous restreignons ainsi la généralité du problème dans un but de simplification. Mais cela n'entraîne à aucun inconvénient réel, car les circonstances contraires ne se rencontrent qu'à titre tout à fait exceptionnel. Cela revient d'ailleurs à éliminer les phénomènes de torsion dont l'étude relève de la théorie de l'Élasticité.

Les forces appliquées à la poutre sont les données primitives du problème. Elles sont appliquées soit aux éléments de volume, soit à des éléments de surface.

Les premières sont exclusivement celles qui proviennent de la pesanteur. Si l'on considère toutes celles qui intéressent un prisme élémentaire, de longueur ds, on peut les remplacer logiquement par leur résultante, proportionnelle à ds, contenue dans le plan moyen, et rencontrant la fibre moyenne au milieu de ds. L'ensemble de ces résultantes élémentaires équivaut à une charge continue appliquée aux différents points de la fibre moyenne, un élément ds supportant une charge $p\,ds$, de direction constante, et dont l'intensité p peut être variable d'un point à l'autre, si la section transversale est variable.

Quant aux forces appliquées à des éléments de surface, on peut grouper d'une façon analogue toutes celles qui sont appliquées aux prismes élémentaires successifs. Pour un prisme élémentaire déterminé, correspondant à l'élément ds, on peut les remplacer : 1° par leur résultante de translation ; 2° par leur moment résultant pris par rapport au milieu de ds. Dans les circonstances supposées, la résultante de translation sera contenue dans le plan moyen et l'ensemble de ces résultantes équivaudra à une charge continue de la forme $p\,ds$, d'intensité variable et de direction pouvant être également variable. Le moment résultant sera perpendiculaire au plan moyen. Il pourra être négligé quand les forces appliquées seront perpendiculaires à la fibre moyenne, car il est alors de l'ordre de grandeur de $p\,ds^2$. On peut encore faire la réduction d'une manière un peu différente, en observant qu'on peut d'abord grouper deux à deux les charges symétriques par rapport au plan moyen, ce qui conduit à un ensemble de charges contenues dans ce plan. On peut alors les réduire à une force unique que l'on conservera rattachée

au prisme élémentaire, ou bien à l'élément ds, et on lui attribuera comme point d'application le point $(\alpha\beta)$ où elle rencontre la normale à la fibre moyenne menée par le milieu de ds. L'ensemble des points $(\alpha\beta)$ peut former une courbe distincte de la fibre moyenne, mais elle peut, la plupart du temps, être confondue avec elle. Nous supposerons toujours qu'il en est ainsi.

On considère souvent des forces finies appliquées en des points de la surface. C'est le cas limite du précédent, quand on fait tendre vers zéro la région d'application d'un ensemble de forces. En réalité cette région n'a jamais une étendue nulle et il faut même veiller avec soin dans les constructions à ce que cette étendue demeure toujours suffisante pour que l'intensité des efforts par unité de surface ne dépasse pas certaines limites dépendant de la nature de la matière considérée. Quoi qu'il en soit, lorsqu'on envisage des forces finies appliquées en certains points de la surface, on peut, en suivant les mêmes principes, les remplacer par des forces appliquées en des points de la fibre moyenne et par des moments perpendiculaires au plan moyen, ou bien encore par des forces appliquées en des points $(\alpha\beta)$ du plan moyen.

La fiction analytique de forces finies appliquées en des points déterminés est avantageuse pour les raisonnements et surtout pour les déterminations graphiques, et nous parlerons souvent de charges à répartition continue, comme si elles étaient réunies en groupes plus ou moins importants, dont on considérera seulement les résultantes appliquées en des points du plan moyen.

Ainsi, en résumé, le système des forces appliquées pourra toujours être ramené à un système de forces contenues dans le plan moyen. Ce système de forces a, en général, une résultante unique et il en est de même de tout groupe partiel de ces forces.

Nous pourrons même supposer généralement que toutes les forces appliquées sont parallèles à une même direction. On peut toujours, en effet, supposer chacune d'elles décomposée suivant deux directions arbitraires, une horizontale et une verticale par exemple, puis étudier à part l'effet des composantes verticales et celui des composantes horizontales, et enfin faire la somme des résultats, en vertu du principe général de superposition, ou loi de Hooke.

Les réactions des appuis ne sont pas, comme les charges appliquées, des données du problème. On peut, dans certains cas, comme

nous le verrons, déterminer leurs résultantes, c'est-à-dire les forces et moments équivalents, par les seules équations de la statique. Mais leur répartition réelle demeurera généralement inconnue tant qu'on ne fera pas intervenir les propriétés élastiques de la matière. On les considérera donc généralement comme des forces finies, pouvant être remplacées, elles aussi, par des forces appliquées aux points de la fibre moyenne qui correspondent aux appuis et par des couples de moment perpendiculaire au plan moyen, ou bien encore par des forces appliquées dans le plan moyen à des points plus ou moins éloignés des points théoriques d'appui.

Énumération des différents problèmes qui se posent à propos des poutres prismatiques. — Les forces appliquées étant données, ainsi que la forme géométrique de la poutre, et la nature de ses appuis, ou supports, voici un aperçu sommaire des questions à résoudre, pour servir de plan général dans les développements qui vont suivre.

1° En premier lieu il faut rechercher les valeurs des réactions des appuis, lesquelles font équilibre aux forces appliquées. Dans certains cas on peut, comme nous l'avons déjà dit, les déterminer immédiatement en faisant intervenir seulement les équations de la statique. Mais dans beaucoup d'autres cas cette détermination n'est possible qu'en faisant intervenir aussi des conditions spéciales tenant compte de la nature des appuis, conditions qui sont généralement liées aux déformations prises par la poutre. Les réactions des appuis dépendent donc alors des hypothèses qui seront faites plus loin au sujet de ces déformations.

2° Les réactions d'appui étant connues, ou supposées connues, il faut rechercher comment peut être assuré l'équilibre, non plus seulement de la poutre entière, mais des différents tronçons qu'on peut obtenir en coupant la poutre par une section normale variable telle que G.

Une semblable section divise la poutre en deux tronçons distincts, le tronçon de gauche compris entre G_0 et G, et celui de droite compris entre G et G_1.

Il faut donc d'abord savoir faire la composition ou la réduction de toutes les forces agissant sur ces tronçons, y compris les réac-

tions des appuis s'il y a lieu. Puisque la poutre entière est en équilibre, le système des forces agissant sur le tronçon de gauche est équivalent et de signe contraire à celui des forces agissant sur le tronçon de droite. Ils ont des résultantes de translation égales et opposées et des moments résultants égaux et de signe contraire. Il suffit donc de considérer l'un des tronçons, celui de gauche, par exemple.

Le problème consiste alors, étant donné qu'il s'agit uniquement de forces contenues dans le plan moyen, de trouver la force unique équivalente à l'ensemble des forces agissant sur le tronçon de gauche. Cette force unique sera appelée la *force extérieure* agissant sur le tronçon, ou bien la force extérieure relative à la section G limitant ce tronçon. Elle sera généralement définie par deux composantes suivant des axes déterminés et par son moment pris par rapport au point G.

3° En général, la force extérieure agissant sur le tronçon de gauche ne sera pas nulle. L'équilibre du tronçon ne peut être assuré que si à travers la section G s'exercent des efforts élastiques intérieurs, représentant dans leur ensemble les actions exercées sur le tronçon de gauche par le tronçon de droite. Les actions exercées sur le tronçon de droite par le tronçon de gauche, égales et opposées aux précédentes, doivent donc former un système équivalent à la force extérieure agissant sur le tronçon de gauche.

La résolution du problème précédent fait donc connaître la résultante de translation et le moment résultant, par rapport au point G, des actions exercées par le tronçon de gauche sur le tronçon de droite. Le problème qui se pose alors est de savoir comment sont distribuées ces actions dans toute l'étendue de la section transversale G. C'est là que devra intervenir une hypothèse appropriée, la Mécanique générale ne pouvant rien enseigner au sujet de cette distribution, puisqu'elle admet l'équivalence de tous systèmes de forces ayant même résultante et même moment résultant.

4° Enfin, supposant connus les efforts qui s'exercent à travers deux sections infiniment voisines G et G', comprenant entre elles un élément ds de la fibre moyenne, et, par suite, un prisme élémentaire de longueur ds, la quatrième question consistera à rechercher comment se déforme ce prisme élémentaire, autrement dit

comment sera modifiée la position relative des deux sections G et G'.

On pourra en déduire la déformation d'ensemble d'un tronçon fini de la poutre et celle de la poutre tout entière.

Là encore le recours à l'hypothèse paraît indispensable.

Considérations sur la recherche des réactions des appuis. — Une réaction d'appui fait intervenir dans le cas le plus général trois inconnues distinctes, savoir ses deux composantes et son moment par rapport au point d'appui. D'autre part, dans les conditions où nous nous sommes placés, toutes les forces appliquées étant supposées dans le plan moyen de la poutre, les équations d'équilibre fournies par la statique se réduisent à trois. Par suite, ces équations ne sauraient, en général, suffire à déterminer les réactions d'appui, dès que le nombre des appuis est supérieur à un. Mais, en restreignant le mode d'action de certains appuis on peut encore résoudre le problème quand leur nombre ne dépasse pas deux, ou même trois.

Si l'on admet, par exemple, que la réaction d'un appui, supposé bien entendu réduit à un point, passe par ce point et a une direction obligée, cette réaction se trouve définie par une seule quantité, qui est sa grandeur. On peut alors résoudre le problème pour trois appuis de cette espèce.

Si l'on suppose un appui tel que la réaction passe simplement par l'appui, sans que sa direction soit imposée, la réaction correspondante introduit deux inconnues, savoir ses deux composantes. Si l'on a un appui de cette espèce et un appui de l'espèce précédente, le problème sera encore résoluble.

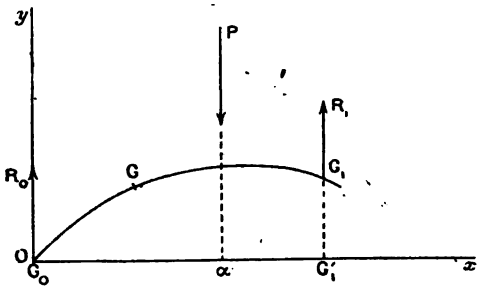
Le cas de beaucoup le plus intéressant est le suivant : supposons que toutes les forces appliquées P soient parallèles entre elles et que les appuis de la poutre soient au nombre de deux seulement, G_0 et G_1, et qu'ils soient disposés de telle façon que les réactions correspondantes R_0 et R_1 passent nécessairement par G_0 et G_1 respectivement et aient même direction que les forces appliquées.

Prenons comme axes coordonnés les deux droites passant par G_0 et respectivement perpendiculaire et parallèle aux forces appliquées. Soit l la projection de G_0G_1 sur Ox et soit, d'une manière générale, α l'abscisse de la ligne d'action de la force P.

Les équations d'équilibre statique se réduisent à deux, car les

composantes de toutes les forces suivant Ox sont nulles. On les écrira en prenant les moments successivement par rapport à G_1

Fig. 32.



et G_0 et en convenant de compter comme positives les charges P dirigées en sens inverse de Oy :

$$R_0 l - \Sigma P(l - \alpha) = 0,$$
$$R_1 l - \Sigma P \alpha = 0,$$

d'où l'on tire

$$R_0 = \sum \frac{P(l-\alpha)}{l},$$
$$R_1 = \sum \frac{P\alpha}{l}.$$

Ces formules sont tout à fait générales, quelles que soient les dispositions respectives des lignes d'action des forces par rapport aux verticales des appuis G_0 et G_1. En outre, elles sont indépendantes de la forme de la fibre moyenne.

Lorsque nous aurons une poutre ainsi disposée, nous dirons pour abréger qu'elle repose sur deux *appuis simples* ou *statiques*, et bien que ce soient là des circonstances assez particulières, on peut en tirer un parti très utile pour la théorie générale.

Supposons maintenant que l'on ait une poutre quelconque reposant sur un nombre d'appuis quelconque, les appuis G_0 et G_1 étant deux appuis consécutifs limitant ce que l'on appelle l'une des *travées* de la poutre. Les charges sont supposées toutes parallèles à une direction fixe, qui sera prise pour axe des y.

On pourra commencer par faire l'étude de la poutre comme si elle reposait sur les deux seuls appuis G_0 et G_1, et comme si ceux-ci étaient des appuis *simples* donnant lieu à des réactions

passant par G_0 et G_1 et parallèles à Oy. On pourra même ne considérer que les charges appliquées à la travée G_0G_1 comme si cette travée était séparée du reste de la poutre, et l'on pourra enfin supposer que cette travée se confonde avec la poutre droite ayant comme fibre moyenne la projection $G_0G'_1$ de G_0G_1 sur l'axe des x. Dans ces conditions, on trouvera deux réactions R_0 et R_1 parfaitement déterminées, qu'on pourra appeler les *réactions provisoires* des appuis G_0 et G_1. Elles différeront évidemment des réactions réelles; mais elles sont telles cependant que, jointes aux charges appliquées à la travée, elles maintiennent celle-ci en équilibre.

Dès lors, il s'agit de rechercher les réactions complémentaires qui proviennent : d'une part, des tronçons de la poutre supprimés de chaque côté de la travée considérée; et d'autre part, de la nature réelle des appuis G_0 et G_1, s'il y a lieu. Quelle que soit la cause à laquelle sont dues ces réactions complémentaires, elles doivent constituer à elles seules un système en équilibre. Elles seront donc constituées, dans le cas général, par deux forces égales et directement opposées.

La force qui représente la réaction complémentaire de l'appui de gauche G_0 sera définie, par exemple, par ses deux composantes B et C suivant Oy et Ox, et par son moment A pris par rapport à l'origine des coordonnées.

Les trois inconnues A, B et C ainsi introduites dépendent évidemment du système d'axes coordonnés choisi. Quand on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, B et C demeurent les mêmes et A seul change. Quand on modifie la direction des axes sans changer l'origine, A ne change pas, mais les composantes B et C sont naturellement modifiées.

L'utilité de cette transformation apparaîtra mieux par la suite. Mais un de ses avantages essentiels est le suivant.

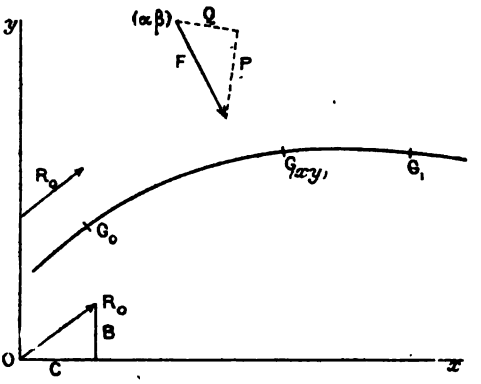
Les réactions complémentaires peuvent être considérées comme des forces appliquées après coup à la travée, celle-ci étant d'abord en équilibre sur ses deux appuis simples. Elles sont donc indépendantes en quelque sorte des charges appliquées ou correspondent à une modification apportée ultérieurement à la nature des appuis. Dans beaucoup de problèmes, on peut donc et l'on doit même les traiter comme des variables indépendantes, au même titre que les charges appliquées à la travée. Il n'en serait pas de

même des réactions provisoires d'appui, ni de toutes les composantes des réactions réelles des appuis.

Recherche de la force extérieure relative à une section donnée G. Formules diverses concernant ses composantes. — Plaçons-nous d'abord dans le cas général où les forces appliquées sont de directions quelconques, mais contenues bien entendu dans le plan moyen.

Soit G la section pour laquelle on cherche la force extérieure. Celle-ci sera définie par ses deux composantes X et Y et par son

Fig. 33.



moment M_z pris par rapport au point G. Au lieu du moment M_z, il est d'usage, en Résistance des matériaux, de considérer le moment $M = -M_z$ que l'on appelle le *moment fléchissant*. Cela revient à considérer comme positifs les moments qui tendent à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre les points d'application des forces autour du centre des moments.

Soit R_0 la réaction qui s'exerce sur le tronçon G_0G_1 à travers la section origine passant par G_0. Cette réaction sera soit la réaction de l'appui G_0, soit celle de la portion de poutre située à gauche de G_0. Appelons A son moment par rapport à l'origine des coordonnées, B et C ses composantes suivant Oy et Ox.

Soit, d'autre part, F l'une quelconque des forces appliquées depuis G_0 jusqu'à G. Soient Q et $-P$ ses composantes suivant Ox et Oy respectivement, et soit $(\alpha\beta)$ son point d'application, qui sera situé ou non sur la fibre moyenne.

Désignons par $\sum_g$ une sommation s'appliquant à l'ensemble des forces F agissant entre G_0 et G. En mettant à part les termes qui proviennent de R_0, nous aurons les relations évidentes qui suivent :

$$(1)\quad \begin{cases} X = C + \sum_g Q, \qquad Y = B - \sum_g P. \\ M = -M_z = A + Bx - Cy + \sum_g [Q(\beta - y) + P(\alpha - x)], \end{cases}$$

en désignant par (x, y) les coordonnées du point G.

Ces relations sont tout à fait générales. Au lieu de considérer des forces isolées, on peut considérer des forces à répartition continue *le long de la fibre moyenne*. Si, à un élément $d\sigma$ de celle-ci, on suppose attachée une force dont les composantes soient $q\,d\sigma$ et $-p\,d\sigma$, il suffira d'écrire à la place du symbole $\sum_g$ les intégrales définies prises entre les limites qui correspondent à G_0 et à G. On aura donc les formules

$$(2)\quad \begin{cases} X = C + \int_{s_0}^{s} q\,d\sigma, \qquad Y = B - \int_{s_0}^{s} p\,d\sigma, \\ M = A + Bx - Cy + \int_{s_0}^{s} q(\beta - y)\,d\sigma + \int_{s_0}^{s} p(\alpha - x)\,d\sigma. \end{cases}$$

Les expressions trouvées pour M peuvent évidemment s'écrire en abrégé

$$M = A + Bx - Cy + m,$$

en désignant par m le moment par rapport au point G des seules forces appliquées au tronçon G_0G. L'ensemble des autres termes, provenant de la réaction R_0 relative au point arbitraire G_0, est une fonction linéaire en x et y, et l'on a cet énoncé fréquemment appliqué : *Le moment fléchissant en un point quelconque* G *de la fibre moyenne est, à une fonction linéaire près des coordonnées de ce point, égal au moment des forces directement appliquées à la poutre entre* G *et un point arbitraire* G_0 *pris à sa gauche.*

Dans le cas des charges isolées, cas auquel s'appliquent les for-

mules (1), on reconnaît que, pour tout point $G(xy)$ situé dans l'intervalle de deux charges successives, *les composantes* X *et* Y *de la force extérieure sont des constantes et que le moment fléchissant* M *est une fonction du premier degré en* x *et* y. Pour un point G qui correspondrait au point d'application d'une charge, de composantes Q et $-$P, les composantes X et Y subissent des discontinuités égales à Q et $-$P respectivement. Quant à M, il subit une discontinuité égale à $Q(\beta-y)+P(\alpha-x)$, qui représente le moment de la charge considérée par rapport au point de la fibre moyenne auquel cette charge est supposée attachée. Ce moment peut être différent de zéro dans le cas général. Mais, si toutes les charges sont supposées appliquées aux points de la fibre moyenne, on a $\alpha = x$ et $\beta = y$, et dans ce cas M reste continu. Tous ces résultats sont évidents.

On vérifie également que l'on a les deux relations suivantes :

$$(3) \qquad X = -\frac{dM}{dy}, \qquad Y = \frac{dM}{dx},$$

de sorte qu'on peut dire que la recherche de la force extérieure se ramène à celle du moment fléchissant, étant donné que X et Y s'expriment en fonction des dérivées partielles de M.

Passons maintenant au cas de charges à répartition continue. Les trois fonctions X, Y et M seront des fonctions continues de x et y, qui dépendront évidemment des relations existant entre pq et $\alpha\beta$. Les relations (3) subsisteront, dans les conditions où nous nous sommes placés. En effet, en différentiant par exemple l'expression de M par rapport à x, on trouve

$$\frac{dM}{dx} = B - \int_{s_0}^{s} p\, d\sigma = Y.$$

A la vérité, il faudrait ajouter à l'expression de $\frac{dM}{dx}$ deux termes provenant de la différentiation des intégrales par rapport à leur limite supérieure s, laquelle dépend de x, et multiplier ces termes par $\frac{ds}{dx}$. Ces termes seraient

$$[q(\beta-y)+p(\alpha-x)]\frac{ds}{dx},$$

α et β représentant le point d'application de la force infiniment

petite qui correspond à l'élément $d\sigma$ auquel appartient le point (x, y). Ces termes sont donc rigoureusement nuls quand on suppose le point $(\alpha\beta)$ confondu avec le point correspondant (x, y) de la fibre moyenne, ainsi qu'on le fait toujours.

En outre, dans le cas des charges à répartition continue, les deux premières relations (2) conduisent aux deux suivantes :

$$(4) \qquad q\frac{ds}{dy} = \frac{dX}{dy} = -\frac{d^2M}{dy^2} \qquad \text{et} \qquad p\frac{ds}{dx} = -\frac{dY}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2}.$$

La seconde relation (4) est assez fréquemment employée, car on suppose souvent des charges à répartition continue parallèles à Oy. Alors, $q = 0$ et $p\frac{ds}{dx}$ représente la charge par mètre courant en projection horizontale.

Au lieu des composantes X et Y de la force extérieure par rapport aux axes de coordonnées, on a souvent intérêt à considérer, quand il s'agit de poutres courbes, ses deux composantes N et T suivant la tangente et la normale à la fibre moyenne au point G. La composante N porte le nom d'*effort normal* et la composante T porte le nom d'*effort tranchant*.

Les cosinus directeurs de la tangente sont $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$. Ceux de la normale positive (direction qui coïncide avec Oy quand on amène la tangente à coïncider avec Ox) sont $-\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$. On a donc les deux relations générales

$$(5) \qquad \begin{cases} N = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds}, \\ T = -X\frac{dy}{ds} + Y\frac{dx}{ds}. \end{cases}$$

Si l'on y introduit les valeurs de X et Y tirées des relations (3), on trouve, en fonction des dérivées partielles du moment fléchissant,

$$(6) \qquad \begin{cases} N = -\frac{dM}{dy}\frac{dx}{ds} + \frac{dM}{dx}\frac{dy}{ds}, \\ T = \frac{dM}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dM}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{dM}{ds}. \end{cases}$$

La dernière formule est importante. Elle exprime *que l'effort*

tranchant est la dérivée du moment fléchissant prise par rapport à l'arc de la fibre moyenne.

Restreignons maintenant le problème au cas où toutes les forces appliquées (ou charges) sont parallèles à une même direction, prise pour axe Oy, et supposons d'abord que les deux points G_0 et G_1 sont des *appuis simples*, ou statiques, au sens qui a été précédemment donné à cette expression. Les réactions provisoires (ou définitives, suivant le cas) seront, comme nous l'avons vu,

$$R_0 = \Sigma P \frac{(l-\alpha)}{l},$$

$$R_1 = \Sigma P \frac{\alpha}{l}$$

(en se rappelant que P est égale et de signe contraire à la composante de la force suivant la direction positive Oy).

Dans ces conditions, on a

$$X = 0 \qquad \text{et} \qquad Y = R_0 - \sum_g P$$

avec

$$M = R_0 x - \sum_g P(x-\alpha) = \mu.$$

Nous désignerons généralement par la lettre μ le moment fléchissant relatif à une poutre sur appuis simples, qui jouera un rôle important dans toutes les applications. Ce moment s'annule évidemment pour $x = 0$, car alors $\sum_g = 0$. Il s'annule aussi pour $x = l$, en vertu de la formule qui donne R_0, les deux symboles $\sum_g$ et $\sum$ étant alors équivalents.

Il est intéressant d'apprendre à composer le moment fléchissant μ d'après la situation respective des charges et de la section G. Nous considérerons en même temps la composante Y de la force extérieure, qui est toujours égale à $\frac{d\mu}{dx}$ en vertu de la seconde équation (3).

Considérons une charge isolée P d'abscisse α. On a dans tous les cas

$$R_0 = P \frac{l-\alpha}{l},$$

ce résultat ne dépendant pas évidemment de la situation du point G. Mais pour évaluer μ et $Y = \frac{d\mu}{dx}$, il faut distinguer deux cas :

1° Si P est à gauche de G, c'est-à-dire si $\alpha < x$, on a

$$Y = R_0 - P = P\frac{l-\alpha}{l} - P = -P\frac{\alpha}{l},$$
$$\mu = R_0 x - P(x-\alpha) = P\frac{\alpha(l-x)}{l};$$

2° Si P est à droite de G, c'est-à-dire si $\alpha > x$, on a

$$Y = R_0 \quad = P\frac{(l-\alpha)}{l},$$
$$\mu = R_0 x = P\frac{l-\alpha}{l}x.$$

Dans le cas général, en désignant par $\sum_g$ une sommation s'étendant aux charges agissant à gauche de G, et par $\sum_d$ une sommation s'étendant aux charges agissant à droite, on obtiendra

$$(8)\qquad \begin{cases} Y = -\sum_g P\frac{\alpha}{l} + \sum_d P\frac{l-\alpha}{l}, \\ \mu = \quad \sum_g P\frac{\alpha(l-x)}{l} + \sum_d P\frac{(l-\alpha)x}{l}. \end{cases}$$

Si l'on a affaire à une charge à répartition continue et telle que, sur un intervalle infiniment petit $d\alpha$, compris entre les abscisses α et $\alpha + d\alpha$, la résultante des charges soit $p\,d\alpha$, on aura de même, en remplaçant $\sum_g$ et $\sum_d$ par les intégrales $\int_0^x$ et $\int_x^l$ (l'origine des coordonnées étant supposée sur la verticale de G_0),

$$(8')\qquad \begin{cases} Y = \frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{l}\int_0^x p\alpha\,d\alpha + \frac{1}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha, \\ \mu = \frac{l-x}{l}\int_0^x p\alpha\,d\alpha + \frac{x}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a évidemment

$$R_0 = \int_0^l p \frac{l-\alpha}{l} d\alpha.$$

On remarquera en passant que ces dernières formules donnent encore

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -\frac{px}{l} - \frac{p(l-x)}{l} = -p.$$

L'intensité d'une charge p à répartition continue sur l'horizontale est égale et de signe contraire à la dérivée seconde du moment fléchissant.

Conservons maintenant l'hypothèse que toutes les forces appliquées sont parallèles, mais supposons que les appuis deviennent quelconques.

A la réaction *provisoire* R_0, obtenue dans le cas d'appuis simples, il faudra substituer une autre réaction, ou autrement dit ajouter une réaction *complémentaire*. Si l'on appelle A le moment de cette réaction complémentaire par rapport à l'origine des coordonnées, par B et C ses composantes suivant Oy et Ox, on aura évidemment, pour le moment fléchissant réel au point G,

$$M = \mu + A + Bx - Cy.$$

Autrement dit, $M - \mu$ *est toujours une fonction linéaire des coordonnées du point* G, tout comme la différence $M - m$ considérée plus haut.

On en déduit

$$X = -\frac{dM}{dy} = C,$$

$$Y = \frac{dM}{dx} = \frac{d\mu}{dx} + B.$$

Toutes les fonctions linéaires de M, X, Y sont donc des fonctions linéaires de A, B, C.

Détermination graphique de la force extérieure quand les réactions d'appui sont connues. — Considérons le tronçon de poutre G_0G_1 et une section G intermédiaire.

Soient (A), (B), (C), (D), ... les lignes d'action des forces appliquées entre G_0 et G_1, et (R_0) celle de la réaction qui s'exerce

à travers la section G_0 et qui est, à proprement parler, la force extérieure relative à la section G_0, ou, si G_0 est un appui, la force extérieure relative à une section située à une distance infiniment

Fig. 35.

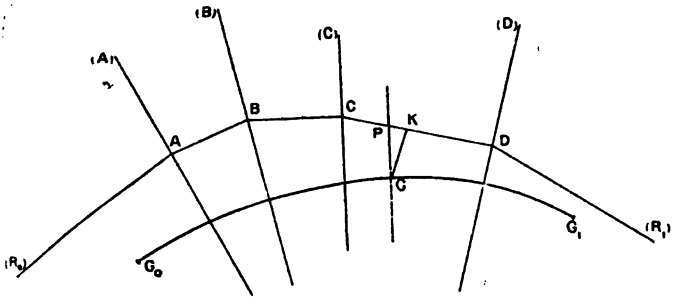
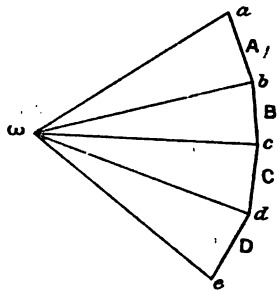


Fig. 36.



petite à droite de G_0. Les grandeurs de toutes ces forces sont supposées connues.

Composons par un procédé quelconque R_0 avec les forces A, B, C, ... successivement rencontrées quand on parcourt la fibre moyenne de la poutre en allant de G_0 en G_1. Nous obtiendrons évidemment de proche en proche les lignes d'action et aussi les grandeurs successives de la force extérieure pour les différentes sections transversales. Par exemple, la force extérieure, relative à la section G comprise entre (C) et (D), sera la résultante de R_0 avec A, B, C.

Le procédé de composition le plus simple peut se traduire de la façon suivante dans le langage de la statique graphique :

Formons le polygone des forces appliquées, en a, b, c, d, e et traçons un vecteur $a\omega$ égal à R_0 changé de signe, de sorte que $\omega a = R_0$. Les différentes résultantes que l'on aura successivement à considérer sont évidemment représentées en grandeur et direction par les rayons vecteurs tels que ωa, ωb, ωc, etc.

Cela fournit immédiatement les efforts normaux et les efforts tranchants aux différents points de la poutre. Pour la section G, par exemple, la force extérieure étant ωc, il suffit de décomposer cette force suivant les directions de la tangente et de la normale en G à la fibre moyenne pour avoir l'effort normal et l'effort tranchant relatifs à cette section.

Si, en considérant ω comme un pôle, on trace le polygone funiculaire des forces appliquées, en ayant soin de faire coïncider son premier côté avec la ligne d'action (R_0), les côtés successifs de ce polygone funiculaire seront les lignes d'action de la force extérieure dans les intervalles successifs des forces appliquées. On ne fait pas autre chose, en effet, que d'appliquer méthodiquement le procédé ordinaire de composition des forces. Pour la section G, comprise entre les forces appliquées (C) et (D), la ligne d'action de la force extérieure est la droite CD et le point du passage de cette force extérieure est le point P, sur la normale à la fibre moyenne.

Le polygone funiculaire particulier, que l'on a ainsi tracé, porte le nom de *polygone des pressions*. Dans le cas où l'on aurait un système de forces appliquées, réparties d'une manière continue sur la fibre moyenne, ce polygone se transformerait en une courbe appelée *courbe des pressions*.

La connaissance du point de passage P de la force extérieure équivaut, comme nous l'avons vu, à celle du moment fléchissant. Celui-ci est égal soit au produit de la force $R = \omega c$ par la distance GK de G à CD, soit encore au produit de l'effort normal N, précédemment déterminé, par la distance GP.

Lorsque toutes les forces appliquées sont parallèles, verticales pour fixer les idées, mais sans que (R_0) leur soit parallèle, on peut faire les remarques intéressantes suivantes :

1° Le polygone des forces appliquées se réduit à une verticale *ae* et la force extérieure a une composante horizontale X de grandeur constante, qui est représentée par la distance polaire, distance du pôle ω à la verticale *ae*.

2° Si l'on détermine le point H où la verticale de G rencontre le polygone des pressions, on peut en ce point décomposer la force extérieure R, en ses deux composantes X et Y, de telle sorte que son moment au point G, ou moment fléchissant, apparaîtra comme le produit de X par la distance GH. Or, X étant constant, le moment fléchissant sera donc en chaque point proportionnel au segment GH, compté sur une ligne de rappel verticale, entre la fibre moyenne et le polygone des pressions. De là cet énoncé : *Le polygone des pressions, rapporté à la fibre moyenne de la pièce comme ligne de référence, est une ligne représentative du moment fléchissant.*

Cas particulier d'une poutre sur appuis simples et généralisation. — Soit une poutre G_0G_1 soumise à un ensemble de charges P_1, P_2, ... parallèles à Oy, ayant pour lignes d'action

Fig. 37.

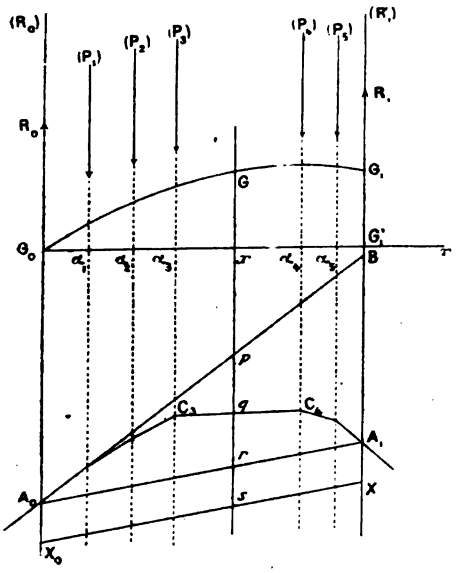
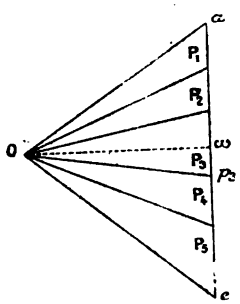


Fig. 38.



(P_1), (P_2), ... respectivement, et reposant sur les deux appuis simples G_0 et G_1. Les réactions R_0 et R_1 de ces appuis seront, par hypothèse, verticales, et auront pour lignes d'action (G_0) et (G_1).

Construisons le polygone des charges ae, puis traçons avec une distance polaire d, que, pour simplifier le langage, nous supposerons égale à l'unité, le polygone funiculaire des charges, sur le réseau des verticales (P), représentant leurs lignes d'action. Menons la corde ou ligne de fermeture A_0A_1 entre les verticales (G_0) et (G_1). Enfin, menons par le pôle o la droite $o\omega$ parallèle à A_0A_1. Nous aurons en $\overline{\omega a}$ la valeur de R_0 et en $\overline{e\omega}$ la valeur de R_1. Par suite, le polygone des forces, rapporté à ω comme origine, constituera l'échelle fonctionnelle de

$$Y = R_0 - \sum_x P.$$

D'un autre côté, nous avons vu que le polygone funiculaire,

rapporté à son premier côté, constitue la courbe représentative des moments des forces situées à gauche d'une verticale quelconque (G) d'abscisse x, à condition de compter ses coordonnées parallèlement à la direction des forces. Autrement dit, le segment pq mesuré sur la ligne de rappel du point G, d'abscisse x, représente le moment

$$m = \sum_{g} P(z - x)$$

(au facteur d près, bien entendu).

Quant au moment fléchissant μ, on l'obtiendrait évidemment en introduisant la réaction R_0 en tête de la série des forces agissant sur la poutre à partir de sa gauche. Cela revient à prendre pour premier rayon du polygone des forces le rayon $o\omega$, et comme premier côté du polygone funiculaire la droite A_1A_0, ou ligne de fermeture. Le polygone funiculaire, rapporté à sa ligne de fermeture, est donc la courbe représentative du moment μ.

On peut dire aussi que le polygone funiculaire peut représenter non seulement le moment m, mais toute fonction M, qui n'en diffère que par une fonction linéaire de la forme $A + Bx$.

En effet, si l'on a

$$M = m + A + Bx,$$

on n'a qu'à construire la droite XX telle que l'équation du premier côté A_0B soit précisément

$$y = A + Bx$$

quand on prend XX comme ligne de référence, ou bien, ce qui revient au même, telle que son équation rapportée à A_0B soit

$$y = -A - Bx.$$

En prenant XX comme ligne de référence, l'ordonnée oblique sq du polygone funiculaire donne bien la valeur de la fonction M.

Or on sait que μ ne diffère de m que par la fonction linéaire R_0x, et l'on sait d'avance qu'elle s'annule pour $x = 0$ et $x = l$. La ligne de référence correspondante ne saurait donc différer de A_0A_1.

Plus généralement, le polygone funiculaire pourra représenter le moment fléchissant réel M qui se produirait dans la poutre quand celle-ci, au lieu de reposer sur les deux appuis simples G_0

et G_1, reposera sur des appuis de nature quelconque, pourvu toutefois que les réactions n'introduisent pas des composantes parallèles à Ox, mais simplement des composantes parallèles à Oy et des moments quelconques. Dans ce cas, en effet, on aura toujours des relations de la forme

$$M = m + A + Bx$$

ou

$$M = \mu + A' + B'x.$$

Il suffira de déplacer la ligne de fermeture et de la faire passer par les points où M s'annule, si ces points peuvent être déterminés.

Nous remarquerons en terminant que le segment A_1B compté sur la verticale (G_1) représente le moment $\Sigma P(\alpha - l)$ de toutes les forces appliquées par rapport au point G_1. Il est donc égal aussi à lR_0, de sorte qu'il constitue une seconde représentation commode de la réaction R_0. On trouverait de la même façon R_1.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES POUTRES PRISMATIQUES (SUITE). RECHERCHE DES EFFORTS MOLÉCULAIRES. HYPOTHÈSES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

I. — Recherche des efforts moléculaires qui se produisent dans une section G quand la force extérieure relative a cette section est connue.

La force extérieure relative à la section G est définie par trois quantités M, N, T que nous avons appelées *moment fléchissant*, *effort normal* et *effort tranchant*, et nous avons dit que la force extérieure est égale à la résultante des actions moléculaires exercées par le tronçon de gauche sur le tronçon de droite à travers la section G. Ce sont là les seules indications que puisse donner la Mécanique rationnelle.

Pour se faire une idée de la nature de ces actions moléculaires ainsi que de leur répartition dans l'étendue de la section, il faut recourir à certaines hypothèses.

Nous verrons plus tard les hypothèses qui servent de base à la théorie de l'Élasticité et les hypothèses supplémentaires permettant de traiter un problème qui est fort analogue au problème actuel, et dont la solution est due à Barré de Saint-Venant. Pour le moment nous nous bornerons à énoncer d'autres hypothèses, à peu près équivalentes, qu'on peut estimer *a priori* suffisantes pour conduire à des résultats approchés et dont la principale justification consistera à dire que leurs conséquences se sont toujours trouvées d'accord avec les faits, dans les domaines où l'expérimentation a pu s'exercer.

Une première hypothèse consiste à admettre que les actions moléculaires dans la section G ne dépendent que de la force extérieure relative à cette section et s'annulent quand cette force extérieure devient nulle. Cela revient à admettre que la répartition

réelle des forces agissant sur le tronçon de gauche, forces appliquées, ou réactions d'appui, n'a aucune influence au delà des limites de ce tronçon, ou bien encore qu'un système de forces en équilibre et distribuées d'une manière quelconque sur un tronçon de poutre ne produit aucun effet en dehors de ce tronçon. Divers faits d'expérience confirment qu'il en est approximativement ainsi. Quand on serre une barre de métal dans un étau, ses déformations sont peu sensibles en dehors des régions directement pressées. Quand on pose une barre sur deux appuis et qu'on la charge entre ceux-ci, elle prend une courbure mesurable entre les appuis, mais au delà elle demeure rectiligne, etc.

Cela admis, on peut, en invoquant la loi de Hooke, étudier séparément les effets du moment fléchissant, de l'effort normal et de l'effort tranchant. Autrement dit les effets produits sont des fonctions linéaires et homogènes de ces trois quantités.

Une seconde hypothèse générale consiste à admettre que les actions moléculaires dans la section G ne dépendent pas de la courbure de la fibre moyenne de la pièce et qu'ils sont les mêmes que si cette fibre moyenne était localement supposée rectiligne ou encore prolongée en ligne droite au delà de la section. Bien entendu la forme courbe de la pièce conserve son influence pour la détermination de la force extérieure. On conçoit que cette hypothèse sera d'autant plus approchée que la courbure de la pièce sera plus faible, ou tout au moins que le rayon de courbure de la pièce sera plus grand par rapport aux dimensions transversales.

Enfin on a recours à des hypothèses plus particulières qu'on peut énoncer ainsi :

Sur chaque élément dS de la section peut s'exercer un effort moléculaire normal $n\,dS$ et un effort tangentiel $t\,dS$, proportionnels tous deux à dS, et dont les intensités respectives sont n et t par unité de surface.

1° Les efforts normaux n ne dépendent pas de l'effort tranchant T, et ils se répartissent dans l'étendue de la section suivant une loi linéaire. Si l'on place l'origine des coordonnées au point G, en faisant coïncider Ox avec la tangente à la fibre moyenne, et par suite le plan Oyz avec le plan de la section, et si l'on désigne par y, z les coordonnées du centre de l'élément dS, l'hypothèse

d'une répartition linéaire revient à admettre qu'on a

$$n = a + by + cz,$$

a, b, c étant des constantes à déterminer.

Si l'on considère la droite dont l'équation est

$$a + by + cz = 0,$$

n sera nul en tous les points de cette droite et en un point quelconque n sera proportionnel à sa distance à la droite. La droite en question porte le nom d'*axe neutre* et quand sa position est déterminée on peut écrire la relation

$$n = Kv,$$

v désignant la distance de l'élément dS à l'axe neutre et K un coefficient de proportionnalité à déterminer.

2° A l'égard de l'effort tangentiel t on admet au contraire qu'il ne dépend que de l'effort tranchant T, et qu'en chaque point il lui est parallèle. La loi de sa répartition se déduit d'une part de celle qui vient d'être admise pour l'effort normal n et d'autre part de la considération de certaines relations nécessaires entre les efforts qui s'exercent sur deux plans perpendiculaires dans un solide quelconque.

Cela posé nous allons passer en revue les effets de l'effort normal, du moment fléchissant et de l'effort tranchant, pris séparément, ainsi que l'effet d'un effort normal et d'un moment fléchissant combinés.

A. **Effort normal** N. — Considérons à la place de la poutre un tronçon de prisme droit ayant même section droite que la poutre et ses arêtes parallèles à Ox (deuxième hypothèse générale). Puis supposons que les deux bases de ce tronçon de prisme soient soumises à une compression *uniforme* de valeur n par unité de surface de telle sorte que

$$\Sigma n\, ds = nS = N.$$

Il est presque évident que, dans ces circonstances, chaque section transversale du prisme sera elle-même soumise à une *compression uniforme* de valeur

$$n = \frac{N}{S}.$$

Alors en vertu de la première hypothèse générale on peut admettre la même répartition uniforme quel que soit le système réel des forces appliquées produisant dans la section l'effort normal N.

Cette conclusion se trouve confirmée quand on admet l'hypothèse plus particulière d'une répartition linéaire de n dans la section considérée.

En effet, si n est de la forme

$$n = a + by + cz,$$

il faut, puisque le moment de la force extérieure est nul par rapport au point G, centre de gravité de la section, qu'on ait les deux relations

$$0 = \Sigma ny\, dS = b\Sigma y^2 ds + c\Sigma yz\, dS,$$
$$0 = \Sigma nz\, dS = b\Sigma yz\, ds + c\Sigma z^2 dS.$$

Il en résulte $b = c = 0$, de sorte que n se réduit à une constante, forcément égale à $\frac{N}{S}$.

B. **Moment fléchissant** M. — Si l'on considère encore un tronçon de prisme droit substitué à la poutre, il suffira encore de rechercher un mode de répartition de forces extérieures appliquées à ses bases équivalant au moment fléchissant M. Le plus simple consisterait dans un mode de répartition linéaire et l'on pourrait encore admettre que cette répartition se conserve sur toutes les sections intermédiaires entre les deux bases. Mais cela revient à admettre tout de suite une répartition linéaire dans la section considérée.

Pour simplifier nous supposerons qu'on ait fait un changement d'axes dans la section, de manière à faire coïncider Oz et Oy avec les axes principaux de l'ellipse centrale d'inertie.

Soient

$$I_z = Sr_z^2,$$
$$I_y = Sr_y^2,$$

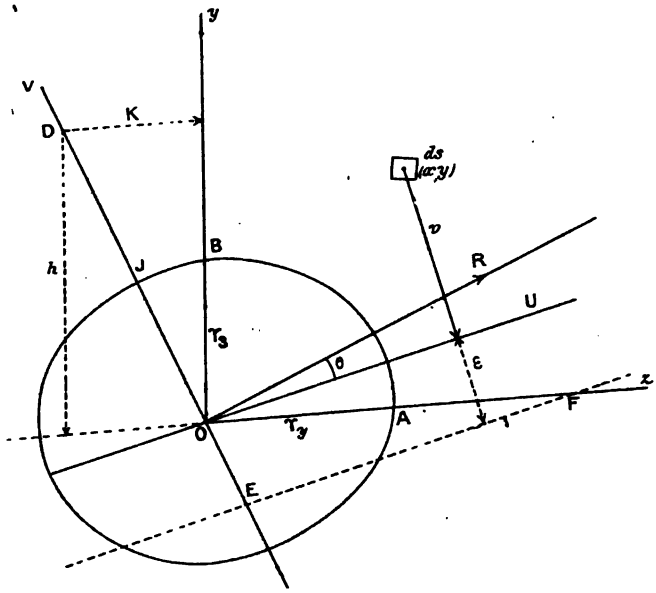
les moments principaux d'inertie, de sorte que l'équation de l'ellipse d'inertie pourra s'écrire

$$\frac{Z^2}{r_y^2} + \frac{Y^2}{r_z^2} = 1,$$

l'axe OA étant égal à r_y et l'axe OB à r_z.

Soient dans ce système d'axes OV la trace du plan moyen et OR le moment fléchissant M dont la direction est perpendiculaire à OV.

Fig. 39.



Décomposons M suivant Oz et Oy et désignons par M_z et M_y ses composantes.

Admettons maintenant que l'effort moléculaire normal ait pour expression

$$n = a + by + cz$$

et comptons-le positivement en avant du plan du tableau, dans la direction de Ox, c'est-à-dire *quand il représente une compression.* Les conditions à remplir sont les suivantes :

$$\Sigma n\, dS = 0,$$
$$\Sigma ny\, dS = M_z,$$
$$\Sigma nz\, dS = -M_y.$$

(Le signe — devant M_y vient de ce qu'un effort positif appliqué à un élément dS situé du côté des z positifs donnerait un moment dirigé suivant Oy'.)

Introduisons dans ces relations la valeur de n et développons

en tenant compte des relations

$$\Sigma z\, dS = 0, \qquad \Sigma y\, dS = 0, \qquad \Sigma xy\, dS = 0,$$

qui expriment que O est le centre de gravité de la section et que Oz et Oy sont les axes principaux de l'ellipse centrale d'inertie. Nous trouverons d'abord

$$aS = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a = 0;$$

ensuite

$$b\Sigma y^2 dS = b\, I_z = M_z, \qquad \text{d'où} \qquad b = \frac{M_z}{I_z},$$

$$c\Sigma z^2 dS = c\, I_y = -M_y, \qquad \text{d'où} \qquad c = -\frac{M_y}{I_y}.$$

Finalement l'expression de n devient

$$n = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}.$$

L'axe neutre OU, droite pour laquelle on a $n = 0$, a pour équation

$$z\frac{M_y}{I_y} - y\frac{M_z}{I_z} = 0,$$

ou bien, en faisant intervenir les rayons de giration,

$$z\frac{M_y}{r_y^2} - y\frac{M_z}{r_z^2} = 0.$$

On reconnaît facilement que cette droite est conjuguée par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la direction dont les cosinus directeurs sont proportionnels à M_y et $-M_z$ respectivement, c'est-à-dire de la direction OV perpendiculaire à la direction OR du moment fléchissant. (Ici OV est la trace du plan moyen.)

Si la section est symétrique par rapport au plan moyen, OV coïncide avec Oy et l'on a $M_y = 0$. L'expression de n se réduit à

$$n = \frac{M_z}{I_z} y.$$

L'axe neutre coïncide avec Oz.

On peut arriver à des résultats équivalents en utilisant la théorie générale des vecteurs d'inertie et la définition de l'axe neutre.

Supposons que l'axe neutre soit la droite OU. L'effort normal n sur un élément dS de la section doit être proportionnel à la dis-

tance v de dS à OU, de sorte qu'on peut poser

$$n = Kv,$$

K étant une constante qu'il s'agit de déterminer. Or les conditions à remplir sont les suivantes :

1° La somme des efforts $n\,dS$ doit être égale à zéro. Cette condition est remplie par toute droite telle que OU passant par le centre de gravité;

2° Que le moment *résultant* des efforts $n\,dS$ par rapport au point O soit égal au moment résultant M des forces appliquées au tronçon de gauche de la poutre. Or, puisque par hypothèse on a $n = Kv$, le premier moment résultant n'est pas autre chose que le produit de K par le vecteur d'inertie de la surface pris par rapport au point O de la droite OU, servant d'axe de rotation.

Il en résulte immédiatement que OR doit être perpendiculaire à la direction de OV conjuguée de OU par rapport à l'ellipse centrale d'inertie. Inversement, connaissant OR et la direction perpendiculaire OV, la direction de OU sera la direction conjuguée de cette dernière.

En outre, si l'on désigne par I le *moment* d'inertie de la surface par rapport à OU, il faut que son produit par K soit égal à la projection sur OU du moment résultant M dirigé suivant OR. Autrement dit, en désignant par θ l'angle des deux directions OR et OU, dont la première est donnée et dont la seconde se détermine comme nous venons de le dire, on doit avoir

$$KI = M\cos\theta.$$

On en déduit pour n cette nouvelle expression

$$n = Kv = \frac{M\cos\theta}{I}\,v = \frac{M'v}{I}$$

en posant $M' = M\cos\theta$. Si OR coïncide avec Oz, on a

$$\cos\theta = 0, \qquad \text{avec} \qquad I = I_z \qquad \text{et} \qquad v = y.$$

Si l'on veut simplement retrouver la valeur du coefficient K dans la formule $n = Kv$, il suffit, connaissant la direction OU de l'axe

neutre, d'écrire l'équation des moments par rapport à OU. La composante de M suivant OU est $M \cos\theta$. On doit avoir

$$M \cos\theta = K \sum v^2 \, dS = KI.$$

C. **Effort normal et moment fléchissant combinés.** — En vertu de la loi de Hooke on n'a qu'à faire la somme des résultats dus séparément à l'effort normal et à l'effort tranchant et l'on obtient pour l'effort moléculaire normal l'expression générale

$$n = \frac{N}{S} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

ou bien encore l'expression

$$n = \frac{N}{S} + \frac{M' v}{I},$$

en se rappelant que pour appliquer cette dernière, il faut déterminer d'abord la direction OU conjuguée de la trace du plan moyen par rapport à l'ellipse centrale d'inertie. M' est la projection de M sur OU; I est le moment d'inertie de la surface par rapport à OU et v est la distance à cette même droite d'un élément dS de la surface.

Ces expressions montrent que l'intervention d'un effort normal N a simplement pour effet de déplacer l'axe neutre parallèlement à lui-même sans changer son orientation.

Désignons par D le point de passage de la force extérieure, qui, dans les conditions supposées, est contenue dans le plan moyen OV et est normale à la section. Ses coordonnées h et k sont telles qu'on ait

$$Nh = M_z, \qquad Nk = -M_y.$$

Si d'ailleurs on appelle d la distance OD, on a

$$M = N d$$

et par suite

$$M' = N d \cos\theta = N d',$$

en appelant d' la distance du point D à OU.

Cela posé, la première expression de n devient, en remplaçant M_z, M_y par leurs valeurs en fonction de h et k et en rempla-

çant d'autre part I_z et I_y par Sr_z^2 et Sr_y^2 respectivement,

$$n = \frac{N}{S}\left[1 + \frac{kz}{r_y^2} + \frac{hy}{r_z^2}\right].$$

L'équation de l'axe neutre s'écrit alors

$$\frac{kz}{r_y^2} + \frac{hy}{r_z^2} + 1 = 0.$$

C'est l'équation de la droite antipolaire du point $D(kh)$; puisque l'équation de la polaire serait

$$\frac{kz}{r_y^2} + \frac{hy}{r_z^2} - 1 = 0.$$

Soit EE cette antipolaire du point D. On sait que le point E où elle coupe OV est tel qu'on ait

$$OE \times OD = \overline{OJ}^2,$$

les points E et D étant d'ailleurs de part et d'autre du point O. Cette relation se conserve en projection sur une perpendiculaire à OU. Il faut remplacer OE par la distance ε de EE à OU, remplacer OD par d' et OJ par r, rayon de giration correspondant à OU. On obtient ainsi

$$\varepsilon = \frac{r^2}{d'}.$$

On retrouverait cette expression en partant de la seconde expression générale de n, car la distance $v = -\varepsilon$ qui correspond à l'axe neutre doit satisfaire à la condition

$$\frac{M'\varepsilon}{I} = \frac{N}{S}, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon = \frac{NI}{SM'}.$$

Or on a

$$M' = Nd', \qquad I = Sr^2.$$

Il en résulte bien $\varepsilon = \frac{r^2}{d'}$.

En prenant en considération cette distance ε de l'axe neutre à la droite OU, on peut donner une troisième expression de l'effort moléculaire normal. En vertu d'une des dernières relations écrites

on a, en effet, $\frac{M'}{I} = \frac{N}{S\varepsilon}$. Il en résulte qu'on a

$$n = \frac{N}{S} + \frac{N\nu}{S\varepsilon} = \frac{N}{S}\left(1 + \frac{\nu}{\varepsilon}\right) = \frac{N}{S} \times \frac{\nu + \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Il est à noter que, au centre de la section, $x = y = 0$, on a toujours $n = \frac{N}{S}$, le moment fléchissant n'intervenant pas.

Les valeurs de n qui sont principalement à considérer sont les valeurs extrêmes, soit positives (compressions), soit négatives (tractions) qui se rencontrent dans l'étendue de la section considérée. Ce sont elles qui déterminent la *fatigue maxima* de la matière soit à la compression, soit à l'extension, ou, suivant une expression usuelle, le *taux de travail* de la matière. Il est évident, d'après ce qui précède, que ces valeurs extrêmes correspondent toujours aux points de la section les plus éloignés de l'axe neutre, points pour lesquels $\nu + \varepsilon$ est le plus grand possible en valeur absolue.

Si l'axe neutre EE coupe la section, ainsi qu'on l'a supposé sur la figure, les deux efforts extrêmes sont de signe contraire. Plus généralement la section se trouve divisée par l'axe neutre en deux régions dans lesquelles les efforts sont de signes contraires. Il y a compression dans l'une et traction dans l'autre.

Si, au contraire, l'axe neutre ne coupait pas la section, les efforts seraient partout de même signe et varieraient simplement entre un minimum et un maximum.

Pour savoir si l'axe neutre coupe ou ne coupe pas la section, on aura à envisager le *noyau central* de celle-ci. On se rappelle, en effet, que le noyau central est limité par une courbe, lieu des points dont les antipolaires sont tangentes au contour de la section. Si le point de passage D de la force extérieure tombe à l'extérieur du noyau central, l'axe neutre, qui est son antipolaire, coupera la section. Dans le cas contraire, il ne la coupera pas.

En pratique, toute cette théorie se simplifie notablement quand le plan moyen est en même temps un des plans de symétrie de la section. On a alors

$$M = M_z = M'_z = Nd$$

et l'on n'a qu'un seul moment d'inertie utile à considérer, celui qui est relatif à l'axe Oz, et qu'on désigne simplement par $I = Sr^2$. On

a, d'ailleurs,

$$\varepsilon = \frac{r^2}{d} \qquad \text{et} \qquad v = y.$$

Dans ces conditions, les formules qui donnent n sont

$$n = \frac{N}{S} + \frac{My}{I} \qquad \text{ou} \qquad n = \frac{N}{S}\left(1 + \frac{dy}{r^2}\right).$$

D. **Étude de l'effort tranchant** T. — La considération du prisme droit substitué à la poutre ne donnerait rien ici, car il n'est nullement évident ici que les différentes sections intermédiaires entre les bases auraient leurs efforts tangentiels répartis exactement comme ceux qu'on aurait supposés sur ces bases.

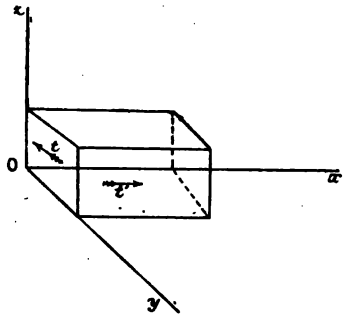
D'autre part, en admettant que les efforts t sont, dans la section G, parallèles à T et en cherchant le mode de répartition le plus simple possible, on serait conduit à admettre une répartition uniforme et à supposer $t = \frac{T}{S}$. C'est effectivement à cette hypothèse qu'on a eu recours longtemps d'une manière générale, et c'est elle qu'on applique encore maintenant lorsqu'on cherche à apprécier les conditions de résistance d'une pièce cisaillée entre deux mâchoires dont les bords sont dans le prolongement l'un de l'autre ; ou bien d'un rivet réunissant deux tôles tirées ou comprimées en sens inverse l'une de l'autre. L'effort tangentiel, ou de cisaillement, a pour intensité moyenne $t = \frac{T}{S}$ et cette valeur moyenne est suffisante en pratique pour apprécier la fatigue du métal.

Mais en dehors de ce cas, c'est-à-dire quand à droite de la section G il existe un tronçon de poutre plus ou moins étendu, soumis à la seule force extérieure T appliquée au point G, on est conduit à envisager une loi de répartition notablement plus compliquée. On la déduit de considérations empruntées à la théorie de l'Elasticité qu'on peut exposer sommairement comme il suit.

Considérons dans un massif en équilibre un parallélépipède élémentaire rectangle dont les arêtes supposées parallèles aux axes de coordonnées ont pour longueurs respectives dx, dy, dz. Si sur les bases perpendiculaires à Ox s'exercent des efforts tangentiels d'intensité t, dans une direction parallèle à Oy, sur les bases perpendiculaires à Oy s'exerceront parallèlement à Ox des efforts tangentiels

d'intensité $t' = t$. En effet, quels que soient, d'ailleurs, les efforts normaux ou tangentiels différents de t ou de t' exercés dans les

Fig. 40.



différentes faces, on se rend compte que leur moment, par rapport à Oz, est toujours nul. Le moment des efforts tangentiels t, par rapport à Oz, est d'ailleurs

$$t\,dy\,dz \times dx.$$

Celui des efforts tangentiels t' est de même

$$t'\,dx\,dz \times dy.$$

Une des conditions nécessaires d'équilibre du parallélépipède élémentaire est donc bien

$$t' = t.$$

Considérons maintenant le tronçon de prisme, ou prisme élémentaire GG′ de longueur dx qui, dans la poutre, vient à la suite de la section G, et représentons-le par sa projection sur le plan Oyz, l'axe Oy étant la trace du plan moyen, dans lequel l'effort tranchant T est supposé contenu. Soient OU la droite conjuguée de Oy par rapport à l'ellipse centrale d'inertie et θ l'angle qu'elle fait avec Oz.

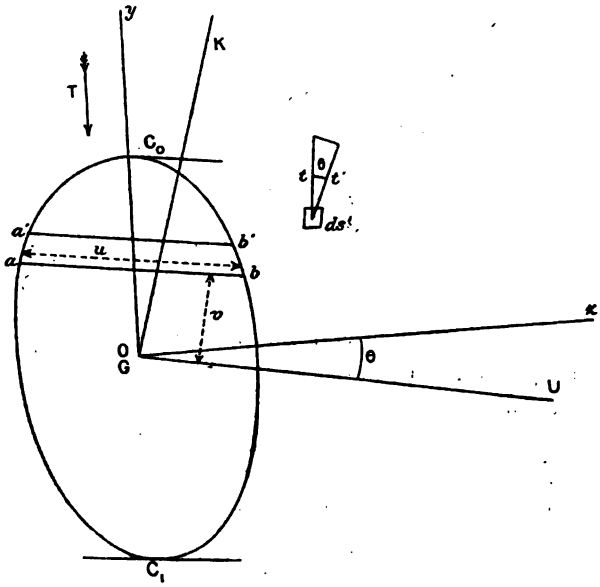
Cette droite représente l'axe neutre dans la section G′, section dans laquelle s'exerce outre l'effort tranchant T, un moment fléchissant

$$dM = T\,dx.$$

Cherchons maintenant à évaluer l'effort tangentiel moyen t qui s'exerce le long d'une ligne telle que ab parallèle à OU, ligne dont

on désignera par u la longueur et par v la distance à OU, ou, si l'on veut, cherchons à évaluer l'effort tangentiel moyen qui s'exerce sur la surface $aba'b'$ de hauteur infiniment petite dv et dont l'aire

Fig. 41.



est $u\,dv$. Nous supposons que t est parallèle à T, c'est-à-dire au plan moyen. Sa composante t' perpendiculaire à OU sera

$$t' = t\cos\theta.$$

Le plan mené par ab parallèlement à Ox, et, par suite, perpendiculairement à la section, découpe dans le prisme élémentaire GG' un rectangle dont les dimensions sont respectivement u et dx, et sur ce rectangle doivent s'exercer des efforts tangentiels parallèles à Ox et d'intensité t', en vertu de ce qui a été démontré plus haut. La somme de ces actions tangentielles est

$$t'u\,dx.$$

Considérons à présent le prisme élémentaire ayant pour base ac_0b, le pont c_0 désignant le point du contour de la section le plus éloigné de OU vers le haut, sa distance à OU étant v_0. Ce prisme ne supporte aucune charge sur sa face extérieure. Sur sa face pro-

jetée en ab il supporte parallèlement à Ox les actions tangentielles précédemment évaluées $t' u\,dx$. Sur sa base abc_0 dans le plan de la section G il supporte des efforts normaux nuls, puisque dans cette section ne s'exerce que l'effort tranchant T. Mais sur la base correspondante dans la section G′ il supporte des efforts normaux, et, par suite, parallèles à Ox, qui ne sont pas nuls et qui, en chaque point, ont pour valeur

$$-\frac{Tv\,dx}{I}\cos\theta,$$

puisque le moment fléchissant dans cette section G′ a pour valeur $T\,dx$. La somme de tous ces efforts normaux élémentaires est, par suite,

$$-\int_{v_0}^{v}\frac{Tv\,dx}{I}\cos\theta\,ds = -\frac{T\cos\theta\,dx}{I}\int_{v_0}^{v} v\,dS,$$

dS désignant un élément de surface situé à la distance v de OU. Or l'intégrale qui figure dans cette expression a une signification évidente. C'est le moment statique par rapport à OU de l'aire abc_0, située au-dessus de ab. En désignant ce moment par la lettre m, on aura donc pour la somme des efforts normaux considérés l'expression

$$-\frac{Tm}{I}\cos\theta\,dx.$$

Une des conditions nécessaires d'équilibre du prisme élémentaire ac_0b s'obtient en écrivant que toutes les forces parallèles à Ox ont une résultante nulle, ce qui donne, en supprimant le facteur commun dx,

$$t' u = \frac{Tm}{I}\cos\theta,$$

d'où

$$t' = \frac{Tm}{Iu}\cos\theta.$$

Il en résulte

$$t = \frac{t'}{\cos\theta} = \frac{Tm}{Iu}.$$

Telle est l'expression de l'effort tangentiel moyen au niveau de la droite ab, à la distance v de OU.

Cette expression s'annule évidemment pour le point c_0, car le moment m est nul en ce point. Elle s'annule aussi pour le point

extrême c_1, le plus éloigné de OU vers le bas, puisque O est le centre de gravité de la section, et que pour la section entière on a aussi $m = 0$, par rapport à toute droite passant par le centre de gravité. Le maximum de t se rencontrera donc pour une ligne ab intermédiaire, plus ou moins voisine de OU. Il peut, d'ailleurs, y avoir plusieurs maxima ou minima. On devra les rechercher pour obtenir la *fatigue* ou le taux de travail à l'effort tranchant.

Il n'est pas inutile de vérifier que la somme de tous les efforts tangentiels ainsi répartis reproduit bien T. Cette somme, pour une surface élémentaire telle que $ab\,a'b'$ a pour valeur

$$tu\,dv = \frac{T}{I}\,m\,dv.$$

Il suffit de vérifier que pour la section entière on a

$$\int_{v_1}^{v_0} m\,dv = I,$$

en désignant par v_0 et v_1 les valeurs de v afférentes aux points extrêmes c_0 et c_1. Or, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_{v_1}^{v_0} m\,dv = [mv]_{v_1}^{v_0} - \int_{v_1}^{v_0} v\frac{dm}{dv}\,dv.$$

La parenthèse est nulle puisque $m = 0$ pour $v = v_0$ et pour $v = v_1$. D'autre part, on a

$$\frac{dm}{dv} = -uv.$$

Par suite, il reste

$$-\int_{v_1}^{v_0} v^2 u\,dv = \int v^2 dS = I. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. — Applications.

Un constructeur n'est pas toujours libre de déterminer la forme d'une pièce entrant dans une construction de manière à la mettre dans les meilleures conditions de résistance aux forces appliquées. Il y a des nécessités qui proviennent soit du prix de revient, soit des conditions d'assemblage, soit des considérations d'espace disponible ou même d'esthétique. Mais il doit tendre autant que pos-

sible à limiter les efforts moléculaires développés dans la matière, efforts qu'on désigne dans le langage courant par les mots de *fatigue* ou de *travail* de la matière quand on les rapporte à l'unité de surface. Il faut que cette fatigue ne dépasse pas par millimètre carré ou par centimètre carré un certain nombre de kilogrammes qu'on se fixe *a priori*. C'est cette limite que nous avons appelée la *limite de sécurité*, laquelle doit, nous le rappelons, être très inférieure à la *limite d'élasticité de la matière*.

A cet égard la forme à donner à la section d'une pièce prismatique a une assez grande importance et il résulte des théories précédemment exposées un certain nombre de considérations générales qu'il est utile de ne jamais perdre de vue si l'on veut obtenir une utilisation convenable, sinon la meilleure, de la matière.

Traction ou compression. — En ce qui concerne les pièces travaillant à la traction ou à la compression simple, la forme est à peu près indifférente, sous des réserves que nous aurons à formuler plus tard, en ce qui concerne les pièces comprimées lorsque leur longueur est notablement plus grande que leurs dimensions transversales. Les efforts moléculaires sont, en effet, uniformément répartis dans toute l'étendue de la section transversale et la *fatigue* à la traction (ou à la compression) a pour expression $R = \frac{N}{S}$.

Flexion simple. — En ce qui concerne les pièces travaillant à la flexion simple, les efforts sont répartis dans la section transversale suivant une loi linéaire et sont en chaque point proportionnels à la distance de ce point à *l'axe neutre*. Nous appelons ainsi, par abréviation, l'axe neutre correspondant à la flexion simple, lequel passe par le centre de gravité. Il y a tout intérêt à concentrer la matière dans des régions aussi éloignées que possible de cet axe neutre de manière à faire participer à la fatigue maxima le plus grand nombre de fibres possibles.

Les points de plus grande fatigue sont les points les plus éloignés de l'axe neutre et la fatigue R y est exprimée par

$$R = \frac{M'h}{I} \quad \text{ou} \quad R = \frac{M'h'}{I},$$

h et h', valeurs extrêmes de v, étant de signes contraires et inégales en valeur absolue dans le cas général.

M′ est d'ailleurs égal à $M \cos\theta$, c'est-à-dire à la projection de M sur l'axe neutre.

Pour une même aire de section transversale, c'est-à-dire pour une même quantité de matière employée, il s'agit donc d'obtenir les plus grandes valeurs pour les diviseurs de M, savoir :

$$\frac{I}{h\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{I}{h'\cos\theta}$$

qui portent souvent le nom de *modules de résistance* de la section.

Tant qu'il n'y aura pas de raison spéciale de faire autrement, il y a tout d'abord intérêt à faire en sorte que $h = h'$, car il ne peut être avantageux d'avoir à une extrémité une fatigue plus réduite qu'à l'autre. On y parviendra de la manière la plus simple en adoptant un profil symétrique par rapport à l'axe neutre.

En second lieu, pour une section transversale de forme donnée, on se rendra compte sans peine que la valeur de I qui est égale au produit de la surface S par le carré du rayon de giration diminue rapidement lorsque l'axe neutre s'écarte de la direction du plus petit des axes de l'ellipse centrale d'inertie, à moins que ces deux axes ne soient égaux, auquel cas $\cos\theta$ est constamment égal à 1. I diminue beaucoup plus vite que $h\cos\theta$, $\cos\theta$ ne pouvant, d'ailleurs, diminuer au-dessous de la valeur qui correspond aux deux axes conjugués égaux. On en conclut qu'il est, en général, avantageux de faire en sorte que l'axe neutre coïncide avec le petit axe de l'ellipse centrale d'inertie et que, par suite, le plan de flexion contienne l'autre axe. On y parviendra de la façon la plus simple en prenant un profil doublement symétrique et en plaçant son grand axe d'inertie, c'est-à-dire, en général, son plus grand axe de symétrie, dans le plan de flexion.

Quelques exemples simples appuieront utilement ces réflexions :

1° *Cercle plein de rayon r.* — On a pour le moment d'inertie dans toutes les directions

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad \text{et l'on a} \quad h = r.$$

Le plan de flexion est indifférent. Le module de résistance

est $\frac{I}{h} = \frac{\pi r^3}{4}$ et la fatigue est donnée par l'expression

$$R = \pm \frac{4M}{\pi r^3}.$$

2° *Cercle évidé de rayons r et r'* ($r > r'$). — On a pour le moment d'inertie dans toutes les directions

$$I = \pi \frac{r^4 - r'^4}{4}, \qquad h = r;$$

module de résistance,

$$\frac{I}{h} = \pi \frac{r^4 - r'^4}{r};$$

fatigue,

$$R = \pm \frac{4Mr}{\pi(r^4 - r'^4)}.$$

Le plan de flexion est encore indifférent. Mais à égalité d'aire le cercle évidé est plus avantageux que le cercle plein.

Dans le premier cas on a, en désignant par S l'aire de la section,

$$R = \frac{4M}{S} \times \frac{1}{r}.$$

Dans le deuxième cas, on a

$$R = \frac{4M}{S} \times \frac{r}{r^2 + r'^2}.$$

Le facteur de $\frac{4M}{S}$ est ici, approximativement, $\frac{1}{2r}$, si l'épaisseur de l'anneau circulaire est faible. D'autre part, à égalité de surface, le rayon du cercle évidé peut être notablement supérieur à celui du cercle plein.

3° *Rectangle plein, de côtés b et c.* — L'axe neutre étant supposé parallèle à *b*, on a

$$I = \frac{1}{12} bc^3, \qquad h = \frac{c}{2};$$

module de résistance,

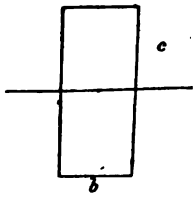
$$\frac{I}{h} = \frac{1}{6} bc^2;$$

fatigue,

$$R = \pm \frac{6M}{bc^2} = \pm \frac{6M}{S} \times \frac{1}{c}.$$

Si l'axe neutre avait été supposé parallèle à c le facteur de $\frac{6M}{S}$ serait $\frac{1}{b}$. Pour avoir la plus petite fatigue il faut prendre $c > b$.

Fig. 42.



Un madrier placé de champ résiste mieux à une charge verticale qu'un madrier posé à plat.

S'il n'y avait pas d'autres considérations intervenant en sens contraire (danger des efforts obliques par exemple) on aurait intérêt à prendre des rectangles très hauts et très étroits.

4° Rectangle de côtés b et c, évidé par un rectangle semblable de côtés $b' = Kb$, $c' = Kc$

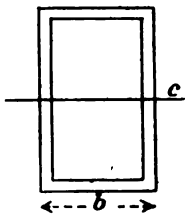
$$I = \frac{1}{12}(bc^3 - b'c'^3) = \frac{1}{12}bc^3(1 - K^4),$$

$$h = \frac{c}{2};$$

module de résistance,

$$\frac{I}{h} = \frac{1}{6}bc^2(1 - K^4);$$

Fig. 43.



fatigue,

$$R = \pm \frac{6M}{bc^2(1 - K^4)} = \pm \frac{6M}{S} \times \frac{1}{c(1 + K^2)}.$$

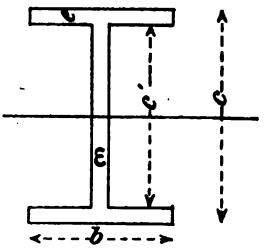
Il est bien évident que si l'on prend des rectangles semblables,

le rectangle évidé aura, à égalité de surface, une hauteur c beaucoup plus considérable que le rectangle plein. D'autre part le facteur $1 + K^2$ est supérieur à l'unité. Un rectangle évidé, ou caisson, est donc plus avantageux qu'un rectangle plein.

5° Un des profils les plus usuels dans les constructions métalliques est le profil dit à double T, ou profil en I, représenté ci-dessous.

Les rectangles supérieurs et inférieurs de largeur b sont appelés les *tables* ou *plates-bandes*. Le rectangle de jonction, de hauteur c',

Fig. 44.



s'appelle *l'âme* du double T. Si l'on appelle b' la largeur totale des deux évidements de droite et de gauche, ou la différence de largeur des tables et de l'âme, on a comme plus haut

$$I = \frac{1}{12}(bc^3 - b'c'^3), \qquad h = \frac{c}{2};$$

module de résistance,

$$\frac{I}{h} = \frac{1}{6c}(bc^3 - b'c'^3);$$

fatigue,

$$R = \pm \frac{6Mc}{bc^3 - b'c'^3}.$$

Quand la hauteur et la largeur de la section sont grandes par rapport aux épaisseurs $e = \frac{c - c'}{2}$ et $\varepsilon = b - b'$ des tables et de l'âme, on peut adopter des formules simplifiées qui sont d'un usage assez courant.

On a

$$c' = c - 2e,$$
$$b' = b - \varepsilon.$$

Supposons que ε et c soient assez petits pour qu'on puisse négliger leurs puissances supérieures aux premières. On aura pour la surface

$$S = bc - b'c' = 2eb + \varepsilon c,$$

$$I = \frac{1}{12}\left(bc^3 - b'c'^3\right) = \frac{1}{12}(6ebc^2 + \varepsilon c^3),$$

$$\frac{I}{h} = \frac{1}{6}(6ebc + \varepsilon c^2).$$

Il arrive encore souvent qu'on puisse négliger les termes en ε devant les termes en e, et l'on prend

$$S = 2eb = 2\omega,$$

$$\frac{I}{h} = ebc = \omega c,$$

en désignant par ω la surface de l'une des plates-bandes. On en déduit

$$R = \pm \frac{M}{\omega c}$$

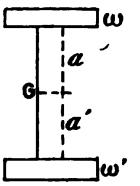
ou

$$R \times \omega = \pm \frac{M}{c}.$$

On énonce ce résultat en disant que l'effort total de compression ou d'extension dans l'une des plates-bandes est égal au moment fléchissant divisé par la hauteur c du profil.

On a ainsi une formule d'un emploi très commode pour des calculs approchés et donnant toujours pour la fatigue une erreur par excès. Bien entendu elle n'est valable que pour des profils ayant des dimensions grandes relativement aux épaisseurs du métal.

Fig. 45.



Cette simplification revient à admettre que, au point de vue de la fatigue à la flexion, l'âme de la poutre n'intervient pas, et que les

plates-bandes doivent être calculées en vue de la résistance au moment fléchissant comme si elles existaient seules.

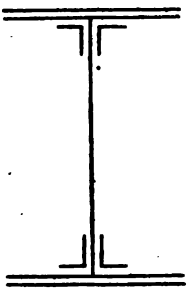
Quand on a affaire à un profil en I dissymétrique mais tel qu'on puisse négliger l'âme, on emploie les formules suivantes où ω et ω' sont les sections des deux plates-bandes, a et a' les distances du centre de gravité des plates-bandes au centre de gravité de la surface constituée par leur réunion, et h la somme $h = a + a'$:

$$S = \omega + \omega',$$
$$a\omega = a'\omega' \quad \text{(centre de gravité)},$$
$$I = \omega a^2 + \omega' a'^2 = \omega a(a + a')$$
$$= \omega a h$$
$$= \omega' a' h.$$

Si sans changer h ni ω on augmente ω', I augmente, puisque a augmente, mais le quotient $\frac{I}{a}$ module de résistance demeure constant.

5° On a souvent à calculer des profils plus compliqués, mais dérivant du profil à I simple. Pour des pièces de grande hauteur et de grande résistance, on constitue souvent la section au moyen

Fig. 46.



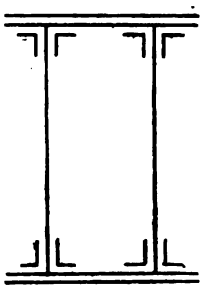
d'une tôle verticale appelée *âme* et reliée par deux ou *quatre cornières* aux *plates-bandes*, qui sont des tôles horizontales superposées en plus ou moins grand nombre.

On a aussi des sections en forme de caissons qui ne diffèrent de la précédente au point de vue mécanique que par la présence de *deux âmes*.

Le calcul des moments d'inertie est souvent une opération

pénible si l'on veut la faire directement. Mais l'on trouve dans les aide-mémoire, ou dans les albums des forges divers renseignements pratiques qui le facilitent singulièrement. On y trouve notamment

Fig. 47.



les aires des cornières usuelles, la situation de leur centre de gravité, et leurs moments d'inertie par rapport à des axes parallèles aux ailes et passant par le centre de gravité. On en déduit facilement le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque parallèle aux ailes par la formule

$$I' = I + S\,d^2.$$

Quant aux moments d'inertie de l'âme ou des plates-bandes, ce sont des moments d'inertie de rectangles facilement définis.

Mais il y a mieux encore et des barêmes donnent les calculs tout faits pour des séries entières d'éléments, âmes, plates-bandes, cornières, et cela même pour les sections nettes, c'est-à-dire rivets déduits.

Comme exemple on peut citer les tables de Valat qui figurent en tête du Recueil de types pour ponts routes de M. Maurice Kœcklin, et dont l'emploi est grandement à recommander.

Effort tranchant. — En ce qui concerne la fatigue à l'effort tranchant, on ne peut guère en faire état la plupart du temps pour fixer judicieusement la forme à donner à la section transversale. Un problème d'effort tranchant ne se pose presque jamais seul, mais est toujours accompagné d'un problème de flexion, lequel est prépondérant pour le constructeur. Il y a simplement lieu de s'assurer que les dispositions adoptées en vue de la flexion, et, s'il y a

lieu, de la traction ou de la compression sont convenables au point de vue des efforts tranchants à prendre en compte.

De la théorie faite précédemment on conclut que la fatigue *à l'effort tranchant*, ou *fatigue au glissement*, est donnée par la formule

$$R = \frac{m}{Iu} T,$$

appliquée aux points de la section pour lesquels le rapport $\frac{m}{u}$ est le plus grand, les facteurs I et T étant constants pour toute l'étendue de la section.

m est d'ailleurs nul pour les points les plus éloignés de l'axe neutre, correspondant à la flexion simple. Il atteint son maximum sur l'axe neutre de la section, chacune des moitiés de celle-ci donnant des moments égaux et de signe contraire par rapport à l'axe neutre, puisque le moment total par rapport à cet axe, qui passe par le centre de gravité, est nul.

C'est donc en général au droit de cet axe qu'on trouve pour l'effort tangentiel la valeur la plus élevée. Mais ce n'est pas là une règle absolue à cause de l'influence de u. Quand la section présente un rétrécissement pour lequel u passe par un minimum, ce peut être là que se manifeste l'effort le plus élevé, alors même que la section rétrécie serait éloignée de l'axe neutre.

Voici quelques exemples de répartition de l'effort tranchant.

1° *Cercle plein de rayon r.* — On a

$$m = \int_y^r uy\,dy$$

et

$$y^2 = r^2 - \frac{u^2}{4},$$

d'où

$$y\,dy = -\frac{1}{4}\,u\,du;$$

donc

$$m = -\int_u^0 \frac{1}{4}\,u^2\,du = \int_0^u \frac{1}{4}\,u^2\,du = \frac{u^3}{12},$$

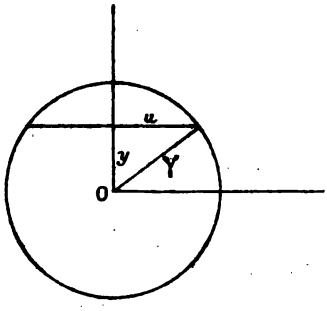
$$\frac{m}{u} = \frac{u^2}{12}.$$

Cette fonction est maximum quand u coïncide avec le diamètre Ox

et son maximum est

$$\frac{4r^2}{12} = \frac{1}{3}r^2.$$

Fig. 48.



C'est donc dans le plan diamétral que se produira le plus grand effort de glissement,

$$t = \frac{mT}{uI},$$

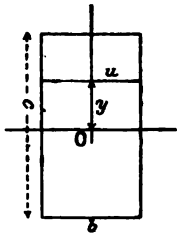
et en introduisant la valeur de $I = \frac{ur^4}{4}$ on trouve

$$R = \frac{4}{3}\frac{T}{\pi r^2} = \frac{4}{3}\frac{T}{S}.$$

Cette valeur est les $\frac{4}{3}$ de ce que donnerait une répartition uniforme de l'effort tranchant dans toute l'étendue de la section.

2° *Rectangle plein, de côtés b et c.* — On a

Fig. 49.



$$m = u \times \left(\frac{c}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2} + y\right) = \frac{u}{2}\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right),$$

$$\frac{m}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right).$$

Le maximum a lieu pour $y = 0$ et a pour valeur $\frac{c^2}{8}$. Le maximum de l'effort tangentiel est

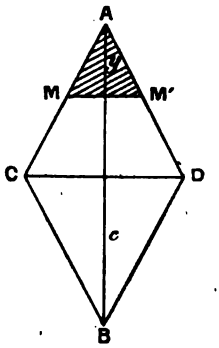
$$R = \frac{c^2}{8} \times \frac{12}{b \times c^3} \times T = \frac{3}{2} \times \frac{T}{bc} = \frac{3}{2}\frac{T}{S},$$

c'est-à-dire qu'il est une fois et demie plus grand que l'effort moyen.

3° *Losanges dont les diagonales sont b et c.* — En désignant par y la hauteur du triangle AMM′ et par u sa base, on a

$$m = \frac{uy}{2}\left(\frac{c}{2} - \frac{2}{3}y\right),$$

Fig. 50.



d'où

$$\frac{m}{u} = \frac{y}{2}\left(\frac{c}{2} - \frac{2}{3}y\right).$$

Le maximum de cette expression a lieu pour

$$\frac{c}{2} - \frac{2}{3}y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{3}{8}c = \frac{3}{4}\frac{c}{2},$$

et non pas pour la valeur $y = \frac{c}{2}$ qui correspondrait à la fibre moyenne.

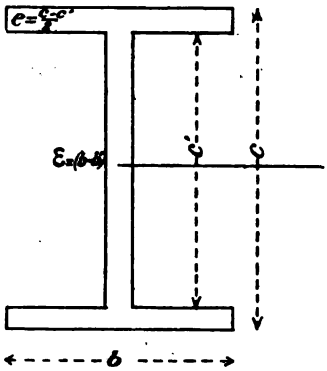
4° *Double té symétrique.* — Dans toute l'étendue de la platebande supérieure on a

$$\frac{m}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right),$$

comme pour un rectangle plein. La plus grande valeur s'obtient pour la face inférieure, ou $y = \frac{c'}{2}$. On a alors

$$\frac{m}{u} = \frac{m}{b} = \frac{1}{8}(c^2 - c'^2).$$

Fig. 51.



A la naissance de l'âme on a

$$\frac{m}{u} = \frac{1}{8}(c^2 - c'^2)\frac{b}{\varepsilon},$$

en appelant ε la largeur de l'âme $= b - b'$.

Il y a donc une discontinuité brusque dans la valeur de $\frac{m}{u}$, qui passe d'une certaine valeur $\frac{c^2 - c'^2}{8}$ à cette valeur multipliée par le rapport $\frac{b}{\varepsilon}$ qui est relativement grand.

u demeure constant sur la hauteur de l'âme, mais m va en augmentant jusqu'à l'axe neutre. Il est égal à

$$\frac{b}{8}(c^2 - c'^2) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{c'^2}{4} - y^2\right),$$

et maximum pour $y = 0$,

On a donc sur l'axe neutre

$$\frac{m}{u} = \frac{c^2 - c'^2}{8}\frac{b}{\varepsilon} + \frac{c'^2}{8} = \frac{c^2}{8}\frac{b}{\varepsilon} - \frac{c'^2}{8}\frac{b - \varepsilon}{\varepsilon},$$

c'est là le point de plus fort glissement.

Si l'on suppose admissible la simplification déjà admise de considérer comme négligeables les puissances de $\varepsilon = b - b'$ et de

$$e = \frac{c - c'}{2},$$

on écrira cette expression sous la forme suivante :

$$c' = c - 2e,$$
$$c'^2 = c^2 - 4ec,$$
$$\frac{m}{u} = \frac{c^2}{8}\frac{b}{\varepsilon} - \frac{c'^2}{8}\frac{b-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{4ecb + \varepsilon c^2}{8\varepsilon},$$

et si l'on peut encore négliger au numérateur le terme en ε devant le terme en e

$$\frac{m}{u} = \frac{4ecb}{8\varepsilon} = \frac{ecb}{2\varepsilon} = \frac{\omega c}{2\varepsilon},$$

en désignant par ω la surface d'une plate-bande.

D'autre part, avec la même approximation, nous avons déjà admis la formule

$$\mathrm{I} = \frac{cbc^2}{2} = \frac{\omega c^2}{2},$$

on en déduit

$$\mathrm{R} = \frac{m\mathrm{T}}{u\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{T}}{\varepsilon c}.$$

On obtient donc dans ce cas une valeur approchée de la fatigue à l'effort tranchant en supposant que cet effort tranchant se répartit uniformément sur la section εc de l'âme, abstraction faite des plates-bandes, celles-ci étant censées ne pas travailler au glissement.

Si l'on rapproche ce résultat de celui déjà énoncé pour le moment fléchissant, on voit qu'en définitive, pour des profils en I dont les épaisseurs d'âmes sont relativement petites, on peut calculer isolément les plates-bandes en vue de la résistance au moment fléchissant et l'âme en vue de la résistance à l'effort tranchant.

La formule $t = \frac{m\mathrm{T}}{u\mathrm{I}}$, qui fournit l'effort dû à l'effort tranchant en chaque point de la section, trouve tout naturellement son emploi dans les poutres formées de tôles assemblées pour étudier les conditions de résistance des lignes de rivure; $tu = \frac{m\mathrm{T}}{\mathrm{I}}$ est en

effet l'effort de glissement ou de cisaillement qui se produit sur toute la largeur de la section au point considéré, et si on le suppose constant sur une certaine longueur, ce sera aussi l'effort de glissement produit sur toute la largeur de section et *sur l'unité de longueur de la poutre*. Si l'on désigne par Δx l'écartement de deux rivets, l'effort de glissement afférent à chacun d'eux sera

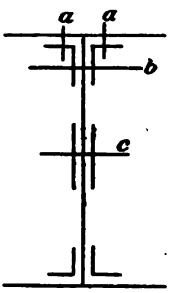
$$\mu u \, \Delta x = \frac{m \mathrm{T} \, \Delta x}{\mathrm{I}},$$

et c'est en vue de cet effort que devra être déterminé le diamètre du rivet. Si l'on désigne par s la section d'un rivet et par R′ la fatigue qu'il subit, on aura

$$\mathrm{R}' s = \frac{m \mathrm{T} \, \Delta x}{\mathrm{I}}.$$

La valeur de m n'est pas la même pour les files de rivets qui relient les plates-bandes aux cornières et pour les files de rivets qui relient l'âme aux cornières. m est plus grand pour cette dernière file.

Fig. 52.



Quand la hauteur de l'âme est trop grande pour qu'on puisse la constituer par une feuille de tôle unique et qu'on est obligé de prendre des tôles superposées réunies par des couvre-joints, les lignes de rivure du couvre-joint sont calculées d'une manière analogue, la valeur de m étant bien entendu celle qui correspond à la ligne de rivure.

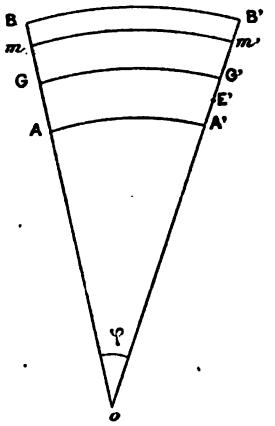
CHAPITRE VI.

THÉORIE DES POUTRES PRISMATIQUES (SUITE). RECHERCHE DES DÉFORMATIONS.

1. — Déformation du prisme élémentaire.

Considérons un tronçon de poutre, ou prisme élémentaire, compris entre deux sections normales correspondant à deux points infiniment voisins G et G′ de la fibre moyenne. Pour simplifier,

Fig. 53.



nous supposons que celle-ci soit contenue dans un plan moyen et même que ce plan soit un plan de symétrie de la section. Nous supposons aussi qu'il contient toutes les forces appliquées.

Les deux sections normales seront représentées par leurs traces AB et A′B′ sur le plan de la figure. Leur intersection O est le centre de courbure de la fibre moyenne.

Soit ρ le rayon de courbure de celle-ci; $d\sigma$ son arc infiniment petit GG′; et φ l'angle total de courbure GOG′, de sorte que

$$d\sigma = \rho\varphi,$$

soit mm' une fibre de la poutre, située à la distance v de la fibre moyenne, sa longueur ds aura pour valeur

$$ds = (\rho + v)\varphi.$$

Nous allons examiner successivement les déformations du prisme élémentaire sous l'action de l'effort normal, du moment fléchissant et de l'effort tranchant, et nous les superposerons ensuite en invoquant la loi de Hooke.

Effort normal. — Nous avons admis que sous l'action de l'effort normal chaque fibre supporte un effort dirigé dans le sens de sa longueur et ayant pour valeur par unité de section

$$n = \frac{N}{S},$$

S désignant la surface totale de la section.

Il est naturel d'admettre que la dilatation ou le raccourcissement par unité de longueur est proportionnel à n, de sorte que pour la longueur ds de la portion de fibre, le changement de longueur sera

$$\frac{n\,ds}{E} = \frac{N}{ES}\,ds.$$

(En général N sera un effort de compression, de sorte que le changement de longueur sera un raccourcissement.)

Si l'on suppose que la section AB demeure plane et fixée dans sa position primitive, la section A'B' demeurera plane, les points tels que m' se déplaçant, dans le mouvement relatif, de quantités proportionnelles à $ds = (\rho + v)\varphi$, et proportionnelles, par suite, à leur distance $(\rho + v)$ au centre de courbure.

Le déplacement d'ensemble de la section A'B' sera donc assimilable à une rotation infiniment petite s'effectuant autour de ce centre de courbure, et ayant pour valeur

$$\frac{N}{ES}\varphi = \frac{N}{ES}\frac{d\sigma}{\rho}.$$

Quand les dimensions de la section transversale sont petites par rapport au rayon de courbure, ainsi qu'on le suppose généralement, cette rotation infiniment petite est pratiquement assimilable

à une translation infiniment petite, normale à A'B', et ayant pour valeur $\lambda = \frac{N}{ES} d\sigma$, c'est-à-dire égale au raccourcissement de la fibre moyenne

Moment fléchissant. — Nous avons vu que sous l'action du moment fléchissant M, supposé positif dans le sens qui amènerait OA vers OA', une fibre telle que mm' supporte un effort de compression dirigé encore dans le sens de sa longueur et ayant pour valeur par unité de section

$$n = \frac{Mv}{I},$$

v étant positif au-dessus de GG' et I désignant le moment d'inertie de la section par rapport à un axe passant en G et normal au plan de la figure.

Il est donc encore naturel d'admettre que le changement de longueur soit proportionnel à n et à ds et ait pour expression

$$\frac{Mv}{EI} ds = \frac{Mv}{EI} d\sigma \times \frac{v+\rho}{\rho}.$$

Si l'on suppose encore que la section AB demeure fixe, cette expression représentera le déplacement relatif du point m'. On voit que si v est petit par rapport à ρ, c'est-à-dire si les dimensions de la section transversale sont petites par rapport au rayon de courbure, le facteur $\frac{v+\rho}{\rho}$ est sensiblement égal à l'unité et par suite le déplacement relatif de m' sera sensiblement

$$\frac{M\,d\sigma}{EI} \times v.$$

Le déplacement d'ensemble est donc assimilable à une rotation infiniment petite s'effectuant autour du centre de gravité G' et ayant pour valeur

$$\omega = \frac{M\,d\sigma}{EI}.$$

Le point G', pour lequel $v = 0$, ne subit aucun déplacement.

Cette rotation altère le rayon de courbure de la fibre moyenne, qui devient ρ', l'angle au centre φ devenant φ', et l'on a, avec les

hypothèses admises,

$$\varphi - \varphi' = \omega = \frac{M\,d\sigma}{EI}.$$

En remplaçant φ et φ' par leurs valeurs $\frac{d\sigma}{\rho}$ et $\frac{d\sigma}{\rho'}$ et en divisant par $d\sigma$ on obtient la relation utile

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{M}{EI}.$$

S'il s'agit d'une poutre droite pour laquelle on a primitivement $\rho = \infty$, on en déduit cette autre relation utile

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{M}{EI}.$$

Effort normal et moment fléchissant combinés. — On n'a qu'à superposer les deux effets. Le déplacement d'ensemble de la section A'B' par rapport à la section AB, supposée fixe, résultera :

1° D'une rotation infiniment petite $\frac{N}{ES}\frac{d\sigma}{\rho}$ autour du centre de courbure, assimilable à une translation

$$\lambda = \frac{N}{ES}\,d\sigma$$

(de G' vers G si N est positif);

2° D'une rotation infiniment petite

$$\omega = \frac{M}{EI}\,d\sigma$$

autour du centre de gravité G', infiniment voisin de G.

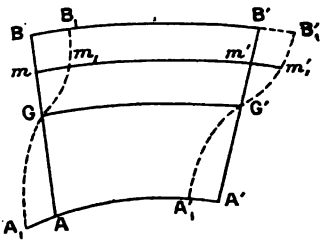
Le déplacement résultant sera une rotation unique s'effectuant, dans tous les cas, autour du point analogue à m' qui ne subit aucun déplacement relatif, et qui correspond à la fibre ne supportant aucun effort normal n, et par suite aucune modification de longueur. Ce point E' est le point qui correspond à l'*axe neutre*, lequel est l'antipolaire par rapport à l'ellipse centrale d'inertie du point de passage de la force extérieure.

Effort tranchant. — Sous l'influence des efforts tangentiels qui s'exercent sur la surface cylindrique normale à la figure et dont la trace est mm', la partie supérieure du prisme élémentaire doit

tendre à glisser par rapport à la partie inférieure, et cela de gauche à droite si T est négatif. La valeur de ce glissement au droit de chaque couche de fibres mm' doit être supposée proportionnelle à la valeur de t. Autrement dit, les valeurs des déformations subies par les angles Amm' sont proportionnelles à t.

Il est donc impossible que les sections normales planes telles

Fig. 54.



que AB demeurent planes après déformation. Elles doivent se déformer suivant des surfaces cylindriques, la droite AB se transformant en une sorte de sinusoïde telle que A_1B_1.

Aux points A_1 et B_1, la courbe doit demeurer normale aux lignes de contour A_1A' et B_1B', car en ces points extrêmes on sait que t est nul, et il doit en être de même des glissements et des déformations angulaires.

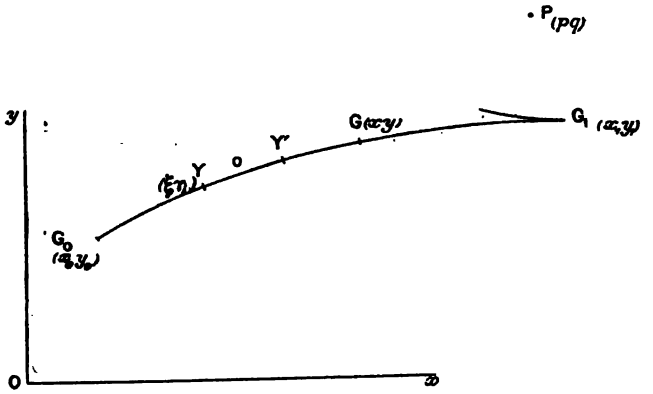
Dans une pareille déformation les couches de fibres glissent les unes sur les autres sans modification de leur longueur et sans altération de courbure de la fibre moyenne.

II. — Déformation d'ensemble de la fibre moyenne.

Formules de Bresse. — Nous chercherons d'abord les équations qui donnent le déplacement d'un point P, invariablement lié à la tangente extrême G_1T_1 d'une courbe G_0G_1 supposée flexible et élastique. Nous supposerons bien entendu que la déformation totale de l'arc de courbe soit assimilable à un infiniment petit, ainsi que le déplacement total du point P, de telle sorte qu'on puisse considérer le déplacement total du point P comme la résultante de tous les déplacements partiels qu'il subirait si les déformations des différents éléments de l'arc étaient successives au lieu d'être simultanées.

Supposons d'abord que l'extrémité G_0 reste fixe ainsi que la tangente en G_0.

Fig. 55.



La déformation d'un arc infiniment petit $\gamma\gamma'$, de longueur $d\sigma$, est composée de deux éléments :

1° Une altération de courbure mesurée par une diminution ω de l'angle de ses tangentes extrêmes;

2° Un accroissement de longueur λ.

L'altération de courbure ω fait subir au point γ' et à tous les points à droite de γ', ainsi qu'à tous ceux qui leur sont invariablement liés, des déplacements qui peuvent être considérés comme le résultat d'une rotation autour du point de concours O des tangentes en γ et γ'. Mais, $d\sigma$ étant supposé infiniment petit, cette rotation peut, à des infiniment petits près du second ordre, être remplacée par une rotation égale effectuée autour du point $\gamma(\xi\eta)$. Si les angles sont comptés positivement de Ox vers Oy, la valeur de cette rotation sera ω. Le déplacement du point P, de coordonnées p, q, aura pour composantes suivant les axes

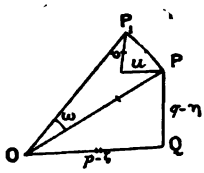
$$u = -\omega(q-\eta),$$
$$v = \omega(p-\xi).$$

Cela est facile à vérifier sur la figure ci-contre où les triangles semblables PP_1R et OPQ donnent les relations

$$\frac{v}{p-\xi} = \frac{-u}{q-\eta} = \frac{PP_1}{OP} = \omega.$$

L'accroissement de longueur λ fait subir à tous les points situés à droite de γ' une translation parallèle à $\gamma\gamma'$ et égale à λ. Le déplacement correspondant du point P aura donc pour composantes

Fig. 56.



$$u = \lambda \frac{d\xi}{d\sigma}, \qquad v = \lambda \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Au total, les composantes du déplacement du point P seront

$$u = -\omega(q - \eta) + \lambda \frac{d\xi}{d\sigma},$$

$$v = \omega(p - \xi) + \lambda \frac{d\eta}{d\sigma},$$

et l'on aura à faire la sommation de termes semblables pour tous les éléments $\gamma\gamma'$ compris entre G_0 et G_1.

Supposons maintenant que G_0 subisse une translation infiniment petite, de composantes u_0, v_0 et que la tangente en G_0 subisse une rotation infiniment petite de valeur ω_0, il faudra ajouter aux composantes du déplacement les termes

$$u_0 - \omega_0(q - y_0),$$
$$v_0 + \omega_0(p - x_0).$$

Finalement, on a pour les composantes du déplacement total du point P les expressions

$$u = u_0 - \omega_0(q - y_0) - \Sigma\omega(q - \eta) + \Sigma\lambda \frac{d\xi}{d\sigma},$$

$$v = v_0 + \omega_0(p - x_0) + \Sigma\omega(p - \xi) + \Sigma\lambda \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

La valeur de la rotation totale subie par la tangente extrême en G_1, ou par toute droite qui lui serait invariablement liée, est évidemment égale à

$$\omega_0 + \Sigma\omega.$$

Il est bien évident que si une partie seulement de l'arc G_0G_1 se déforme, il ne faut prendre en compte dans les sommations représentées par le signe Σ que les déformations ω et λ se rapportant à cette partie, ou bien supposer nulles les déformations relatives aux autres parties.

Il est bien évident aussi que si l'on cherche le déplacement d'un point invariable lié à la tangente en un point intermédiaire G de l'arc, on doit borner les sommations à l'arc partiel G_0G. C'est ainsi notamment qu'on devra opérer pour trouver les composantes du déplacement d'un point G de l'arc lui-même.

Les formules trouvées pour u et v permettent de trouver la position du centre instantané de rotation correspondant au déplacement infiniment petit du système mobile. Il suffit de chercher le point par lequel $u = v = 0$, ce qui donne deux équations du premier degré

$$p[\omega_0 + \Sigma\omega] = \omega_0 x_0 + \Sigma\omega\xi - \Sigma\lambda\frac{d\eta}{d\sigma} - v_0,$$

$$q[\omega_0 + \Sigma\omega] = \omega_0 y_0 + \Sigma\omega\eta + \Sigma\lambda\frac{d\xi}{d\sigma} + u_0.$$

Si l'on néglige les termes correspondant aux altérations de longueur ainsi qu'à la translation du point origine G_0, on voit que p et q sont les coordonnées du centre de gravité de la courbe G_0G_1, aux différents éléments de laquelle on aurait attribué la valeur ω de la rotation qui lui correspond, l'origine G_0 étant assimilée à un élément de valeur ω_0.

Cela posé, il n'y a qu'à substituer dans les formules trouvées les valeurs de ω et λ qui conviennent au cas d'une poutre soumise à une flexion composée; savoir :

$$\omega = \frac{M\,d\sigma}{EI},$$

$$\lambda = -\frac{N}{ES}d\sigma.$$

D'autre part, comme nous cherchons le déplacement d'un point G de la fibre moyenne, nous remplacerons p et q par les coordonnées de G que nous appellerons x, y. Enfin, nous désignerons désormais par ω la rotation totale de la tangente au point G. Nous obtiendrons les trois équations fondamentales suivantes, dues

à Bresse :

$$(A)\quad \begin{cases} (I) & \omega = \omega_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI}\, d\sigma, \\ (II) & v = v_0 + \omega_0(x - x_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI}(x - \xi)\, d\sigma - \int_{s_0}^{s} \frac{N}{ES}\frac{d\eta}{d\sigma}\, d\sigma, \\ (III) & u = u_0 - \omega_0(y - y_0) - \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI}(y - \eta)\, d\sigma - \int_{s_0}^{s} \frac{N}{ES}\frac{d\xi}{d\sigma}\, d\sigma. \end{cases}$$

Si l'on a affaire à une poutre droite, on peut supposer son axe longitudinal en coïncidence avec l'axe Ox. Alors on aura $\eta = 0$ en chaque point, ainsi que $\frac{d\eta}{d\sigma} = 0$, $\frac{d\xi}{d\sigma} = 1$.

Les formules deviennent, en remplaçant partout s et σ par x et ξ respectivement et les quantités y par zéro :

$$(A')\quad \begin{cases} (I) & \omega = \omega_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{M}{EI}\, d\xi, \\ (II) & v = v_0 + \omega_0(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{M}{EI}(x - \xi)\, d\xi, \\ (III) & u = u_0 - \int_{x_0}^{x} \frac{N}{ES}\, d\xi. \end{cases}$$

La troisième de ces formules se réduit d'ailleurs à $u = u_0$ quand $N = 0$, ce qui est le cas général des poutres droites.

Ligne élastique dans les poutres droites. — La seconde formule (A') joue un rôle très important dans la théorie des poutres droites. Elle fournit, sous forme explicite, l'équation de la *courbe représentative* du déplacement vertical v, qui est le seul à envisager. C'est donc aussi l'équation de la courbe affectée par la fibre moyenne déformée, courbe que l'on appelle *ligne élastique*.

Si l'on envisage l'intégrale qui figure dans le second membre, on reconnaît qu'elle est de la même forme que celle qui exprimerait le moment produit au point x par un ensemble de charges continues, situées à sa gauche, et ayant pour valeur $-\frac{M\,d\xi}{EI}$ pour chaque élément $d\xi$ de la fibre moyenne. L'expression de v ne diffère d'ailleurs de l'intégrale que par une fonction linéaire de x. Il en résulte que pour avoir la ligne représentative de v, ou autrement dit la ligne élastique, il suffit de supposer des charges fictives $-\frac{M\,d\xi}{EI}$, ayant

pour lignes d'action les verticales (ξ), et de tracer avec une distance polaire unité, le polygone funiculaire de ces charges sur le réseau des droites (ξ).

On aura un tracé équivalent, suivant une remarque déjà faite, en considérant des charges fictives $-M\,d\xi$ et en construisant leur polygone funiculaire avec une distance polaire variable égale à EI.

Quant à la ligne de référence, à laquelle il faudra rapporter le polygone funiculaire, elle dépendra dans chaque cas de la fonction linéaire $v_0 + \omega_0(x - x_0)$, c'est-à-dire des conditions particulières dans lesquelles la poutre sera supposée placée. En particulier, si l'on connaît les deux valeurs v_0 et v_1 prises par v aux deux extrémités G_0 et G_1 de la poutre (ou de la travée), ces deux conditions détermineront la position de la ligne de référence. Si l'on a $v_0 = v_1 = 0$, la ligne de référence sera la corde du polygone funiculaire comprise entre les verticales (G_0) et (G_1) et, dans ce cas, on pourra dire que v est égal au moment fléchissant qui serait produit par les charges fictives $-\frac{M\,d\xi}{EI}$ dans l'hypothèse d'une poutre posée sur appuis simples.

De cette seconde équation (A'), on déduit, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{dv}{dx} = \omega_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{M}{EI}\,d\xi = \omega,$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

Cette seconde équation peut servir de définition à la ligne élastique et est assez fréquemment employée. [On peut observer qu'elle équivaut à l'équation trouvée précédemment

$$-\frac{1}{\rho'} = \frac{M}{EI},$$

car, lorsque ρ' est très grand, et que $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ est petit, l'expression de $-\frac{1}{\rho'}$ se réduit précisément à $\frac{d^2v}{dx^2}$.]

Lorsque I est constant, on déduit de cette équation la relation suivante, en dérivant deux fois par rapport à x :

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

Or, nous avons vu que, lorsque les charges sont isolées, M est, dans l'intervalle de deux charges successives, une fonction linéaire de x et y. Ici, y n'intervenant pas, c'est une fonction linéaire de x. Sa dérivée seconde est nulle. Il en résulte que v a une expression du troisième degré en x. La ligne élastique se compose donc d'arcs de paraboles cubiques dans les intervalles des charges, et ces arcs doivent, bien entendu, se raccorder entre eux, en ayant des tangentes communes sur les verticales des charges.

S'il s'agit de charges verticales à répartition continue, nous avons vu que $\frac{d^2 M}{dx^2} = -p$, si p est l'intensité de la charge au point x. L'équation différentielle de la ligne élastique est donc alors

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -p.$$

Si p a une expression simple en x, si c'est par exemple un polynome, cette équation sera intégrable. En particulier, si p est une constante, l'expression de v sera un polynome du quatrième degré en x.

On disposera, dans chaque cas, des constantes arbitraires pour satisfaire aux conditions que l'on aura admises pour les extrémités.

Ligne élastique dans les poutres courbes. — Pour les poutres courbes, la forme affectée par la poutre déformée dépend à la fois de u et de v. Mais la seconde de ces quantités a de beaucoup le rôle le plus important. C'est elle surtout que l'on mesure dans les épreuves. On peut encore appeler *ligne élastique* la ligne représentative de ce déplacement v, généralement vertical.

La seconde équation générale (A) peut d'ailleurs être simplifiée dans la plupart des cas, en négligeant son dernier terme :

$$\int_{s_0}^{s} \frac{N}{ES} \frac{d\eta}{d\sigma} d\sigma.$$

Ce terme est, en effet, très petit d'une manière absolue toutes les fois que $\frac{d\eta}{d\sigma}$ peut être considéré comme négligeable, c'est-à-dire qu'on a affaire à une poutre de grand rayon de courbure.

Dans les autres cas, $\frac{N}{ES}\frac{d\eta}{d\sigma}$ est petit relativement aux autres termes, ainsi qu'on s'en assure par des calculs numériques, et l'intégrale dont il s'agit n'apparaît jamais que comme un terme correctif sans importance.

En admettant cette simplification, on a simplement

$$v = v_0 + \omega_0(x - x_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{M}{EI}(x - \xi)\, d\sigma.$$

Si l'on définit une quantité J, appelée *moment d'inertie réduit*, par la relation

$$\frac{d\sigma}{I} = \frac{d\xi}{J},$$

on pourra écrire

$$v = v_0 + \omega_0(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{M}{EJ}(x - \xi)\, d\xi,$$

et l'on retrouve exactement la formule applicable aux poutres droites, avec cette seule différence que le moment d'inertie réel I est remplacé par le moment d'inertie réduit

$$J = I\frac{d\xi}{d\sigma}.$$

On tracera donc la ligne élastique, ou ligne représentative de v, au moyen d'un polygone funiculaire des charges fictives

$$-\frac{M\, d\xi}{EJ} = -\frac{M\, d\sigma}{EI}$$

sur le réseau des droites (ξ).

On trouverait encore les deux formules différentielles, souvent utiles,

$$\frac{dv}{dx} = \omega,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EJ}.$$

Déformation éventuelle due à un écart de température. — Les principes qui nous ont conduit aux équations de Bresse s'appliquent évidemment au cas où l'on rechercherait l'action d'un écart de température sur une poutre. Indépendamment des déformations

qui pourront être dues aux moments fléchissants et aux efforts normaux développés de ce fait dans la poutre, chaque élément de la longueur de celle-ci éprouvera une dilatation ou une contraction dont il est aisé de tenir compte. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une augmentation de température, dilatant d'une quantité τ l'unité de longueur du métal, la dilatation de l'élément $d\sigma$ de la fibre moyenne sera $\lambda = \tau\, d\sigma$. Les termes à ajouter aux équations (II) et (III) du groupe (A) seront, par suite, respectivement

$$\int_{s_0}^{s} \tau\, d\eta = \tau(y - y_0),$$

$$\int_{s_0}^{s} \tau\, d\xi = \tau(x - x_0).$$

Déformation générale attribuable à l'effort tranchant. — On s'est souvent préoccupé de savoir s'il convenait ou non d'ajouter aux équations de Bresse des termes tenant compte de l'effort tranchant, c'est-à-dire d'un glissement relatif des sections transversales dans leur plan.

Il ne semble pas, comme nous l'avons vu, que le mode de glissement, qui a été supposé, des différentes fibres les unes par rapport aux autres, dans le sens de l'axe longitudinal de la pièce, puisse avoir pour effet de modifier la forme de la fibre moyenne.

Toutefois, voici l'hypothèse faite quand on veut tenir compte de l'effort tranchant. On suppose que le point γ' de la fibre moyenne, infiniment voisin de γ, subit un déplacement normal à la fibre moyenne dont la valeur est de la forme $\frac{T}{GS}\, d\sigma$, G étant une quantité analogue au coefficient d'élasticité E.

Dans ces conditions, on est amené à introduire dans les équations (II) et (III), respectivement, les termes

$$v = \int_{s_0}^{s} \frac{T}{GS}\, d\xi.$$

$$u = -\int_{s_0}^{s} \frac{T}{GS}\, d\eta.$$

En réalité, on n'en tient jamais compte en pratique, leur petitesse relative étant un motif suffisant pour cela.

M. Résal a calculé, en particulier, que pour des poutres droites

uniformément chargées, de longueur l et de hauteur h (la section étant rectangulaire), le rapport des flèches attribuables à l'effort tranchant et des flèches dues au moment fléchissant avait les valeurs suivantes :

$\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{2}$.
$\frac{f}{F} =$	0,0075	0,03	0,12	0,75

en supposant $G = \frac{2}{5} E$.

Or, dans la pratique des constructions, les pièces prismatiques fléchies n'ont jamais une hauteur supérieure au $\frac{1}{5}$ de leur longueur. Le rapport le plus usuel est voisin de $\frac{1}{10}$ et plutôt au-dessous. Du reste, nous rappelons que, dans le cas contraire, les conséquences tirées de la théorie de la Résistance des matériaux peuvent appeler certaines réserves.

Nous conclurons donc, avec M. Résal, qu'il est rationnel de négliger la déformation attribuable à l'effort tranchant et qu'il serait « non seulement inutile, mais illogique, de compliquer la besogne en se préoccupant d'un terme additionnel de déformation ».

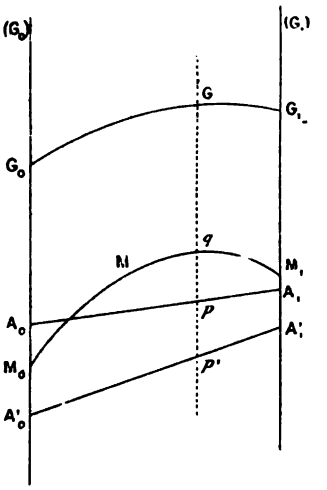
CHAPITRE VII.

LIGNES REPRÉSENTATIVES.
LIGNES D'INFLUENCE.
LIGNES ENVELOPPES. TRAVAIL DE DÉFORMATION.

I. — Lignes représentatives. lignes d'influence. lignes enveloppes.

Lignes représentatives. — Étant donnée une poutre $G_0 G_1$ comprise entre deux verticales (G_0) et (G_1), on peut avoir à envisager pour les différents points G de son axe longitudinal un effet déterminé, du reste quelconque, moment fléchissant, effort tranchant, fatigue, déformation, etc. sous l'action d'un système de charges déterminé.

Fig. 57.



On appelle *ligne représentative de cet effet* une courbe telle que $M_0 M M_1$, dont les ordonnées pq comptées suivant les verticales, ou lignes de rappel, à partir d'une droite de référence $A_0 A_1$, mesurent, à une certaine échelle, la valeur de l'effet produit au point G situé sur la même verticale.

C'est ainsi que le polygone funiculaire des forces verticales, appliquées à une travée, a été reconnu précédemment comme étant la ligne représentative du moment fléchissant produit aux différents points de cette travée, quand on la rapporte à une ligne de référence ou de fermeture convenable.

Une même courbe, rapportée à diverses lignes de référence, peut ainsi représenter plusieurs effets distincts, pourvu qu'ils ne diffèrent que par une fonction linéaire de l'abscisse du point G. Si la courbe rapportée à une première ligne de référence $A_0 A_1$ représente une certaine fonction m, rapportée à une autre ligne de référence telle que $A'_0 A'_1$, elle représente la fonction

$$M = m + A + Bx,$$

pourvu que la ligne $A'_0 A'_1$ rapportée à $A_0 A_1$ ait pour équation

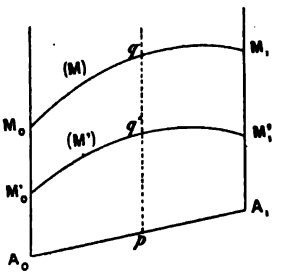
$$y = -A - Bx,$$

ou que, inversement, la ligne $A_0 A_1$ rapportée à $A'_0 A'_1$ ait pour équation

$$y = A + Bx.$$

Dans certains cas, il est utile de rapporter les ordonnées d'une ligne représentative, non plus à une droite de référence, mais à une autre courbe que l'on peut encore appeler la *ligne de référence*.

Fig. 58.



Par exemple, si l'on a deux courbes (M) et (M') qui, rapportées à une même droite de référence $A_0 A_1$, représentent deux fonctions (ou effets) désignées par les lettres M et M', la fonction (ou l'effet) M — M' sera évidemment représentée, sans nouvelle construction, par la différence $q'q$ des ordonnées des deux courbes et l'on pourra

dire que la courbe (M), rapportée à la ligne de référence courbe (M′) représente la fonction (ou effet) M — M′.

Dans le cas le plus général, une ligne représentative se construira par points. On cherchera la valeur de l'effet produit en un certain nombre de sections G de la poutre et l'on reliera les résultats obtenus par une courbe continue facilitant les interpolations.

Mais le cas type, auquel on cherche ordinairement à ramener tous les autres, est celui des moments fléchissants μ aux différents points d'une poutre sur appuis simples. La ligne représentative se construit alors comme le polygone funiculaire des charges directement appliquées, et cette image graphique précise les idées en même temps qu'elle abrège le langage.

Si l'on a, par exemple, à envisager une fonction telle que

$$M = A + Bx - \Sigma_g P(x - \alpha),$$

dans laquelle A et B sont des constantes et P une fonction prenant une suite de valeurs dépendant de la variable α, on remarquera que M ne diffère que par une fonction linéaire du moment fléchissant μ, produit au point G, d'abscisse x, par un ensemble de charges fictives égales à P et agissant sur les verticales (α). On trouvera donc sa ligne représentative au moyen d'un polygone funiculaire de ces charges fictives P, tracé sur le réseau des droites (α), puis on le rapportera à une ligne de référence convenable, que les conditions du problème permettront de déterminer. Si, en particulier, on sait d'avance que M doit s'annuler sur les deux verticales G_0 et G_1, cette fonction ne différera pas du moment fléchissant de la poutre sur appuis simples et la ligne de référence sera la corde comprise entre ces verticales.

Il en serait de même dans le cas d'une fonction telle que

$$M = A + Bx - \int_0^x p(x - \alpha)\, d\alpha,$$

lorsque p est une fonction continue de α, la seule différence consistant dans la considération des charges fictives infiniment petites $p\, d\alpha$, au lieu des charges fictives finies égales à P.

Si, en particulier, M était sous la forme

$$M = \frac{l - x}{l} \int_0^x p\alpha\, d\alpha + \frac{x}{l} \int_x^l p(l - \alpha)\, d\alpha,$$

on serait assuré que M ne diffère pas du moment fléchissant μ produit par les charges fictives $p\,d\alpha$ dans la poutre supposée sur appuis simples.

Lignes d'influence. — On simplifie notablement tous les problèmes de Résistance des matériaux en invoquant la loi de Hooke, qui s'applique évidemment à tous les effets produits par les charges. On peut à la limite réduire un système de charges quelconques à chacune des charges considérées isolément.

La loi de Hooke s'énonce de la manière suivante quand on l'envisage comme principe de superposition des effets des forces :

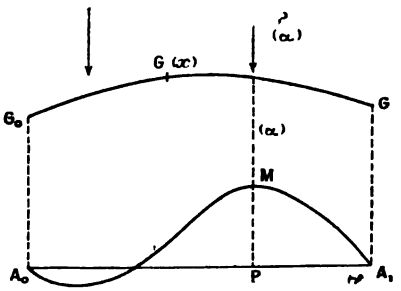
Si une force unité, appliquée successivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'une poutre, produit des effets $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en un même point G, des forces $P_1, P_2, \ldots, P_n$, appliquées simultanément aux différents points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivement, produiront en G un effet total

$$Y = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n.$$

Ce principe conduit immédiatement à la considération de la *ligne d'influence* de l'effet dont il s'agit.

Supposons qu'on envisage une charge unique de valeur unité parcourant la poutre d'un bout à l'autre, de gauche à droite, pour fixer les idées. A chaque instant, sa position est définitive par

Fig. 59.



l'abscisse α de la verticale qui représente sa ligne d'action. Si, pour chaque position, c'est-à-dire pour chaque valeur de α, on détermine la valeur $y = f(x, \alpha)$ de l'effet produit au point G (effet qui pourra être le moment fléchissant, ou l'effort tranchant, ou l'effort molé-

culaire maximum, etc.) et si, sur la verticale (α), on porte, à partir d'une ligne de référence A_0, A_1 (qui peut d'ailleurs être courbe), un segment PM représentant, à une échelle convenue, la valeur de y, l'ensemble des points M formera une courbe qu'on appellera la *ligne d'influence de l'effet produit au point* G.

Une fois en possession de cette ligne d'influence, on pourra obtenir sans peine l'effet produit au point G par un système quelconque de charges P_1, P_2, ..., P_n appliquées suivant les verticales (α_1), (α_2), ..., (α_n). On n'aura qu'à relever les ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ligne d'influence correspondant à ces verticales et à former l'expression

$$Y = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n.$$

Si l'on a affaire à une charge continue dont l'intensité en chaque point soit égal à p, de sorte que la charge de l'élément de longueur horizontale $d\alpha$, soit $p\,d\alpha$, et si cette charge continue est appliquée depuis l'abscisse α_0 jusqu'à l'abscisse α_1 on aura évidemment

$$Y = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} y p \, d\alpha.$$

On peut même toujours conserver comme limites d'intégration o et l et écrire :

$$Y = \int_0^l y p \, d\alpha,$$

étant entendu que p est nul en dehors de l'intervalle α_0, α_1.

Lorsque p et y sont des fonctions simples de α, on peut quelquefois effectuer l'intégration et mettre Y sous forme explicite.

Quand cela n'a pas lieu, on fait pratiquement les sommations par quadratures, en divisant l'intervalle de o à l en intervalles partiels $\Delta\alpha$, au milieu desquels on relève les ordonnées de la ligne d'influence, dont on multiplie la valeur par la charge partielle correspondante $p\Delta\alpha$.

Lorsque p est constant, entre les limites α_0, α_1, on a

$$Y = p \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} y \, d\alpha.$$

Il suffit alors de multiplier par p l'aire de la ligne d'influence comprise entre les abscisses α_0 et α_1.

Lorsqu'on a affaire à une série de charges isolées P, toutes égales et régulièrement espacées, leur intervalle étant $\Delta\alpha$, la valeur de Y peut s'écrire

$$Y = P(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{P}{\Delta\alpha}(y_1 \Delta\alpha + y_2 \Delta\alpha + \ldots + y_n \Delta\alpha).$$

La parenthèse représente la valeur approchée de l'aire de la ligne d'influence, telle qu'on l'obtiendrait par quadratures en divisant l'intervalle o — l en intervalles partiels $\Delta\alpha$. Le quotient $\frac{P}{\Delta\alpha}$ est la charge moyenne par mètre courant. On peut donc, *toutes les fois que les intervalles $\Delta\alpha$ sont relativement petits par rapport à l'intervalle total*, obtenir une approximation suffisante en remplaçant les charges isolées par une charge continue $\frac{P}{\Delta\alpha}$, égale à la charge moyenne par mètre courant.

Il n'est même pas nécessaire, pour qu'on puisse légitimement opérer une semblable substitution, que les intervalles $\Delta\alpha$ soient égaux, c'est-à-dire que les charges soient régulièrement espacées. Il suffit que $\frac{P}{\Delta\alpha}$ soit constant, c'est-à-dire que la charge moyenne par mètre courant soit partout la même. Le degré d'approximation devient, en général, satisfaisant en pratique dès que l'intervalle total est divisé en cinq ou six intervalles partiels.

Si la ligne d'influence coupe une ou plusieurs fois la ligne de référence, elle se divisera en zones positives et négatives, auxquelles correspondront des effets de sens contraire. L'étude de ces zones permettra de reconnaître quel groupement de charges, parmi toutes les charges simultanément possibles, produira l'effet maximum positif ou l'effet maximum négatif.

Le tracé des lignes d'influence constitue donc une méthode d'une grande généralité et d'une très grande utilité.

Il peut arriver que dans certains cas simples l'effet envisagé ait une définition analytique permettant de trouver son expression explicite en fonction de l'abscisse α. Cette expression ne sera pas alors autre chose que l'équation de la ligne d'influence.

Mais, en général, on obtiendra le tracé d'une ligne d'influence par points. On donnera à la charge un certain nombre de positions déterminées et l'on en déduira les effets produits correspondant à ces positions. Entre les points obtenus on tracera une ligne con-

tinue. Il est *essentiel de remarquer que la détermination de l'effet produit par une charge unique est dans tous les cas le problème le plus simple que l'on puisse se poser.*

On peut du reste, de plusieurs façons, profiter des circonstances pour simplifier les opérations matérielles du tracé des lignes d'influences relatives à un ensemble de sections transversales G.

Il arrive souvent que l'effet produit y, dans une section arbitraire G, peut s'exprimer par une fonction linéaire des effets z, v, w, produits dans une section origine, ou par une fonction linéaire des réactions d'appui, par exemple; on a alors une expression de la forme

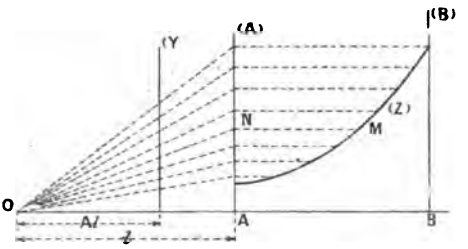
$$y = Az + Bv + Cw;$$

les coefficients A, B, C dépendant de la position de la section G.

Si l'on a tracé la ligne d'influence de l'effet z, celle de l'effet v et celle de l'effet w, on pourra en déduire la ligne d'influence de y, dans la section G, et dans toutes les autres sections, d'une manière fort simple. On amplifiera les ordonnées de z dans le rapport A, celles de v dans le rapport B, celles de w dans le rapport C, et l'on fera la somme des trois ordonnées amplifiées correspondantes.

Pour amplifier les ordonnées d'une courbe telle que (z) dans le rapport A, on a avantage, à défaut de compas de réduction, à pro-

Fig. 60.



céder comme il suit : on construit sur la verticale (A) l'échelle fonctionnelle de z en traçant, par exemple, des parallèles MN à la ligne de référence AB par un certain nombre de points M convenablement choisis. Si d'un point O, situé à la distance l de la verticale (A), on trace le faisceau des droites ON, ce faisceau découpera sur la verticale (Y), située à une distance Al du point O, l'échelle fonctionnelle de $Y = Az$.

Il arrive aussi très souvent que l'on puisse construire facilement la ligne représentative de l'effet produit par une même charge P, d'abscisse α, dans toutes les sections transversales de la poutre. C'est la courbe dont l'équation est $y = f(x\alpha)$, équation dans laquelle α est considéré, cette fois, comme un paramètre donné, et x est considéré comme la variable. Cette ligne fournit alors un point de chacune des lignes d'influence qu'on peut avoir simultanément à envisager pour un groupe de sections transversales. Ce sont tous les points correspondant à l'abscisse α. On conçoit donc que si l'on a tracé un certain nombre de ces lignes représentatives, correspondant à différentes valeurs de α, on en puisse déduire la série des lignes d'influence cherchées.

Il ne s'agit là, au fond, que de grouper d'une manière systématique les résultats fournis par les lignes représentatives tracées. Nous utiliserons assez largement ce procédé indirect qui est souvent plus pratique que la recherche directe des lignes d'influence et qui est particulièrement indiqué lorsque les lignes représentatives sont formées de lignes droites.

Mais il y a une foule de questions dans lesquelles l'effet produit apparaît comme égal (ou proportionnel) à une intégrale définie particulière et où la ligne d'influence peut se tracer aussi simplement qu'une ligne représentative du moment fléchissant d'un système de charges fictives. Ce cas mérite une attention spéciale.

Supposons que l'effet considéré Φ se présente dans les calculs sous la forme

$$\Phi = \int_0^l \mu\varphi \, d\xi,$$

l'intégration étant faite entre les deux extrémités de la poutre. La fonction φ est une fonction de la variable d'intégration ξ, et μ est la fonction particulière de ξ et de l'abscisse α de la charge mobile, qui exprime le moment fléchissant produit dans la section (ξ) de la poutre sur appuis simples par une charge unité placée à l'abscisse α. μ a donc la définition suivante, qu'il est bon de rappeler.

Pour

$$0 < \xi < \alpha, \qquad \mu = \frac{l-\alpha}{l}\xi;$$

Pour

$$\alpha < \xi < l, \qquad \mu = \frac{\alpha}{l}(l-\xi).$$

Il est évident que l'intégrale Φ peut se décomposer en deux autres, prises entre les limites o et α d'une part, et α et l d'autre part, la fonction μ changeant de définition à la limite séparative de ces deux intervalles. On a

$$\Phi = \int_0^\alpha \frac{l-\alpha}{l} \xi\varphi \, d\xi + \int_\alpha \frac{\alpha}{l}(l-\xi)\varphi \, d\xi$$

ou

$$\Phi = \frac{l-\alpha}{l} \int_0^\alpha \xi\varphi \, d\xi + \frac{\alpha}{l} \int_\alpha^l (l-\xi)\varphi \, d\xi.$$

On reconnaît aisément sous cette forme que Φ n'est pas autre chose que le moment fléchissant produit dans la section d'abscisse α par une charge continue fictive dont l'intensité serait égale en chaque point à φ, la charge de chaque élément de longueur $d\xi$ étant $\varphi d\xi$, la poutre étant d'ailleurs supposée portée par deux appuis simples à ses extrémités.

On obtiendra donc la valeur de l'intégrale Φ, pour une valeur déterminée de α, en construisant sur le réseau des verticales (ξ) une courbe funiculaire des charges fictives $\varphi d\xi$ et en prenant sur la verticale (α) l'ordonnée de cette courbe comptée à partir de sa ligne de fermeture.

Comme le système des charges fictives $\varphi d\xi$ ne change pas lorsque α varie, on en conclut que la courbe funiculaire, rapportée à sa ligne de fermeture, constitue la ligne d'influence de Φ.

Remarque I. — La distance polaire servant à tracer la courbe funiculaire est en théorie égale à l'unité, soit de longueur, soit de charge. En pratique, si elle vaut n unités, il faudra bien entendu multiplier par n les ordonnées trouvées.

Remarque II. — Il est bien évident que si φ est de la forme $\frac{\varphi'}{EI}$, φ' et I étant des fonctions de ξ, variable d'intégration, on pourra, au lieu des charges fictives $\varphi d\xi$, envisager les charges fictives $\varphi' d\xi$, à la seule condition de supposer que la courbe funiculaire est tracée, non plus avec une distance polaire fixe (égale à l'unité), mais avec une distance polaire variable égale à EI.

Remarque III. — On pourra appeler *ligne de charge* la courbe

$y = \varphi$ qui représente la fonction φ, ou encore, dans le cas précédent, la fonction $y = \varphi'$. C'est l'ordonnée de cette courbe qui définit en effet l'intensité de la charge fictive en chaque point.

Lignes enveloppes ou courbes des effets maxima et minima. — Il y a une troisième espèce de courbes utiles à considérer lorsqu'on étudie une poutre sur laquelle peuvent agir des surcharges variables, telles qu'un convoi de chemin de fer, en même temps qu'une charge permanente. L'effet produit dans une section de la poutre par la surcharge variable peut prendre tout une série de valeurs entre un certain minimum et un certain maximum, le minimum et le maximum pouvant d'ailleurs être des quantités de même signe ou de signes contraires. En les superposant à l'effet produit au même point par la charge permanente, on obtient les deux limites extrêmes entre lesquelles se tient l'effet total, limites qu'il est important de déterminer.

Si l'on a trouvé ces limites extrêmes de l'effet considéré pour une série de sections G de la poutre, on pourra construire par points les deux courbes qui leur correspondent. On les appelle généralement des *lignes enveloppes*, et cela tient à la nature de l'un des procédés que l'on peut employer pour leur détermination.

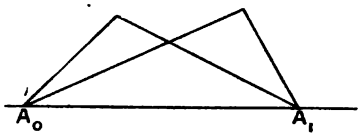
Le procédé le plus direct et le plus simple consiste, la plupart du temps, dans l'emploi des lignes d'influence. Une fois tracée la ligne d'influence pour une section G, on en déduit sans difficulté l'effet produit tant par la charge permanente que par les surcharges variables. Les surcharges conduisant aux valeurs extrêmes sont presque déterminables à vue. En opérant ainsi pour un certain nombre de sections, on obtiendra par points les courbes des effets maxima et minima.

Mais, dans certains cas, ceux où il est plus facile de tracer une ligne représentative de l'effet produit que de tracer une ligne d'influence, on est conduit à opérer autrement. On détermine, pour un certain nombre de positions arbitraires de la surcharge, les lignes représentatives de l'effet. Les courbes des effets maxima apparaissent alors comme des courbes enveloppes de la série de ces lignes représentatives.

Il existe un cas où les courbes enveloppes peuvent se tracer

directement. C'est celui où *la surcharge variable est uniformément répartie et où les lignes d'influence relatives à toutes les sections présentent soit une seule zone sur toute la longueur de la poutre, soit plusieurs zones avec des points de passage invariables.* Dans ce cas, pour obtenir les valeurs extrêmes de

Fig. 61.



l'effet, il est bien évident qu'il faut surcharger la poutre d'une manière identique, quelle que soit la section. Alors les courbes des effets maxima et minima sont tout simplement les *lignes représentatives* relatives aux surcharges couvrant les régions de la poutre qui correspondent aux zones prépondérantes des lignes d'influence, tant négatives que positives.

Quelquefois, ces circonstances se rencontrent pour certaines régions de la poutre et cessent de se présenter pour d'autres régions. La remarque qui précède n'en est pas moins précieuse pour le tracé des courbes dans les régions où elle s'applique.

Il ne faut jamais oublier que cela ne s'applique qu'au cas d'une surcharge variable uniformément répartie, ou assimilable à une semblable surcharge.

Dans le cas général, c'est donc la méthode des lignes d'influence qui paraît la plus systématique, et c'est pour cela que nous chercherons, dans toutes les études particulières subséquentes, à parvenir au tracé de ces lignes d'influence.

II. — Travail de déformation dans un corps élastique.

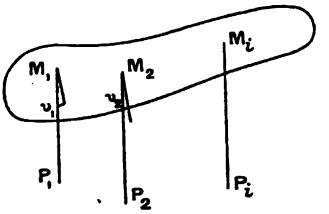
Travail des forces appliquées. — Considérons un corps élastique soumis à l'action de plusieurs forces *analytiquement indépendantes* $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$, supposées appliquées graduellement et sans choc aux points $M_1, M_2, \ldots, M_i$. Les points d'application de ces forces ont subi des déplacements, dont nous considérerons uniquement les composantes $v_1, v_2, \ldots, v_i$ dans la direction des forces correspondantes.

Le travail dépensé pour produire la déformation du corps a pour expression générale

$$W = \frac{1}{2} \Sigma P v, \tag{1}$$

pourvu que l'on admette la loi de Hooke, ou le principe de superposition des effets des forces. Si un premier système de forces $P_1, P_2, \ldots, P_i$ amène en un point M un déplacement v, et

Fig. 62.



si un deuxième système de forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_i$ amène au même point M un déplacement v', le déplacement total correspondant aux deux systèmes de forces agissant simultanément sera $v + v'$.

Inversement, si à un système de déplacements $v_1, v_2, \ldots, v_i$ des points $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$ correspond un système de forces $P_1, P_2, \ldots, P_i$, et si à un deuxième système de déplacements $v'_1, v'_2, \ldots, v'_i$ correspond un système de forces $P'_1, P'_2, \ldots, P'_i$ à un troisième système, comportant les déplacements $v_1 + v'_1$, $v_2 + v'_2, \ldots, v_i + v'_i$, correspondra le système des forces $P_1 + P'_1$, $P_2 + P'_2, \ldots, P_i + P'_i$.

Si, partant d'un état déformé (A), on passe à un second état déformé (A') provenant de l'altération simultanée des forces P dans le rapport de n à 1, le déplacement v du point M d'application de la force P variera aussi dans le même rapport de n à 1. On peut donc, pour calculer le travail total dans l'état A, supposer que les forces étant d'abord nulles partout, on les fasse croître chacune proportionnellement à la valeur qu'elle doit obtenir finalement dans le système (A). A un instant quelconque de la mise en charge, la force appliquée en M sera nP, et le déplacement nv.

Pendant que n croît de n à $n + \delta n$, le point M supporte une force nP et son déplacement s'augmente de $v\delta n$. Le travail correspondant est

$$Pv \times n\,\delta n,$$

et le travail pour l'ensemble des forces est

$$n\,\delta n\,\Sigma P v.$$

Le travail total produit par le système (A) sera donc bien

$$\Sigma P v \int_0^1 n\,dn = \frac{1}{2}\Sigma P v = W.$$

Supposons maintenant que le corps passe d'un état déformé (A) à un second état déformé (A'), par une suite d'opérations au cours desquelles les différentes forces croissent simultanément et chacune proportionnellement à son accroissement total $P' - P$.

Si à un instant quelconque de la mise en charge la force appliquée au point M est

$$P + n(P' - P),$$

le déplacement du point M sera

$$v + n(v' - v).$$

Le travail correspondant à l'accroissement de déplacement $\delta n(v' - v)$ sera

$$[P + n(P' - P)](v' - v)\,\delta n,$$

et pour la somme de ces accroissements δn on aura

$$\int_0^1 [P + n(P' - P)](v' - v)\,\delta n = (v' - v)\left[P + \frac{1}{2}(P' - P)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(v' - v)(P + P').$$

Le travail total de déformation du système sera par suite

$$(2)\quad W' - W = \frac{1}{2}\Sigma(v' - v)(P + P') = \frac{1}{2}\Sigma v' P - \frac{1}{2}\Sigma v P' + W' - W),$$

puisque

$$\frac{1}{2}\Sigma v P = W \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\Sigma v' P' = W'.$$

On en déduit comme conséquence

$$(3)\qquad \Sigma P v' = \Sigma P' v.$$

Par suite, *si l'on multiplie les charges appliquées aux différents points* M *dans l'état* (A) *par les déplacements correspondants à l'état* (B) *et que l'on forme la somme des produits*,

on obtient le même résultat qu'en inversant les états (A) *et* (B). C'est une loi de réciprocité générale.

L'équation (2) pourrait encore s'écrire

$$(2) \qquad W' - W = \frac{1}{2}\Sigma(v + v')(P' - P),$$

car en développant le second membre on obtient

$$\frac{1}{2}\Sigma v P' - \frac{1}{2}\Sigma v' P + \frac{1}{2}\Sigma v' P' - \frac{1}{2}\Sigma v P = W' - W,$$

en vertu de l'égalité (3).

Théorèmes de Castigliano. — En supposant que l'état (B) soit infiniment voisin de l'état (A), les équations (2) peuvent s'écrire

$$(4) \qquad dW = \Sigma P\, dv = \Sigma v\, dP.$$

Les déplacements v sont des fonctions des forces P et réciproquement. Si dans W on remplace les P par leurs valeurs en fonction des v, on aura pour W une fonction des v seulement. L'équation (4), sous la forme

$$dW = \Sigma P\, dv,$$

montre alors que la différentielle partielle de W par rapport à la variable indépendante v est égale à P; on a donc, d'une manière générale,

$$(5) \qquad P = \frac{dW}{dv}.$$

De même, si l'on remplace les v par leurs valeurs en fonction des charges P, W devient une fonction des seules variables indépendantes P. L'équation (4), sous la forme

$$dW = \Sigma v\, dP,$$

montre que v est la différentielle partielle de W par rapport à P, ce que l'on écrit

$$(6) \qquad v = \frac{dW}{dP}.$$

Cette relation montre que le *déplacement du point d'application* M *d'une force extérieure* P *est la dérivée partielle du travail de déformation prise par rapport à la force considérée.* Cet énoncé constitue ce que l'on appelle le *théorème de Castigliano.*

Si on l'applique à une force extérieure *indépendante* choisie de

telle façon qu'elle ne produise aucun travail, ou autrement dit que son point d'application se déplace perpendiculairement à sa direction, on doit avoir $v = 0$. *On en déduit que la dérivée partielle du travail de déformation prise par rapport à une pareille force est nulle.*

Cela arrive notamment pour la force qui représente la réaction d'un appui fixe, c'est-à-dire tel que le point de la poutre en contact avec l'appui ne subit aucun déplacement, ou tout au moins ne subit que des déplacements perpendiculaires à la direction de la réaction de l'appui. La relation (6) fournit alors une des conditions du problème d'équilibre de la poutre.

Cette seconde proposition s'énonce quelquefois d'une manière un peu différente.

La condition

$$\frac{\partial W}{\partial P} = 0$$

est la condition pour que P rende W minimum. On peut donc dire que, *une force de liaison dont le travail est nul est telle que le travail de déformation soit minimum.*

De là le nom de théorème *du travail minimum* donné à cette propriété.

Pour que le théorème précédent s'applique, il n'est pas nécessaire que P soit une force. Ce peut être, par exemple, un couple M, mais alors ce qui a été appelé le déplacement v est à remplacer par l'angle φ de rotation du bras de levier du couple, car ce qui importe c'est que le travail soit représenté par un produit tel que Pv ou $M\varphi$.

Par contre, le théorème suppose expressément qu'il s'agit d'une réaction d'appui indépendante analytiquement des forces appliquées, ce qui veut dire qu'on a éliminé au préalable certaines des réactions d'appui en faisant usage des équations d'équilibre statique.

Théorème de Maxwell. — Si le corps suit la loi de Hooke, les déplacements v sont des fonctions linéaires des charges. On a, par exemple,

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 + \alpha_{13} P_3 + \ldots, \\ v_2 &= \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 + \alpha_{23} P_3 + \ldots, \\ v_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Inversement, on pourrait exprimer les P en fonction des v par des équations linéaires telles que

$$\begin{aligned} P_1 &= \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \beta_{13} v_3 + \ldots, \\ P_2 &= \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \beta_{23} v_3 + \ldots, \\ P_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si, dans l'expression de $W = \frac{1}{2} \Sigma P v$, on remplace les v par leurs valeurs, on obtient une fonction homogène et du second degré par rapport aux charges P.

Si, au contraire, on remplace les P par leurs valeurs en fonction des v, on obtient une fonction homogène et du second degré par rapport aux déplacements v, que l'on distinguera de la précédente en l'appelant W'.

En vertu des équations (5) et (6) on a, d'une manière générale,

$$v = \frac{dW}{dP}, \qquad P = \frac{dW'}{dv}.$$

On a, en particulier,

$$v_1 = \frac{dW}{dP_1}, \qquad v_2 = \frac{dW}{dP_2}.$$

On en déduit

$$\frac{dv_1}{dP_2} = \frac{d^2 W}{dP_1\, dP_2} = \frac{d^2 W}{dP_2\, dP_1} = \frac{dv_2}{dP_1}.$$

Cela exige l'égalité des coefficients α_{12} et α_{21} et l'on trouverait, d'une manière analogue, la relation générale

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp}.$$

Cette relation exprime que, *si en* M_p *on applique une force égale à l'unité, le déplacement qui en résulte en un autre point* M_q *est égal au déplacement qui se produirait en* M_p *sous l'action d'une force unité appliquée en* M_q.

On déduirait d'une manière analogue l'égalité

$$\beta_{pq} = \beta_{qp}$$

qui est, du reste, une conséquence de la précédente. Elle exprime que *la force nécessaire au point* M_p *pour produire en* M_q *un déplacement égal à l'unité est égale à la force qu'il faudrait appliquer en* M_q *pour produire en* M_p *un déplacement égal.*

C'est dans l'ensemble de ces deux propositions, et particulièrement dans la première, que consiste le théorème de Maxwell. Elles ne sont, au fond, qu'une conséquence de l'équation de réciprocité plus générale, exprimée par l'équation (3) ci-dessus.

Application du principe de conservation de l'énergie. Travail des forces intérieures. — Les principes qui précèdent ont une portée tout à fait générale. On constate, surtout à l'étranger, une tendance à en faire la base de la Résistance des Matériaux, en les adjoignant au principe de la conservation de l'énergie. Quand les forces agissant sur le corps sont appliquées lentement, il est naturel d'admettre qu'il n'y a aucune dissipation d'énergie, ni sous forme de force vive, ni sous forme de chaleur. Le travail dépensé par les forces appliquées doit alors s'emmagasiner intégralement dans le corps sous forme d'énergie potentielle et il doit être égal au travail des tensions intérieures.

Si donc il est possible, pour un problème donné, de former l'expression du travail des tensions intérieures, on pourra déduire, notamment des théorèmes de Castigliano et de Maxwell, des conséquences intéressantes sur les relations existant entre les déplacements, les forces appliquées et les variables intermédiaires (telles que le moment fléchissant) qui peuvent figurer dans l'expression du travail.

On peut même, dans certaines questions particulières, parvenir à des expressions distinctes : 1° pour le travail des forces appliquées ; 2° pour le travail des forces intérieures en fonction d'une même série de variables intermédiaires, par exemple, les déplacements v, et leurs dérivées. En identifiant ces expressions, on peut parvenir aux équations différentielles constituant la solution du problème, et même discuter les cas de stabilité ou d'instabilité d'équilibre. L'équilibre n'est stable, par exemple, que lorsque les déplacements virtuels autour de la position d'équilibre nécessitent un travail positif des forces intérieures.

Nous ne pouvons, dans ces leçons, donner que des indications sommaires sur les développements de cette théorie.

Évaluation du travail de déformation des forces intérieures dans une poutre prismatique. — On peut, quand il s'agit d'une

poutre prismatique à laquelle les principes de la Résistance des Matériaux sont applicables, évaluer d'une manière assez simple le travail des tensions intérieures, et par suite le travail de déformation.

Supposons un prisme élémentaire de longueur $d\sigma$. Sur la fibre qui correspond à l'élément $d\mathrm{S}$ de la section transversale, la force appliquée est

$$n\,d\mathrm{S} = \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}} + \frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}\right) d\mathrm{S}.$$

Le déplacement de l'une des extrémités de la fibre, l'autre étant supposée fixe, est

$$\lambda = \frac{d\sigma}{\mathrm{E}}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}} + \frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}\right).$$

Le travail produit par le raccourcissement de la fibre est donc

$$\lambda\frac{n\,d\mathrm{S}}{2} = \frac{1}{2\mathrm{E}}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}} + \frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}\right)^2 d\mathrm{S}\,d\sigma.$$

En intégrant pour toutes les fibres de la section, on trouve

$$\frac{d\sigma}{2\mathrm{E}}\left[\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{S}^2}\int d\mathrm{S} + \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{I}^2}\int v^2\,d\mathrm{S} + \frac{2\mathrm{MN}}{\mathrm{SI}}\int v\,d\mathrm{S}\right]$$
$$= \frac{d\sigma}{2\mathrm{E}}\left[\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{S}} + \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{I}}\right] = \frac{\mathrm{N}^2\,d\sigma}{2\mathrm{ES}} + \frac{\mathrm{M}^2\,d\sigma}{2\mathrm{EI}},$$

et le travail de déformation total est le résultat de l'intégration pour toute la longueur de la poutre.

Si l'on veut tenir compte des actions tangentielles provenant de l'effort tranchant, on supposera que le glissement relatif d'une des bases du prisme élémentaire par rapport à l'autre est de la forme $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{GS}}d\sigma$, G étant un coefficient convenable. Le travail de l'effort tranchant T pendant ce glissement sera

$$\frac{\mathrm{T}}{2} \times \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{GS}}d\sigma = \frac{\mathrm{T}^2}{2\mathrm{GS}}d\sigma \quad (^1).$$

---

(1) Cette expression n'est qu'approchée en ce qu'elle suppose partout l'effort tranchant élémentaire t égal à sa valeur moyenne $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{S}}$. S'il y avait un intérêt réel à préciser, voici comment il conviendrait de la modifier.

Pour une tranche élémentaire de longueur $d\sigma$, de largeur u et de hauteur dv,

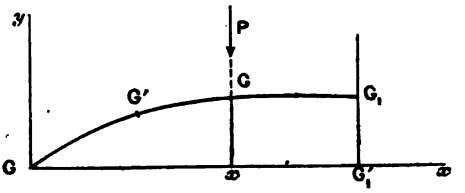
Le travail de déformation total sera donné par l'expression

$$W = \frac{1}{2E}\int \frac{N^2}{S}\,d\sigma + \frac{1}{2E}\int \frac{M^2}{I}\,d\sigma + \frac{1}{2G}\int \frac{T^2}{S}\,d\sigma.$$

On néglige toujours le dernier terme, dont la valeur n'est du reste qu'approchée, et c'est le terme contenant M qui joue toujours le rôle prépondérant.

Équation de la ligne élastique déduite du théorème de Castigliano. — Supposons une poutre soumise à des charges quelconques, et cherchons à déterminer le déplacement vertical v subi par un point G, d'abscisse x.

Fig. 63.



Imaginons qu'au point G on fasse agir une force verticale, infiniment petite P. Cette force fictive n'aura aucune influence réelle sur le déplacement v. Mais si on la suppose introduite dans

---

l'effort tranchant t, force tangentielle appliquée à ses deux bases, a pour valeur $tu\,d\sigma = \frac{T}{I}m\,d\sigma$ Cette force tangentielle produit un glissement relatif de ces bases égal à $\frac{t\,dv}{G}$, G étant un coefficient convenable. Le travail de déformation correspondant à la tranche est donc

$$\frac{d\sigma}{G}\,t^2 u\,dv = \frac{T^2\,d\sigma}{GI^2}\,\frac{m^2}{u}\,dv.$$

Celui qui correspond au prisme élémentaire tout entier serait

$$\frac{T^2\,d\sigma}{GI^2}\int_{v_0}^{v_1}\frac{m^2}{u}\,dv;$$

l'intégrale qui figure dans cette expression, n'ayant aucun rapport obligé avec S ou avec I, et dépendant de la forme de la section. Son rapport à I^2 a les mêmes dimensions L^{-2} que l'inverse de la surface. Pour une section rectangulaire, ce rapport est égal à $\frac{6}{5S}$, comme si la section réelle était diminuée de $\frac{1}{6}$.

l'expression du travail de déformation, le déplacement v n'en sera pas moins donné, au point de vue analytique, par l'expression (6)

$$v = \frac{dW}{dP}.$$

Si, d'autre part, on néglige dans l'expression de W les termes provenant de l'effort normal et de l'effort tranchant, on aura simplement

$$v = \int \frac{dM}{dP} \frac{M}{EI} d\sigma = \int \frac{dM}{dP} \frac{M}{EJ} d\xi,$$

en faisant intervenir le moment d'inertie réduit J.

Il reste à voir ce qu'est la quantité $\frac{dM}{dP}$.

Soit μ le moment fléchissant que produirait au point G', de coordonnées (ξ, η), une force verticale unité appliquée au point G, dans l'hypothèse d'appuis simples et soient A, B, C les composantes de la réaction complémentaire de l'appui de gauche G_0.

Les termes qui seront introduits dans l'expression du moment fléchissant M, par l'adjonction de la force P, seront

$$P(\mu + A + B\xi - C\eta).$$

Mais il importe de remarquer que les réactions complémentaires PA, PB, PC, bien que proportionnelles en réalité à P, sont néanmoins des forces appliquées distinctes de P, au point de vue analytique. Ainsi que nous l'avons fait observer précédemment, l'équilibre de la poutre serait assuré sans l'intervention de ces réactions complémentaires, qui peuvent être considérées comme introduites après coup, par une sorte de réglage ultérieur des appuis.

En conséquence de ces considérations, la dérivée partielle $\frac{dM}{dP}$, qui figure dans l'expression de v, doit se réduire simplement à μ, dont l'expression analytique est, comme on l'a vu plus haut,

$$\mu = \frac{l - x}{l} \xi \qquad \text{pour} \qquad \xi < x$$

et

$$\mu = \frac{x}{l}(l - \xi) \qquad \text{pour} \qquad \xi > x.$$

On obtient donc finalement pour v l'expression

$$v = \int \mu \frac{M}{EJ} d\xi = \frac{l-x}{l} \int_0^x \xi \frac{M}{EJ} d\xi + \frac{x}{l} \int_x^l (l-\xi) \frac{M}{EJ} d\xi.$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît immédiatement que v est le moment fléchissant qui serait produit au point G, d'abscisse x, par un ensemble de charges fictives $\frac{M\,d\xi}{EJ}$ agissant aux différents points, d'abscisse ξ, de la poutre.

C'est identiquement le résultat obtenu précédemment par une autre méthode.

Bien entendu, ici v est compté positivement de haut en bas, tandis que dans les équations de Bresse le déplacement vertical est compté en sens inverse; c'est ce qui explique que l'on ait les charges fictives $\frac{M\,d\xi}{EJ}$, au lieu de ces mêmes charges changées de signe.

Il faut remarquer aussi que la considération du travail de déformation ne peut conduire qu'à la connaissance de la nouvelle forme prise par la poutre et non à la connaissance de sa nouvelle situation dans l'espace. Si, notamment, les extrémités G_0 et G_1, au lieu d'être fixes, subissaient des déplacements v_0 et v_1, il faudrait évidemment en tenir compte dans l'évaluation du déplacement total v du point G. Cela revient à changer la ligne de référence à laquelle serait rapportée la ligne élastique.

On pourrait développer une théorie toute semblable à l'égard du déplacement horizontal u. On commencerait par définir un système d'appuis statiques pour la poutre soumise à des forces horizontales, et une fonction analogue à μ.

Considérations générales sur la recherche des réactions complémentaires d'appuis. — Dans les études particulières que nous ferons ultérieurement pour diverses espèces de poutres, nous utiliserons de préférence et d'une manière presque exclusive les équations de Bresse, qui sont d'un usage courant en France et qui, au surplus, sont mises d'avance sous la forme explicite la plus convenable. Mais il n'est pas sans intérêt de montrer que le théorème du travail minimum fournit les mêmes conditions.

Comme exemple nous prendrons le cas d'une poutre encastrée

à ses deux extrémités, ces extrémités étant d'ailleurs rigoureusement fixes sur leurs appuis. Ces conditions s'expriment par les suppositions

$$\omega_0 = \omega_1 = 0,$$
$$v_0 = v_1 = 0,$$
$$u_0 = u_1 = 0,$$

introduites dans les équations de Bresse, appliquées à la poutre entière.

En désignant par le signe $\int$ sans indice une intégration s'appliquant à toute la longueur de la poutre, on aura donc les trois équations de condition

$$\int \frac{M}{EI} d\sigma = 0,$$
$$\int \frac{M}{EI}(l - \xi)\, d\sigma - \int \frac{N}{ES} d\eta = 0,$$
$$\int \frac{M}{EI}(h - \eta)\, d\sigma + \int \frac{N}{ES} d\xi = 0,$$

l et h désignant les coordonnées de l'extrémité G_1.

En tenant compte de la première équation, les deux autres se simplifient et finalement les trois équations à envisager sont :

$$\int \frac{M}{EI} d\sigma = 0,$$
$$\int \frac{M}{EI} \xi\, d\sigma + \int \frac{N}{ES} d\eta = 0,$$
$$\int \frac{M}{EI} \eta\, d\sigma - \int \frac{N}{ES} d\xi = 0.$$

Dans ces équations on aura d'ailleurs à introduire les expressions de M et de N en fonction des réactions complémentaires d'appuis A, B, C, qui sont l'objet de la recherche. On aura, d'une manière générale,

$$M = \mu + A + B\xi - C\eta,$$
$$N = \nu + B\frac{d\eta}{d\sigma} + C\frac{d\xi}{d\sigma},$$

ν étant l'effort normal (généralement négligeable) qui correspondrait à la poutre posée sur appuis simples.

Appliquons maintenant le théorème du travail minimum, en

négligeant, bien entendu, dans l'expression de W le terme relatif à l'effort tranchant.

Les réactions complémentaires d'appui qui, comme nous l'avons observé précédemment, interviennent analytiquement comme des forces indépendantes sont telles, qu'elles ne produisent aucun travail, les extrémités étant complètement fixes. Les trois composantes A, B, C sont d'ailleurs analytiquement indépendantes entre elles. Elles doivent donc chacune donner lieu à une relation de la forme $\frac{dW}{dP} = 0$. Ces trois relations s'écriront respectivement

$$\frac{dW}{dA} = 0, \qquad \frac{dW}{dB} = 0, \qquad \frac{dW}{dC} = 0,$$

ou encore, en prenant l'expression explicite de W, en fonction de M et N,

$$\int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dA}d\sigma + \int \frac{N}{ES}\frac{dN}{dA}d\sigma = 0,$$
$$\int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dB}d\sigma + \int \frac{N}{ES}\frac{dN}{dB}d\sigma = 0,$$
$$\int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dC}d\sigma + \int \frac{N}{ES}\frac{dN}{dC}d\sigma = 0.$$

Or, d'après les expressions précédemment écrites de M et N, on a

$$\frac{dM}{dA} = 1, \qquad \frac{dM}{dB} = \xi, \qquad \frac{dM}{dC} = -\eta,$$
$$\frac{dN}{dA} = 0, \qquad \frac{dN}{dB} = \frac{d\eta}{d\sigma}, \qquad \frac{dN}{dC} = \frac{d\xi}{d\sigma}.$$

En les substituant, on retombe identiquement sur les équations de condition déjà trouvées.

Application du théorème de Maxwell à la recherche de la ligne d'influence du déplacement vertical v. — Soit une force P, verticale, égale à l'unité, appliquée successivement au droit d'un point variable G′ de la poutre, d'abscisse ξ, si l'on détermine le déplacement vertical que cette force fait subir à un point G, d'abscisse x, supposé fixe, on aura une certaine fonction

$$v_{\xi x}$$

des deux variables ξ et x, qui, en considérant x comme constant, représente la ligne d'influence du déplacement du point G.

Le théorème de Maxwell enseigne que

$$v_{\xi x} = v_{x\xi},$$

$v_{x\xi}$ représentant le déplacement subi par le point G' (ξ) sous l'action d'une charge unité placée au droit du point G (x).

Il en résulte que la ligne d'influence du déplacement du point G n'est pas autre chose que la ligne représentative du déplacement du point variable G', sous l'action d'une charge unité placée au droit de G, c'est-à-dire se confond avec la ligne élastique correspondant à cette charge unité.

On ramène donc ainsi à la construction d'une ligne élastique la recherche de la ligne d'influence du déplacement vertical v.

CHAPITRE VIII.

POUTRE DROITE REPOSANT SUR DEUX APPUIS SIMPLES.

I. — Étude des efforts.

Rappel de résultats précédemment obtenus. — Nous avons déjà fait en grande partie l'étude des poutres droites sur appuis simples, en faisant l'étude plus générale des poutres quelconques sur appuis simples.

La seule particularité essentielle à noter ici, c'est que nous supposons l'axe longitudinal rectiligne et, pour préciser les idées, nous le supposons horizontal. Dans ces conditions, on aura partout $N = 0$ et l'effort tranchant T se confondra partout avec la composante verticale Y de la force extérieure.

Sous l'action d'un système quelconque de charges verticales $P_1, P_2, \ldots, P, \ldots$, agissant suivant les verticales d'abscisses $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha, \ldots$, on a pour les réactions d'appui les expressions

$$(1) \qquad \begin{cases} R_0 = \sum P \dfrac{l-\alpha}{l}, \\ R_1 = \sum P \dfrac{\alpha}{l}. \end{cases}$$

Le moment fléchissant au point G, d'abscisse x, est

$$(2) \qquad \begin{aligned} M &= R_0 x - \sum_g P(x-\alpha) \\ &= \sum_g P \frac{\alpha}{l}(l-x) + \sum_d P \frac{l-\alpha}{l} x \\ &= \frac{l-x}{l} \sum_g P\alpha + \frac{x}{l} \sum_d P(l-\alpha). \end{aligned}$$

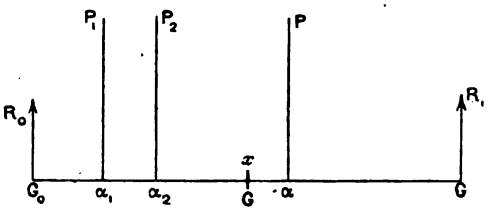
L'effort tranchant au même point G a pour expression

$$(3) \qquad T = R_0 - \sum_g P = -\frac{1}{l} \sum_g P\alpha + \frac{1}{l} \sum_d P(l-\alpha).$$

Il convient de rappeler qu'on a $T = \frac{dM}{dx}$, et de noter que pour un point situé à une distance infiniment petite de G_1, et à sa gauche, on a $T = -R_1$.

Lorsqu'on a affaire à une charge continue, telle que l'élément

Fig. 64.



de longueur $d\alpha$ ait comme charge $p\,d\alpha$, les formules précédentes se transforment dans les suivantes :

$$(1)' \quad \begin{cases} R_0 = \int_0^l p\,\frac{l-\alpha}{l}\,d\alpha, \\ R_1 = \int_0^l p\,\frac{\alpha}{l}\,d\alpha; \end{cases}$$

$$(2)' \quad M = R_0 x - \int_0^x p(x-\alpha)\,d\alpha = \frac{l-x}{l}\int_0^x p\,\alpha\,d\alpha + \frac{x}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha;$$

$$(3)' \quad T = R_0 - \int_0^x p\,d\alpha = -\frac{1}{l}\int_0^x p\,\alpha\,d\alpha + \frac{1}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha.$$

Enfin, lorsqu'on a affaire à une charge unique, on a évidemment :

$$(1)'' \quad \begin{cases} R_0 = P\,\frac{(l-\alpha)}{l}, \\ R_1 = P\,\frac{\alpha}{l}; \end{cases}$$

$$(2)'' \quad \begin{cases} M = P\,\frac{\alpha(l-x)}{l} & \text{si} \quad 0 < \alpha < x, \\ M = P\,\frac{(l-\alpha)x}{l} & \text{si} \quad x < \alpha < l; \end{cases}$$

$$(3)'' \quad \begin{cases} T = -P\,\frac{\alpha}{l} & \text{si} \quad 0 < \alpha < x, \\ T = P\,\frac{l-\alpha}{l} & \text{si} \quad x < \alpha < l. \end{cases}$$

Nous nous référons à ce qui a été dit précédemment en ce qui concerne la détermination graphique des composantes de la force extérieure, moment fléchissant et effort tranchant.

Charge uniformément répartie. — Lorsque p est constant, d'un bout à l'autre de la poutre, cas qui est fréquemment envisagé, les formules (1)', (2)', (3)' se simplifient, les intégrations pouvant être effectuées.

On trouve d'abord

$$R_0 = R_1 = \frac{pl}{2},$$

puis

$$M = p\frac{x(l-x)}{2}.$$

La ligne représentative du moment fléchissant est alors une parabole à axe vertical, dont le sommet correspond au milieu de la poutre $\left(\textit{abscisse } \frac{l}{2}\right)$ *et a pour ordonnée* $\frac{pl^2}{8}$.

Enfin on a

$$T = p\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

La *ligne représentative de l'effort tranchant est une droite, coupant sa ligne de référence au milieu de la portée et coupant les verticales* (G_0) *et* (G_1) *aux points d'ordonnée* $\pm\frac{pl}{2}$.

Si la charge constante p n'agit pas sur toute la longueur de la poutre, mais sur une partie seulement de celle-ci, on a évidemment d'autres lignes représentatives pour le moment fléchissant et l'effort tranchant. Sans procéder à des intégrations, qui seraient sans intérêt, on peut observer que la ligne représentative du moment fléchissant sera toujours composée de deux portions de droites, pour les parties ne supportant aucune charge, et d'une parabole du second degré pour la partie chargée.

On en déduit, puisque $T = \frac{dM}{dx}$, que la ligne représentative de l'effort tranchant sera composée de portions d'horizontales dans les parties non chargées et d'une droite inclinée dans la partie chargée.

On reconnaît aussi que les courbes enveloppes du moment fléchissant sont dans ce cas : 1° la ligne de référence correspon-

dant au cas où il n'y a aucune charge ; 2° la parabole $M = p\frac{(xl-x)}{2}$ correspondant au cas où la surcharge couvre la poutre entière.

Nous préciserons plus loin la forme des lignes enveloppes de l'effort tranchant.

Cas d'une charge isolée. Lignes d'influence. — Il ne s'agit que de tirer les conséquences des équations (1)″, (2)″ et (3)″, qui correspondent au cas le plus simple.

Si dans ces équations on considère x comme constant et α comme variable, c'est-à-dire si l'on envisage une charge mobile se déplaçant sur la poutre, ces équations seront évidemment celles des lignes d'influence, au facteur de proportionnalité près P, qu'on suppose représenter l'unité de force choisie.

Si, au contraire, on regarde α comme constant et x comme variable, les équations (2)″ et (3)″ seront celles des lignes représentatives du moment fléchissant et de l'effort tranchant, pour la position α assignée à la charge P.

Toutes ces équations étant du premier degré, soit en x, soit en α, les lignes d'influence et les lignes représentatives seront toujours composées de lignes droites.

Les équations (2)″ permettent d'ailleurs de vérifier, pour le cas actuel, la loi de réciprocité suivante :

Le moment fléchissant produit dans la section x par un poids placé dans la section α est égal au moment fléchissant produit dans la section α par un poids égal placé dans la section x.

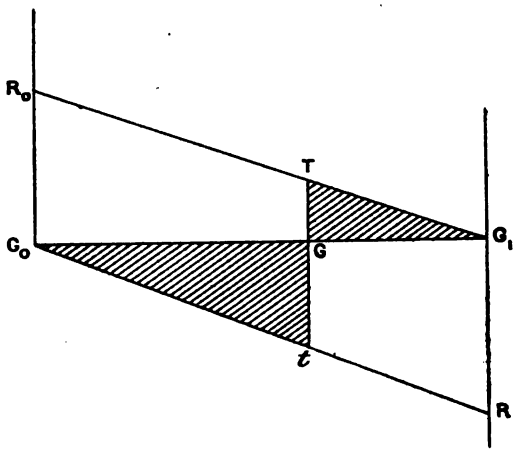
Supposons par exemple $\alpha < x$, il faut prendre dans la première hypothèse la première équation (2)″ et dans la seconde hypothèse il faut prendre la seconde équation (2)″ en intervertissant les lettres α et x.

Il en résulte que la ligne d'influence du moment fléchissant relative à une section x se confond avec la ligne représentative correspondant à une charge unité placée dans cette même section, et inversement.

La ligne d'influence de R_0, dont l'équation est la première équation (1)″, est évidemment une ligne droite. Elle coupe sa ligne

de référence G_0G_1 au point G_1, c'est-à-dire pour $\alpha = l$. Son ordonnée pour $\alpha = 0$ est $R_0 = P = 1$.

Fig. 65.



La ligne d'influence de R_1 est la droite symétrique de la précédente par rapport à la verticale du milieu de la poutre. (On la remplace souvent par sa symétrique G_0R_1 par rapport à la droite de référence, que l'on a à considérer pour l'effort tranchant. Cela est sans inconvénient, la question de signe étant facile à élucider.)

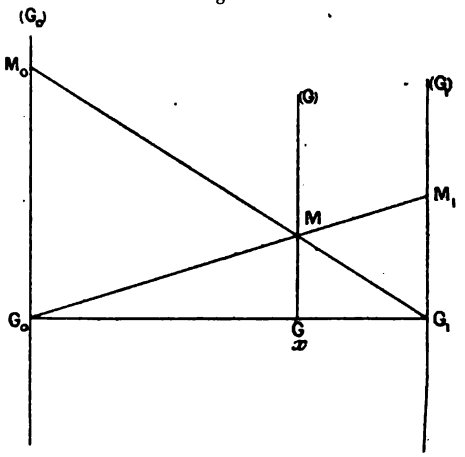
En ce qui concerne la ligne d'influence du moment fléchissant, elle est représentée par la première équation (2)″ entre G_0 et G. C'est une droite partant de G_0, pour $\alpha = 0$, et qui couperait la verticale (G_1) au point M_1 d'ordonnée $l\frac{(l-x)}{l} = l - x$. Elle coupe la verticale (G) au point M d'ordonnée $\frac{x(l-x)}{l}$.

Entre G et G_1, c'est la seconde équation (2)″ qui représente la ligne d'influence. C'est une droite passant par G_1, pour $\alpha = l$, et qui coupe la verticale (G_0) au point M_0 d'ordonnée $\frac{lx}{l} = x$. Elle coupe la verticale (G) au même point M que la précédente, point d'ordonnée $\frac{x(l-x)}{l}$.

La construction de la ligne d'influence peut donc s'opérer très simplement, soit en déterminant sur la verticale (G) le point M

d'ordonnée $\frac{x(l-x)}{l}$, situé sur une parabole du second degré facile à tracer, et en le joignant aux points G_0 et G_1, soit en prenant sur les verticales (G_0) et (G_1) respectivement des segments

Fig. 66.



G_0M_0 et G_1M_1 égaux à $x = G_0G$ et $(l-x) = GG_1$ et en joignant M_0G_1 et M_1G_0.

Enfin, la ligne d'influence de l'effort tranchant est définie entre G_0 et G par la première équation (3)″ qui n'est autre que l'équation de la droite G_0R_1 envisagée précédemment comme ligne d'influence de R_1 changé de signe. Entre G et G_1, la ligne d'influence est définie par la seconde équation (3)″ qui n'est autre que la ligne d'influence de R_0.

Si donc on prend sur la verticale (G) les points T et t où elle rencontre les deux droites fixes G_0R_1 et G_1R_0, la ligne d'influence est composée des deux segments G_0t et TG_1. Elle est discontinue et présente au droit de la section G un ressaut dont la valeur tT est égale à $G_0R_0 = G_1R_1 = 1$. On a donc à considérer deux zones, l'une négative G_0tG et l'autre positive GTG_1.

Pour une autre section, les droites G_0R_1 et R_0G_0 demeurant fixes, il s'agit simplement de modifier les portions utiles à prendre sur chacune d'elles, de sorte qu'une seule et même figure fournit toutes les lignes d'influence de l'effort tranchant.

Utilisation des lignes d'influence dans les cas ordinaires de

charges et surcharges. — Nous allons entrer dans quelques détails en ce qui concerne le parti à tirer des lignes d'influence dans cet exemple simple de la poutre droite. Cela servira de guide dans d'autres cas plus compliqués.

Nous passerons en revue les trois hypothèses de charges et de surcharges que l'on a ordinairement à envisager lorsque la poutre fait partie d'un pont, savoir :

1° Une charge permanente, qui est supposée uniformément répartie à toute la poutre à raison de p kilogrammes (ou tonnes) par mètre courant;

2° Une surcharge uniformément répartie, à raison de p' kilogrammes par mètre courant, mais pouvant s'étendre à des zones variables de la poutre;

3° Une surcharge composée d'un convoi type comme ceux qui sont réglementaires en France. Sans entrer dans des détails qui ne seraient pas à leur place ici, ces convois sont de deux sortes.

Pour les ponts-routes, les convois sont constitués par un petit nombre de charges se répétant périodiquement et indéfiniment. L'effet produit par un pareil convoi a une périodicité régulière et, pourvu que la portée de la poutre corresponde à cinq ou six périodes, tout se passe approximativement comme si l'on avait affaire à une surcharge variable uniformément répartie. Dans le cas contraire, on aurait quelques essais à faire.

Pour les convois types de chemins de fer, la tête du convoi est composée d'essieux de locomotives notablement plus lourds ou plus rapprochés que les autres essieux. C'est donc le cas type, car c'est à peu près le seul pour lequel les lignes d'influence ne fournissent pas d'une manière immédiate tous les résultats désirables, et notamment les valeurs extrêmes de l'effort produit par les surcharges données. Les lignes d'influence font connaître, par leurs différentes zones, les dispositions approximatives qu'il faut donner au convoi pour obtenir l'effet maximum positif ou négatif; mais, pour préciser ces positions, il faut recourir à quelques essais.

Voici quelques remarques générales qui abrègent considérablement les tâtonnements à effectuer sur une zone d'une ligne d'influence, lorsque cette ligne est polygonale.

Soient P_1, P_2, ..., P_n les surcharges et y_1, y_2, ..., y_n les.

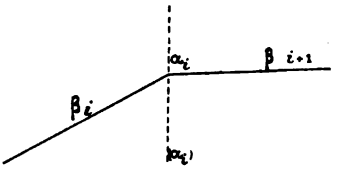
ordonnées de la ligne d'influence qui leur correspondent pour une position du convoi, définie par exemple par l'abscisse α de l'essieu de tête. L'effet produit est

$$Y = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n.$$

Faisons varier α. Si la ligne d'influence est composée de lignes droites, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des fonctions linéaires de α, et il en est de même de Y, du moins tant que l'une des charges ne franchit pas un des points critiques pouvant faire changer la définition analytique de la fonction y qui lui correspond. Ces points critiques sont les deux extrémités de la poutre et les différents sommets ou points de discontinuité de la ligne d'influence. La ligne d'influence de l'effet total Y, considérée comme fonction de α, est donc elle-même composée de lignes droites. Ses sommets ou points singuliers, parmi lesquels doit nécessairement se trouver le maximum cherché, correspondent donc aux valeurs de α qui placent l'une des charges à l'aplomb d'un des sommets ou points singuliers de la ligne d'influence de y.

Cela posé, désignons par P_i la charge particulière qui se trouve

Fig 67.



placée à l'aplomb d'un point singulier α_i de la ligne d'influence et supposons d'abord que le point α_i soit un simple point de brisure, sans discontinuité. Pour que la position correspondante du convoi corresponde à un maximum, il faut que la dérivée $\frac{\Delta Y}{\Delta \alpha}$ passe du positif au négatif quand α passe par la valeur α_i.

Désignons par β le coefficient angulaire du côté de la ligne d'influence qui est au droit de la charge P, par β_i et β_{i+1} les coefficients angulaires des côtés qui encadrent le point α_i. Un peu en deçà de α_i, on doit avoir

$$\frac{\Delta Y}{\Delta \alpha} = P_i \beta_i + \Sigma P \beta > 0.$$

Un peu au delà on doit avoir

$$\frac{\Delta Y}{\Delta \alpha} = P_i \beta_{i+1} + \Sigma P \beta < 0.$$

Ces deux conditions impliquent que

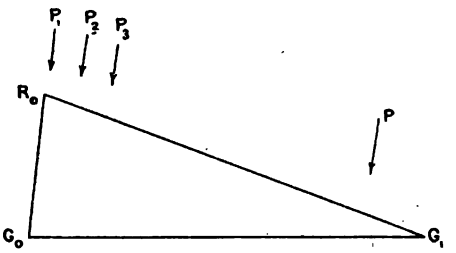
$$P_i \beta_i > -\Sigma P \beta > P_i \beta_{i+1}.$$

Cela permet d'exclure presque à vue certains sommets et de ne retenir que ceux pour lesquels la différence $\beta_i - \beta_{i+1}$ est la plus forte, en ayant soin d'ailleurs de prendre pour P_i une des plus fortes charges, autant du moins que cela est possible.

Supposons maintenant que le point α_i soit un point de discontinuité, et désignons par y_i et y_{i+1} les deux ordonnées qui lui correspondent. Quand α franchit la valeur α_i, la valeur de Y subit la discontinuité finie $P_i(y_{i+1} - y_i)$, qui est proportionnelle à P_i. On est donc conduit à prendre pour P_i une des plus fortes charges et il est souvent très facile de s'assurer que cette discontinuité est alors supérieure ou égale aux variations que peut subir Y_i quand le convoi se déplace ensuite jusqu'à amener une nouvelle charge en α_i.

Étude de la réaction d'appui R_0. — Dans le cas de la charge permanente, R_0 est égal au produit de p par l'aire de la ligne d'in-

Fig. 68.



fluence qui est un triangle de base l et de hauteur unité. Le résultat est donc $R_0 = p\frac{l}{2}$, comme nous l'avons trouvé précédemment.

Dans le cas d'une surcharge uniformément répartie, la ligne d'influence n'ayant qu'une seule zone positive, on voit que toute surcharge ajoutée donne une valeur positive pour R_0. La réac-

tion R_0 a donc pour minimum zéro et pour maximum la valeur qui correspond à la surcharge complète couvrant toute la poutre, c'est-à-dire $R_0 = \frac{p'l}{2}$.

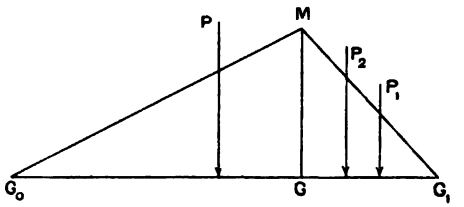
Enfin, dans le cas d'un convoi de chemin de fer, R_0 varie encore entre le minimum zéro et un certain maximum. Celui-ci doit *a priori* correspondre à la position du convoi qui placera le plus de charges possibles sur la poutre, les charges les plus lourdes étant dans la région des plus fortes ordonnées. Autrement dit, la tête du convoi doit être placée dans le voisinage de G_0.

Le maximum s'obtient même toujours quand le premier essieu est placé en G_0, la valeur de la discontinuité étant égale au poids de ce premier essieu. La substitution du second essieu au premier, à l'aplomb de G_0, ne peut conduire qu'à une valeur au plus égale, et encore faut-il pour cela que la longueur de la poutre soit assez faible pour qu'elle soit entièrement couverte par le groupe des locomotives.

On voit donc que la détermination du maximum ne comporte aucune incertitude.

Étude du moment fléchissant dans une section G. — Supposons G plus voisin de G_1 que de G_0, c'est-à-dire $x > l - x$.

Fig. 69.



La ligne d'influence est le triangle G_0MG_1, l'ordonnée MG étant égale à $\frac{x(l-x)}{l}$, et les coefficients angulaires des côtés MG_0 et MG_1 étant respectivement

$$\beta_0 = \frac{l-x}{l} \qquad \text{et} \qquad \beta_1 = -\frac{x}{l}.$$

Pour la charge permanente, on trouve évidemment

$$M = \frac{1}{2}pl\frac{x(l-x)}{l} = p\frac{x(l-x)}{2},$$

en faisant l'aire du triangle. La ligne représentative de M est la parabole dont nous avons déjà parlé.

Pour la surcharge uniformément répartie, comme il n'y a qu'une zone positive, toute surcharge ajoutée donne une valeur positive pour M. Le minimum est donc zéro et le maximum correspond à la surcharge complète, de sorte que les équations des lignes enveloppes sont $y = 0$ d'une part et $y = p'\frac{x(l-x)}{2}$ d'autre part.

Dans le cas d'un convoi de chemin de fer on a encore comme minimum zéro. Quant au maximum, on l'obtiendra en plaçant le plus de charges possibles sur la poutre, les charges les plus lourdes devant être le plus possible concentrées dans la région de l'ordonnée maxima GM. La tête du convoi devra être tournée vers la droite.

Pour préciser la position du convoi fournissant le maximum, nous remarquerons que

$$\beta_0 - \beta_1 = \frac{l-x}{l} + \frac{x}{l} = 1$$

et est toujours plus grand que β_0 ou β_1. Parmi les trois points singuliers G_0, M et G_1 de la ligne d'influence, c'est donc le point M qui doit jouer le rôle prépondérant, et l'on n'a à essayer que les positions plaçant un essieu tel que P_i à l'aplomb de G.

Les conditions pour que P_i fournisse le maximum sont les suivantes : Si l'on désigne par Σ_g la somme des charges placées à gauche de P_i et par Σ_d la somme de celles qui sont placées à sa droite sur la poutre, on doit avoir

$$P_i\beta_0 + \sum_g \beta_0 + \sum_d \beta_1 > 0,$$

$$P_i\beta_1 + \sum_g \beta_0 + \sum_d \beta_1 < 0,$$

ou, en remplaçant β_0 et β_1 par leur valeur et en groupant autrement les termes,

$$\frac{\sum_d}{\sum_g + P_i} < \frac{l-x}{x} < \frac{\sum_d + P_i}{\sum}.$$

Dans le cas particulier où $x = l - x$, ces conditions se simplifient et deviennent

$$\sum_g - P_i, < \sum_d < \sum_g + P_i.$$

La ligne enveloppe correspondant au maximum du moment fléchissant dans chaque section se détermine ainsi par points, et il n'est pas nécessaire d'en avoir un très grand nombre.

En réalité, la ligne enveloppe se compose, au point de vue analytique, des parties utiles de deux courbes distinctes, symétriques par rapport au milieu de la poutre. L'une de ces courbes représenterait par exemple le maximum obtenu quand le convoi va de gauche à droite (courbe G_0AG_1); l'autre représenterait le maximum obtenu quand le convoi va de droite à gauche (courbe $G_0A'G_1$).

Le maximum maximorum ne se rencontre donc pas tout à fait au milieu de la poutre, mais pour des sections A ou A' qui s'en écartent un peu à droite ou à gauche.

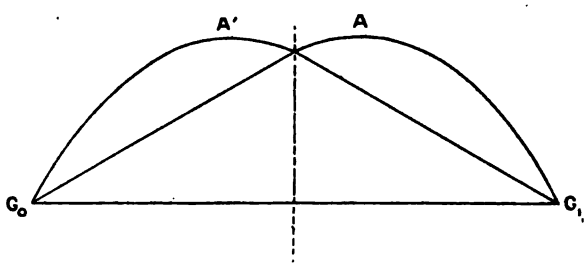
On peut représenter la courbe G_0AG_1 d'une manière suffisamment approchée pour une étude sommaire au moyen de l'expression

$$M = 4m \frac{x(l-x)}{l^2}\left[1 + K\frac{x(l-x)(2x-l)}{l^3}\right],$$

m est la valeur du moment maximum au milieu de la poutre, ainsi qu'on le vérifie en faisant $x = \frac{l}{2}$.

Quant à K, c'est un coefficient numérique dont la valeur est

Fig. 70.

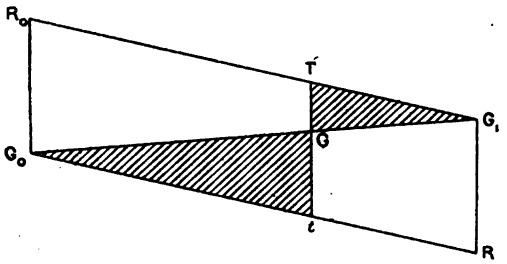


voisine de 0,80, et qu'on peut déterminer dès que l'on connaît le maximum correspondant à une seconde section.

Il suffit donc de deux lignes d'influence ou de deux essais pour déterminer les coefficients de cette formule, et l'on peut souvent se contenter d'un seul, si l'on prend $K = 0,80$.

Étude de l'effort tranchant dans une section G. — Reprenons la figure fournissant la ligne d'influence $G_0 t T G_1$ de l'effort tranchant dans la section G.

Fig. 71.



Il y a deux zones, l'une négative $G_0 t G$ et l'autre positive GTG_1. On a d'ailleurs

$$Gt = G_1 R_1 \frac{x}{l} = \frac{x}{l},$$

$$GT = G_0 R_0 \frac{l-x}{l} = \frac{l-x}{l},$$

$$Tt = 1.$$

En ce qui concerne la charge permanente, on trouve évidemment pour l'effort tranchant le produit de p par la différence des aires $G_0 t G$ et GTG_1, c'est-à-dire

$$T = p\left[-\frac{x^2}{2l} + \frac{(l-x)^2}{2l}\right] = p\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

La ligne représentative est la droite $T_0 T_1$ dont nous avons déjà parlé, passant par le milieu de la portée.

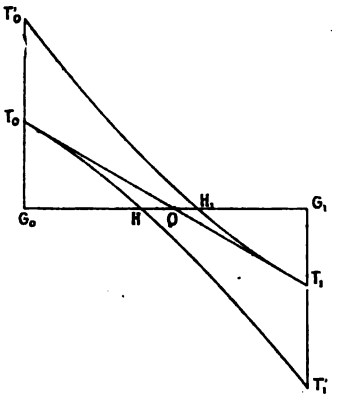
En ce qui concerne la surcharge uniformément répartie, il est évident qu'on obtient les valeurs extrêmes de l'effort tranchant, soit en chargeant la zone négative $G_0 G$ exclusivement, soit en chargeant la zone positive exclusivement.

Dans la première hypothèse, on a

$$T = -p'\frac{x^2}{2l}.$$

La ligne enveloppe est une parabole à axe vertical. Si on la construit en prenant $T_0T'_1$ comme ligne de référence, cette courbe

Fig. 72.



sera telle que T_0T_1, tangente en T_0 à la droite T_0T_1. Rapportée à G_0G_1 comme ligne de référence, elle fournira pour chaque section l'effort tranchant minimum sous l'action combinée de la charge permanente et de la surcharge.

Dans la deuxième hypothèse, la surcharge couvrant GG_1, on a $T = p\frac{(l-x)^2}{2l}$. On obtient la courbe T'_0T_1 symétrique de la précédente par rapport au milieu O de G_0G_1. Rapportée à G_0G_1, elle fournit pour chaque section l'effort tranchant maximum sous l'action combinée de la charge permanente et de la surcharge.

Dans les régions G_0H et H_1G_1, le minimum et le maximum sont de même signe; dans la région centrale HH_1 ils sont de signes contraires.

Dans le cas d'un convoi de chemin de fer, il faut encore examiner séparément la zone positive et la zone négative de la ligne d'influence. Prenons la zone négative, par exemple. Le problème est entièrement analogue à celui qui a été examiné à propos de la réaction d'appui R_0. On obtiendra l'effet maximum en plaçant la tête du train vers la droite, de telle sorte que son premier essieu vienne à l'aplomb de G.

Il n'y aurait d'exception à cette règle que si le train type possédait en tête un premier essieu exceptionnellement léger.

Soient P_1 la charge du premier essieu, a sa distance au second,

et ΣP le total des charges engagées sur la poutre quand le deuxième essieu vient en G. Pour que le cas d'exception se produisît, il faudrait avoir

$$\frac{a}{l}\Sigma P > P_1.$$

Autrement dit, le quotient $\frac{P_1}{a}$ devrait être inférieur à $\frac{\Sigma P}{l}$, c'est-à-dire à la charge moyenne de la poutre par unité de longueur.

On traiterait de même la zone positive de la ligne d'influence, à cela près que la tête du train serait cette fois placée vers la gauche.

Les lignes enveloppes ont en gros l'allure des paraboles $T_0T'_1$ et T'_0T_1 trouvées plus haut pour le cas de la surcharge uniforme incomplète. En réalité, les lignes exactes seraient des lignes polygonales, car, par exemple pour la courbe $T_0T'_1$, le maximum négatif de T varie linéairement avec x dans chacune des régions pour lesquelles, la première charge étant à l'aplomb de x, il y a les mêmes charges engagées sur la partie gauche de la poutre. En particulier, quand G est très voisin de G_0, x étant très petit, l'effort tranchant maximum est égal au produit de la première charge par l'ordonnée de la ligne d'influence, qui varie linéairement avec x. Toutefois, comme en pratique on trace par points ces lignes enveloppes, et qu'on substitue aux lignes polygonales des courbes continues, l'allure générale de celles-ci conduit à les tracer tangentes en T_0 et T_1 respectivement à la ligne de référence commune T_0T_1. Cela ne présente aucun inconvénient pratique et, bien que ce soit inexact d'une manière absolue, nous emploierons dans plusieurs circonstances des simplifications du même genre, dont la justification consistera dans cette constatation que l'aire d'une zone d'influence telle que G_0tG devient un infiniment petit du second ordre quand G tend vers G_0. Le raisonnement est exact quand il s'agit d'une surcharge continue, répartie d'une manière quelconque, et insuffisant ou faux pour des convois à charges discontinues; mais, pratiquement, il est très acceptable.

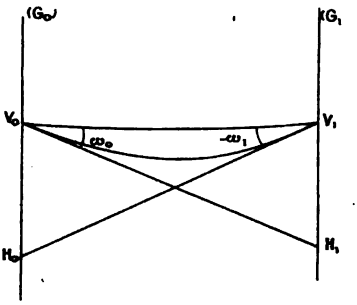
II. — Étude de la déformation.

Ligne élastique. — Nous avons vu, dans un Chapitre précédent, que, pour tracer cette ligne, qui est à une échelle convenable, la

ligne représentative du déplacement vertical v, il suffit de construire sur le réseau des verticales (ξ) un polygone funiculaire de charges fictives $-\frac{M d\xi}{EI}$, avec une distance polaire fixe, ou encore un polygone funiculaire des charges fictives $-M d\xi$, avec une distance polaire variable égale à EI.

Si les deux extrémités de la poutre sont fixes, ce polygone funiculaire devra être rapporté à sa corde $V_0 V_1$.

Fig. 73.



En théorie, nous supposons toujours que la distance polaire est égale à l'unité s'il s'agit d'une distance polaire fixe, ou que $M d\xi$ et EI, quantités qui ont mêmes dimensions FL^2, sont prises à la même échelle s'il s'agit d'une distance polaire variable. De la sorte v est supposé représenté en vraie grandeur.

Les angles ω_0 et ω_1 que fait la fibre déformée en G_0 et G_1 avec sa direction rectiligne primitive sont alors représentés, en vraie grandeur aussi, en $V_1 V_0 H_1$ et $H_0 V_1 V_0$ en menant les tangentes extrêmes de la ligne élastique. Plus exactement, les segments $V_1 H_1$ et $V_0 H_0$ comptés sur les verticales (G_1) et (G_0) entre la corde $V_0 V_1$ et les tangentes extrêmes de la ligne élastique, représentent, en grandeur et en signe, les quantités $l\omega_0$ et $-l\omega_1$ respectivement.

Si, pour les commodités du tracé, on a représenté les EI à une échelle n fois plus petite que les $M d\xi$, les ordonnées du polygone funiculaire seront égales à nv, et les angles ω_0 et ω_1 seront déformés; mais on aura :

$$V_1 H_1 = \quad nl\omega_0,$$
$$V_0 H_0 = -nl\omega_1,$$

et la connaissance de ces deux segments équivaudra toujours ainsi à celle des angles ω_0 et ω_1 eux-mêmes.

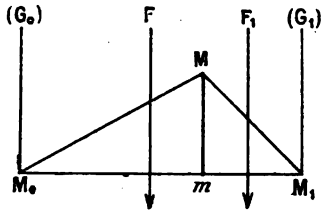
Il est bien évident qu'en pratique on ne pourra considérer les forces fictives infiniment petites $-M d\xi$, mais qu'on les remplacera par des forces finies $-M\Delta\xi$ égales en grandeur et en situation à la résultante des forces infiniment petites appliquées à l'intervalle fini $\Delta\xi$. Nous avons déjà plusieurs fois fait observer que le polygone funiculaire ainsi obtenu est circonscrit à la courbe funiculaire théorique, les points de tangence se trouvant sur les verticales séparatives des intervalles $\Delta\xi$. On peut aller aussi loin que l'on veut dans cette voie de simplification, lorsqu'on ne désire qu'un petit nombre de points exacts et notamment lorsqu'on n'a besoin que de connaître les tangentes extrêmes V_0H_1 et V_1H_0 de la ligne élastique, ou, ce qui revient au même, les deux quantités

$$V_1H_1 = l\omega_0 \qquad \text{et} \qquad V_0H_0 = -l\omega_1.$$

Il suffit que l'on sache déterminer bien exactement les verticales suivant lesquelles agissent les résultantes des forces fictives correspondant aux intervalles $\Delta\xi$.

En particulier, si I est constant et si, d'autre part, M est le moment fléchissant produit par une charge unique, de telle sorte que sa ligne représentative ait la forme en chevron M_0MM_1, on pourra se contenter d'envisager les deux intervalles finis M_0m et mM_1. La résultante F des forces fictives $-M d\xi$ agissant dans

Fig. 74.



l'intervalle M_0m a comme ligne d'action la verticale passant aux deux tiers de M_0m. De même F_1 passe aux deux tiers de M_1m. Le polygone funiculaire sera alors réduit à trois côtés, parmi lesquels se trouvent les tangentes extrêmes à la courbe funiculaire théorique. Il peut déjà permettre un tracé approximatif de celle-ci.

Ligne d'influence du déplacement v pour une section donnée G. — Puisque, d'après le théorème de Maxwell, cette ligne se confond avec la ligne élastique qui correspond à une charge unité placée dans la section G, on n'a qu'à appliquer à sa construction les indications qui précèdent. Dans ce cas, la ligne représentative de M est toujours une ligne en chevron telle que M_0MM_1.

Lignes d'influence de $l\omega_0$ et de $l\omega_1$. Lignes en croix. — Ainsi que nous le verrons plus tard, on a fréquemment besoin de savoir déterminer les quantités $l\omega_0$ et $l\omega_1$ pour des combinaisons quelconques de charges et de surcharges. Au lieu de les déterminer dans chaque cas par la construction de la ligne élastique correspondante, il est préférable de tracer leurs lignes d'influence, qui fournissent ensuite sans difficultés toutes les déterminations particulières possibles.

Si nous nous reportons aux équations générales de déformation des poutres droites et si nous les appliquons à la poutre entière, en supposant $v_0 = v_1 = 0$, nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\omega_1 = \omega_0 + \int_0^l \frac{M\,d\xi}{EI},$$

$$0 = \omega_0 l + \int_0^l \frac{M(l-\xi)}{EI}\,d\xi.$$

La seconde équation donne

$$l\omega_0 = -\int_0^l \frac{M(l-\xi)\,d\xi}{EI}.$$

Cette valeur, portée dans la première équation, multipliée par l, donne

$$l\omega_1 = \int_0^l \frac{M\xi}{EI}\,d\xi.$$

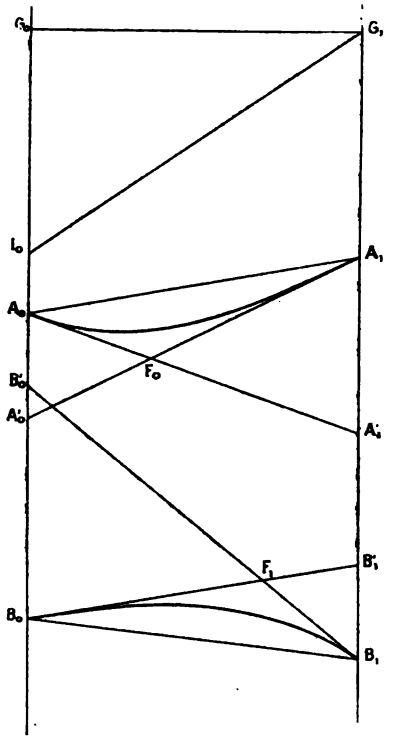
Si l'on suppose que l'on a une charge unique égale à l'unité agissant suivant la verticale d'abscisse α, M devient la fonction particulière μ de ξ et de α, dons nous avons parlé précédemment (Chap. VII). On en conclut que la ligne d'influence de $l\omega_0$ s'obtiendra en contruisant *sur le réseau des verticales* (ξ) *la courbe funiculaire de forces fictives égales à* $-\frac{(l-\xi)\,d\xi}{EI}$, *avec une dis-*

tance polaire égale à l'unité, ou encore de forces fictives égales à $-(l-\xi)\,d\xi$, *avec une distance polaire variable égale à* EI.

Pour la ligne d'influence de $l\omega_1$, il faut envisager de même des forces fictives égales à $\frac{\xi\,d\xi}{EI}$, ou à $\xi\,d\xi$.

Étant donnée l'importance du sujet, nous nous arrêterons un peu à l'examen de ces lignes d'influence.

Fig. 75.



La *ligne de charge* correspondant à $l\omega_0$ est la droite $y = -(l-\xi)$, obtenue en joignant G_1 au point L_0 tel que $G_0L_0 = l$. La ligne de charge correspondant à $l\omega_1$ est la droite $y = \xi$ passant par G_0 et parallèle à la précédente. (Bien entendu, dans une construction effective, on amplifiera ou l'on réduira leurs ordonnées dans tel rapport que l'on voudra.)

Si EI était constant sur toute la longueur de la poutre, la résul-

tante des charges fictives $-\frac{(l-\xi)\,d\xi}{EI}$ passerait au tiers de gauche de G_0G_1, de sorte que les tangentes extrêmes $A_0A'_1$ et $A_1A'_0$ au premier polygone funiculaire, ligne d'influence de $l\omega_0$, se couperaient en F_0 sur la verticale de ce point.

De même la résultante des charges fictives $\frac{\xi\,d\xi}{EI}$ passerait au tiers de droite de G_0G_1 et les tangentes extrêmes $B_0B'_1$ et $B_1B'_0$ du second polygone funiculaire, ligne d'influence de $l\omega_1$, se couperaient en F_1 sur la verticale de ce point.

On appelle *lignes en croix du premier groupe* les deux tangentes extrêmes $A_0A'_1$ et $A_1A'_0$ du premier polygone funiculaire et le point F_0 où elles se coupent s'appelle le *foyer de gauche de la travée.*

On appelle *lignes en croix du deuxième groupe* les droites $B_0B'_1$ et $B_1B'_0$ et leur point d'intersection F_1 s'appelle le *foyer de droite de la travée.*

Les segments $A_0A'_0$ et $A_1A'_1$, découpés par les lignes en croix du premier groupe sur les verticales (G_0) et (G_1), ont une signification très utile à connaître. En théorie (il faut le répéter à chaque instant), on suppose des charges fictives $-\frac{(l-\xi)\,d\xi}{EI}$ et l'on suppose leur polygone funiculaire tracé avec une distance polaire unité. Dans ces conditions, les segments découpés sur (G_0) entre deux côtés successifs infiniment rapprochés du polygone funiculaire, représentent les valeurs absolues du moment

$$\frac{\xi(l-\xi)}{EI}\,d\xi$$

et $A_0A'_0$ est égal à l'intégrale

$$\int_0^l \frac{\xi(l-\xi)}{EI}\,d\xi$$

prise sur toute la longueur de la poutre. Dans nos études ultérieures, nous désignerons par la lettre a cette intégrale, de sorte que, faisant abstraction des échelles des épures, nous poserons

$$A_0A'_0 = a = \int_0^l \frac{\xi(l-\xi)}{EI}\,d\xi.$$

On verrait de même que le segment $A_1A'_1$ est la valeur d'une seconde intégrale, que nous désignerons par la lettre b et qui serait

$$A_1A'_1 = b = \int_0^l \frac{(l-\xi)^2}{EI}\,d\xi.$$

On aurait des résultats semblables en envisageant les lignes en croix du second groupe. On aurait d'abord

$$B_1B'_1 = a = A_0A'_0$$

et ensuite

$$B_0B'_0 = c = \int_0^l \frac{\xi^2}{EI}\,d\xi.$$

Les trois constantes a, b, c, ainsi définies, sont de véritables constantes mécaniques de la poutre donnée. Avec ces notations, il est aisé de calculer les abscisses des deux foyers F_0 et F_1 de la travée.

F_0 divise la longueur l de la poutre dans le rapport $\frac{a}{b}$ et son abscisse est, par suite, donnée par l'équation

$$\frac{x'}{l-x'} = \frac{a}{b}, \qquad \text{d'où} \qquad x' = l\frac{a}{a+b}.$$

De même, F_1 divisant la longueur l dans le rapport $\frac{c}{a}$, on aurait son abscisse x'' par l'équation

$$\frac{x''}{l-x''} = \frac{c}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad x'' = l\frac{c}{a+c}.$$

Quant aux rapports des ordonnées des lignes en croix à leurs abscisses comptées à partir des points de tangence $A_0A_1B_0$ ou B_1, rapports que, pour abréger, on peut appeler leurs *coefficients angulaires*, ils ont respectivement pour valeurs :

Pour $A_0A'_1$..... $-\frac{b}{l}$

» $A_1A'_0$ et $B_0B'_1$..... $\frac{a}{l}$

» $B_1B'_0$..... $-\frac{c}{l}$

Ces rapports sont les valeurs pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = l$ des dérivées $\frac{dl\omega_0}{d\alpha}$ et $\frac{dl\omega_1}{d\alpha}$ respectivement.

Les lignes en croix fournissent encore la valeur de trois autres intégrales, qui s'introduisent dans les calculs et qui s'expriment en fonction de a, b, c. Ce sont

$$\int_0^l \frac{(l-\xi)}{EI} d\xi = \frac{a+b}{l},$$

$$\int_0^l \frac{\xi}{EI} d\xi = \frac{a+c}{l},$$

$$\int_0^l \frac{d\xi}{EI} = \frac{2a+b+c}{l^2}.$$

Bien entendu, il y a souvent des simplifications en pratique.

D'abord il arrive souvent que la poutre est symétrique par rapport à son milieu, les valeurs de I étant égales à la même distance de part et d'autre. Dans ces conditions, les deux polygones funiculaires, lignes d'influence de $l\omega_0$ et $l\omega_1$ sont symétriques par rapport au milieu de la poutre et l'on a $b = c$.

Si, en outre, I est constant, on peut profiter des simplifications dont nous avons parlé pour construire directement les lignes en croix, en envisageant simplement la résultante des charges fictives. Les foyers sont alors respectivement au tiers et aux deux tiers de la portée.

On reconnaît, de plus, bien facilement, que les lignes d'influence de $l\omega_0$ et de $l\omega_1$ sont alors des arcs de parabole cubique. On peut donc très aisément les construire, car on connaît *a priori* leurs points extrêmes et leurs tangentes en ces points.

Dans les cas où la section n'est pas constante, il est toujours très utile de confronter les résultats obtenus avec ceux qui correspondraient à une section constante, qui serait une sorte de moyenne de toutes les sections de la poutre. Les foyers pourront être très voisins des points situés au tiers et aux deux tiers de la poutre, et les courbes pourront être très peu différentes d'arcs de paraboles cubiques, symétriques l'une de l'autre par rapport au milieu de la poutre. Quand ces circonstances se présenteront, on pourra poursuivre tous les calculs ultérieurs en substituant à la poutre réelle une poutre à section constante équivalente.

Si cela n'a pas lieu, et si, notamment, les foyers réels s'écartent notablement des points situés au tiers et aux deux tiers de la poutre, il pourra néanmoins arriver, et l'on pourrait presque dire que ce sera le cas le plus habituel, que les courbes seront très peu différentes des arcs de paraboles cubiques ayant mêmes points et mêmes tangentes à leurs extrémités. On pourra substituer ces arcs de paraboles cubiques aux lignes d'influences réelles de $l\omega_0$ et $l\omega_1$, et alors tous les calculs ultérieurs pourront bénéficier de simplifications presque aussi importantes que s'il s'agissait de poutres à section constante.

Supposons, en effet, qu'une inconnue quelconque X soit liée à $l\omega_0$ et $l\omega_1$ par une relation linéaire de la forme

$$X = A + B\,l\omega_0 + C\,l\omega_1.$$

La ligne d'influence de X pourra être remplacée, tout comme celles de $l\omega_0$ et $l\omega_1$, et avec une approximation du même ordre, par un arc de parabole cubique, et pour tracer cet arc il suffira de déterminer ses deux points extrêmes et ses deux tangentes extrêmes. Cette détermination sera facile et ne nécessitera que la connaissance des mêmes éléments pour $l\omega_0$ et $l\omega_1$.

Dans cette simple remarque, se trouve le germe de simplifications pratiques considérables. Il conviendra de s'en souvenir lorsque nous exposerons certaines théories, plus ou moins compliquées en apparence, sur des poutres à section variable.

Résultats dans le cas particulier des poutres à section constante. — Lorsque I est constant et peut sortir des signes d'intégration, il ne reste plus sous ces signes que des expressions algébriques simples et il n'y a aucune difficulté à effectuer les calculs.

On a, par exemple,

$$c = \int_0^l \frac{\xi^2}{EI}\,d\xi = \frac{l^3}{3EI} = b$$

et

$$a = \int_0^l \frac{\xi(l-\xi)}{EI}\,d\xi = \frac{l^3}{6EI} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2}.$$

On en déduit aussi

$$\int_0^l \frac{\xi}{EI}\,d\xi = \int_0^l \frac{(l+\xi)}{EI}\,d\xi = \frac{l^2}{2EI},$$

$$\int \frac{d\xi}{EI} = \frac{EI}{l}.$$

On peut également trouver l'expression de $l\omega_0$ et $l\omega_1$ dans différents cas simples de surcharge.

1° *Cas d'une charge isolée* P *agissant suivant la verticale* (α), *d'abscisse* $\alpha = ml$. — Considérons d'abord l'expression de $l\omega_1$, qui s'écrit

$$l\omega_1 = \int_0^l \frac{M\xi}{EI}\,d\xi.$$

Dans l'hypothèse où nous sommes placés, le moment fléchissant M est le produit de P par la fonction particulière μ de ξ et de α, dont on se rappelle l'expression :

Pour $0 < \xi < \alpha$,

$$\mu = \frac{l-\alpha}{l}\xi;$$

pour $\alpha < \xi < l$,

$$\mu = \frac{\alpha}{l}(l-\xi).$$

L'intégrale $l\omega_1$ peut donc se déduire de la formule

$$EI\frac{l\omega_1}{P} = \frac{l-\alpha}{l}\int_0^\alpha \xi^2\,d\xi + \frac{\alpha}{l}\int_\alpha^l \xi(l-\xi)\,d\xi$$

et l'on trouve aisément

$$l\omega_1 = \frac{Pl^3}{6EI}\,m(1-m)(1+m).$$

Pour faciliter les calculs analogues que nous rencontrerons

ultérieurement, nous envisagerons plus généralement l'intégrale

$$y = \int_0^l \mu \xi^i \, d\xi.$$

On a, comme précédemment,

$$y = \frac{l-\alpha}{l} \int_0^\alpha \xi^{i+1} \, d\xi + \frac{\alpha}{l} \int_\alpha^l \xi^i (l-\xi) \, d\xi,$$

ou en développant

$$\begin{aligned} y &= \int_0^\alpha \xi^{i+1} \, d\xi + \alpha \int_\alpha^l \xi^i \, d\xi - \frac{\alpha}{l} \int_0^l \xi^{i+1} \, d\xi \\ &= \frac{\alpha^{i+2}}{i+2} + \frac{\alpha}{i+1} (l^{i+1} - \alpha^{i+1}) - \frac{\alpha}{l} \frac{l^{i+2}}{i+2}; \end{aligned}$$

finalement,

$$y = \frac{\alpha (l^{i+1} - \alpha^{i+1})}{(i+1)(i+2)}.$$

En appliquant cette formule, on retrouve la valeur précédente de $l\omega_1$ et l'on trouve aisément la valeur de $l\omega_0$. On a, en effet,

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{P} l\omega_0 &= \int_0^l \mu (l-\xi) \, d\xi = l \int_0^l \mu \, d\xi - \int_0^l \mu \xi \, d\xi \\ &= l \frac{\alpha(l-\alpha)}{1 \times 2} - \frac{\alpha(l^2 - \alpha^2)}{2 \times 3} = \frac{\alpha(l-\alpha)(2l-\alpha)}{6}, \end{aligned}$$

d'où

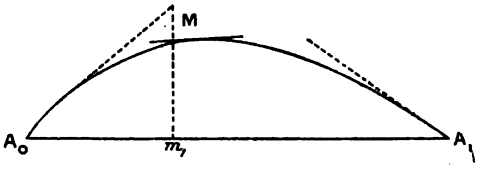
$$-l\omega_0 = \frac{Pl^3}{6EI} m(1-m)(2-m).$$

On aurait d'ailleurs pu déduire plus simplement cette formule de celle qui donne $l_1\omega_1$, en changeant tout simplement m en $1-m$, c'est-à-dire en supposant la poutre retournée bout pour bout.

Les équations trouvées, où P est fait égal à l'unité, sont celles des lignes d'influence de $l\omega_0$ et $l\omega_1$. On voit que, d'une poutre à une autre, elles ne diffèrent que par le facteur $\frac{l^3}{6EI}$ et qu'il suffit

d'étudier, dans sa partie utile (c'est-à-dire de $m = 0$ à $m = 1$) la fonction $y = m(1 - m)(2 - m)$ qui entre dans l'expression de $l\omega_0$. La courbe qui la représente affecte la forme ci-dessous.

Fig. 76.



Sa tangente en A_0 a un coefficient angulaire égal à 2. Sa tangente en A_1 a un coefficient angulaire égal à -1. De plus, cette seconde tangente est une tangente d'inflexion. La courbe a un maximum pour $m = 0,4226$ et la valeur de ce maximum est $y = 0,3849$.

Quand on connaît l'expression de ω_0 on peut trouver facilement l'expression du déplacement vertical v dans une section quelconque G d'abscisse x. On a en effet la formule générale de déformation

$$v = \omega_0 x + \int_0^x \frac{M(x-\xi)}{EI} d\xi.$$

Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés d'une charge unique, agissant suivant la verticale (α), il y aura à distinguer le cas où x est inférieur à α du cas où il lui est supérieur.

Si $x < \alpha$, on a partout entre o et x

$$M = P\frac{l-\alpha}{l}\xi$$

et l'on trouve facilement

$$\int_0^x \frac{M(x-\xi)}{EI} d\xi = \frac{P}{EI}\,\frac{l-\alpha}{l}\cdot\frac{x^3}{6}.$$

On en déduit

$$v = -\frac{P}{6EIl}[x\alpha(l-\alpha)(2l-\alpha) - x^3(l-\alpha)]$$

ou

$$v = -\frac{Pl^3}{6EI}\left[\frac{x}{l}m(1-m)(2-m) - \frac{x^3}{l^3}(1-m)\right].$$

Si l'on avait $x > \alpha$ on supposerait la poutre retournée bout pour bout, et l'on aurait à changer α en $l-\alpha$ (ou bien m en $1-m$) et x en $l-x$, ce qui donne comme résultat

$$v = -\frac{Pl^3}{6EI}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)m(1-m)(1+m) - \left(1-\frac{x}{l}\right)^3 m\right].$$

Ce dernier résultat peut encore se déduire du premier en invoquant le théorème de Maxwell, et en cherchant le déplacement de la section (α) sous l'action d'une charge P placée dans la section (x). Il suffit d'intervertir α et x dans la première formule. Il est aisé de vérifier qu'on retombe sur la même expression.

Ces deux expressions de v représentent, quand m est donné, les équations des deux arcs de la ligne élastique de part et d'autre du point d'application de la charge. Quand, au contraire, x est donné, elles représentent pour la section correspondante les deux arcs de la ligne d'influence de son déplacement.

Pour faciliter les calculs nous donnons dans le Tableau ci-joint les valeurs de la parenthèse figurant dans la première expression de v.

TABLE DONNANT LA VALEUR DE L'EXPRESSI

m.	$\frac{x}{l}$.									
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	»									
0,05	0,004512									
0,10	0,008437	0,01620								
0,15	0,01169	0,02274	0,03251							
0,20	0,01430	0,02800	0,04050	0,05120						
0,25	0,01631	0,03206	0,04669	0,05962	0,07031					
0,30	0,01776	0,03500	0,05119	0,06580	0,07831	0,08820				
0,35	0,01869	0,03689	0,05411	0,06988	0,08369	0,09506	0,1035			
0,40	0,01912	0,03780	0,05557	0,07200	0,08662	0,09900	0,1087	0,1152		
0,45	0,01911	0,03781	0,05569	0,07232	0,08731	0,10024	0,1107	0,1182	0,1225	
0,50	0,01869	0,03700	0,05456	0,07100	0,08594	0,0990	0,1098	0,1180	0,1232	0,125
0,55	0,01789	0,03544	0,05231	0,06817	0,08269	0,09551	0,10631	0,11475	0,12049	0,12
0,60	0,01675	0,03320	0,04905	0,06400	0,07775	0,09000	0,10045	0,10880	0,11475	0,118
0,65	0,01531	0,03036	0,04489	0,05862	0,07131	0,08269	0,09249	0,10045	0,10631	0,109
0,70	0,01361	0,02700	0,03994	0,05220	0,06356	0,07380	0,08269	0,09000	0,09551	0,09
0,75	0,01169	0,02319	0,03431	0,04487	0,05469	0,06356	0,07131	0,07775	0,08269	0,08
0,80	0,009575	0,01900	0,02812	0,03680	0,04487	0,05220	0,05862	0,06400	0,06817	0,07
0,85	0,007312	0,01451	0,02149	0,02812	0,03431	0,03994	0,04489	0,04905	0,05231	0,05
0,90	0,004937	0,009800	0,01451	0,01900	0,02319	0,02700	0,03036	0,03320	0,03544	0,03
0,95	0,002487	0,004937	0,007312	0,009575	0,01168	0,01361	0,01531	0,01675	0,01789	0,01
1,00	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»

$m(1-m)(2-m)-\left(\frac{x}{l}\right)^3(1-m).$

$\frac{x}{l}$.

).55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
,12251									
,11835	0,11520								
11069	0,10867	0,10351							
10024	0,09900	0,09506	0,08820						
08731	0.08662	0,08369	0,07831	0,07031					
07232	0,07200	0,06987	0,06580	0.05962	0,05120				
05569	0,05557	0,05411	0,05119	0.04669	0,04050	0.03251			
03781	0,03780	0,03689	0,03500	0,03206	0,02800	0,02274	0,01620		
01911	0,01912	0,01869	0,01776	0,01631	0,01430	0,01169	0,008437	0,004512	
»	»	»	«	»	»	»	»	»	»

A titre d'exercice nous indiquerons encore comment on parviendrait directement dans le cas de I constant à l'expression de v en utilisant l'équation différentielle

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M.$$

A gauche de la charge, pour $x < \alpha$ on a $M = \frac{P(l-\alpha)}{l}x$. Par suite, on a nécessairement, puisque $v = 0$, pour $x = 0$,

$$EIv = Bx + \frac{P(l-\alpha)}{l}\frac{x^3}{6}$$

B étant une constante à déterminer.

A droite de la charge, pour $x > \alpha$ on a $M = \frac{P\alpha}{l}(l-x)$. Par suite, on doit avoir de ce côté

$$EIv = C(l-x) + P\frac{\alpha}{l}\frac{(l-x)^3}{6},$$

C étant une nouvelle constante. On déterminera B et C en écrivant que pour $x = \alpha$ les deux expressions de v et de $\frac{dv}{dx}$ ont même valeur, ce qui donne les deux conditions

$$B\alpha + P\frac{(l-\alpha)\alpha^3}{6l} = C(l-\alpha) + P\frac{\alpha(l-\alpha)^3}{6l},$$

$$B + P\frac{(l-\alpha)\alpha^2}{2l} = -C - P\frac{\alpha(l-\alpha)^2}{2l}.$$

En multipliant la seconde équation par $l-\alpha$ et en l'ajoutant à la première on élimine C et il vient

$$Bl + P\frac{\alpha(l-\alpha)}{6l}[3l\alpha - 2\alpha^2] = -P\frac{\alpha(l-\alpha)^3}{6l}\times 2,$$

d'où

$$B = -P\frac{\alpha(l-\alpha)}{6l}(2l-\alpha).$$

Finalement, on a, à gauche de la charge, l'expression précédemment trouvée, savoir :

$$v = -\frac{P}{6EIl}[x\alpha(l-\alpha)(2l-\alpha) - x^3(l-\alpha)].$$

2° *Cas d'une charge uniformément répartie p.* — On a alors

$$M = \frac{p}{2}\xi(l-\xi)$$

et l'on en déduit facilement

$$-\omega_0 = \omega_1 = \frac{pl^3}{24\,EI},$$

$$v = -\frac{pl^4}{24\,EI}\left[\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\left(2 - \frac{x}{l}\right)\right] = -\frac{pl^4}{24\,EI}\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[1 + \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right].$$

Au milieu de la poutre, pour $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$, on a

$$v = -\frac{5}{384}\,\frac{pl^4}{EI}.$$

On pourrait encore pour trouver v partir de l'équation différentielle de la ligne élastique, qui peut se mettre dans ce cas sous la forme

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = p\,\frac{x(l-x)}{2}.$$

On en déduit

$$EI\,v = Bx + \frac{plx^2}{12} - \frac{px^4}{24}.$$

Comme on doit avoir $v = 0$, pour $x = l$, il en résulte

$$Bl = \frac{pl^4}{24} - \frac{pl^4}{12} = -\frac{pl^4}{24},$$

et par suite

$$EI\,v = -\frac{pl^4}{24}\left(\frac{x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^4}{24\,l^4}\right),$$

même résultat que précédemment.

On pourrait encore partir de l'équation différentielle

$$EI\,\frac{d^4v}{dx^4} = -p$$

qui ne suppose pas connue d'avance l'expression du moment fléchissant M. On en déduirait

$$EI\,v = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 - \frac{px^4}{24}$$

et l'on déterminerait les quatre constantes en écrivant que pour

$x = 0$ et pour $x = l$, on a

$$v = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} =$$

Les conditions relatives à $x = 0$ donnent

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad C = 0,$$

et les deux autres fournissent

$$D = \frac{pl}{12}, \qquad B = -\frac{pl^2}{24}.$$

Déformation d'une poutre d'égale résistance. — Lorsque, sous un système de charges donné, la fatigue maxima se trouve la même dans toutes les sections, on dit que la poutre est d'*égale résistance*, expression qui a un sens tout relatif, car elle ne se rapporte qu'au système de charges considéré.

Cette hypothèse équivaut à poser

$$R = \frac{Mh}{I}, \qquad R' = \frac{Mh'}{I}$$

pour les fibres extrêmes de chaque section, ou

$$R + R' = \frac{M}{I}(h + h') = \frac{M}{I}H,$$

en désignant par H la hauteur totale de la section, ou enfin

$$\frac{M}{I} = \frac{R + R'}{H};$$

Le deuxième membre se réduit à $\frac{2R}{H}$ si $R' = R$.

On peut donc dans tous les calculs de déformation substituer $\frac{R + R'}{EH}$ à $\frac{M}{EI}$. La quantité $R + R'$ est supposée une constante, représentant le double de la fatigue moyenne dans chaque section. Quant à H, on lui attribuera la forme analytique résultant du tracé de la poutre. Si H est constant, la quantité $\frac{M}{EI} = \frac{R + R'}{EH}$ peut sortir de tous les signes d'intégration.

Nous avons vu que le déplacement vertical v est le moment fléchissant dû à une charge fictive continue $\frac{M}{EI}d\xi$. Dans l'hypo-

thèse actuelle, la charge fictive sera uniformément répartie sur toute la longueur à raison de $\frac{R + R'}{EH}$ par unité de longueur.

La ligne représentative de v sera alors une parabole dont l'ordonnée au sommet f aura pour valeur

$$f = \frac{R + R'}{EH} \times \frac{l^2}{8}.$$

Cette formule présente un certain intérêt en ce qu'elle permet de calculer approximativement la flèche d'abaissement au milieu de la poutre quand on a simplement une idée de la valeur moyenne de la fatigue élastique. Inversement, si dans un essai de poutre on a mesuré la flèche, on en déduira approximativement la valeur moyenne de la fatigue élastique, mais bien entendu cela suppose que la fatigue élastique est sensiblement la même d'un bout à l'autre sous la surcharge d'épreuve qui a été employée.

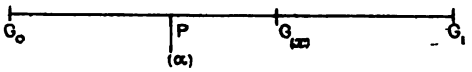
CHAPITRE IX.

CONSOLES. POUTRES-CONSOLES. PONTS-GRUES.

I. — Consoles simples.

Une console simple est une poutre droite complètement libre à l'une de ses extrémités, celle de gauche par exemple, et fixée seulement à son autre extrémité.

Fig. 77.



Puisqu'il n'y a aucune réaction à l'extrémité G_0, la force extérieure et ses composantes, moment fléchissant et effort tranchant, ne dépendent, dans une section transversale G, que des charges appliquées à gauche de cette section.

Charge isolée. - Une charge P appliquée suivant la verticale (α) produira, dans la section G d'abscisse x, un moment fléchissant négatif

$$M = P(\alpha - x), \qquad \text{si} \qquad \alpha < x,$$

et un moment fléchissant nul si $\alpha > x$.

La même charge produira un effort tranchant négatif

$$T = -P$$

si elle est à gauche de G et un effort tranchant nul

$$T = 0$$

si elle est à droite.

Charge uniformément répartie p. — Le moment fléchissant dans la section x est

$$M = -p\frac{x^2}{2};$$

l'effort tranchant est

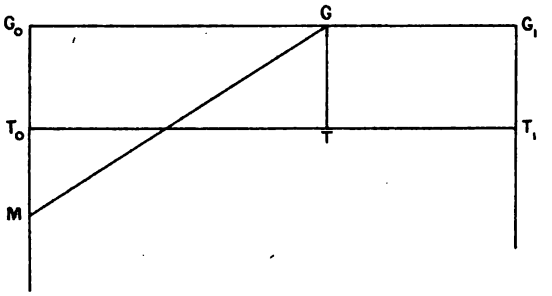
$$T = -px.$$

Ligne d'influence du moment fléchissant. — Son équation est $M = \alpha - x$ entre G_1 et G et $M = 0$ entre G et G_1. C'est donc l'ensemble des deux segments de droite MG et GG_1. On a

$$G_0M = G_0G = x.$$

Pour obtenir le maximum du moment fléchissant dans la sec-

Fig. 78.



tion G, il convient donc de charger autant qu'on le pourra la zone G_0G, les plus fortes charges étant, s'il y a lieu, placées le plus près possible de l'extrémité G_0. La charge de la zone GG_1 est indifférente.

Ligne d'influence de l'effort tranchant. — Si l'on trace la ligne T_0T_1 parallèle à G_0G_1 et à la distance unité, la ligne d'influence de l'effort tranchant se composera des deux segments de droite T_0T et GG_1.

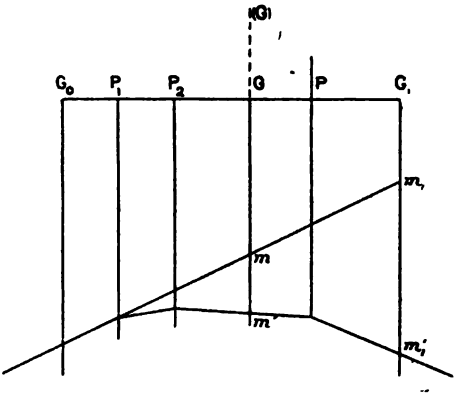
Pour obtenir le maximum de l'effort tranchant, on devra charger autant qu'on le pourra la zone G_0G, la répartition de la charge totale étant d'ailleurs indifférente. La charge de la zone GG_1 est également indifférente.

Réaction en G_1. — La réaction de l'appui G_1 se composera : 1° d'une force égale et directement opposée à la résultante de toutes les charges appliquées ; 2° d'un moment égal et directement opposé au moment total de toutes les charges appliquées par rapport au point G_1.

Déterminations graphiques. — Si l'on trace un polygone funiculaire des charges, le moment fléchissant sera pour une section

donnée le segment mm' compris entre le premier côté et le dernier côté du polygone funiculaire partiel afférent aux charges situées à gauche ou, ce qui revient au même, entre le premier côté et le polygone funiculaire lui-même.

Fig. 79.



Le polygone funiculaire, *rapporté à son premier côté*, constitue donc la ligne représentative des moments fléchissants.

Le polygone des forces, qui constitue l'échelle intégrale des forces à partir de l'extrémité de gauche, constitue par cela même l'échelle *fonctionnelle* de l'effort tranchant.

Les réactions de l'appui G_1 ne sont autre chose que le moment fléchissant et l'effort tranchant en G_1 changés de signe. Ceux-ci sont également donnés par les constructions précédentes.

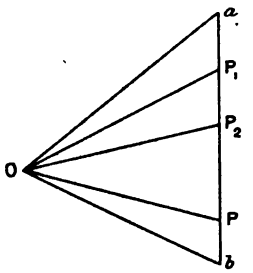
Étude de la déformation. — Dans un cas donné de charge, on obtiendra toujours la forme de la ligne élastique, d'après le principe général, en construisant le polygone funiculaire des charges fictives $-\frac{M\,d\xi}{EI}$, M étant le moment flechissant dû aux charges dans la section (ξ).

Pour avoir la ligne représentative de v, il suffit de rapporter le polygone funiculaire à une ligne de référence appropriée. Ici nous supposons que la console est encastrée, c'est-à-dire que son extrémité G_1 ne bouge pas et qu'il en est de même d'un point infiniment voisin de G_1. La ligne de référence cherchée doit donc être

la tangente extrême du polygone funiculaire, au point qui est situé sur la verticale (G_1).

Si l'on supposait l'encastrement imparfait, c'est-à-dire si l'on supposait que la fibre moyenne déformée pût tourner d'un certain

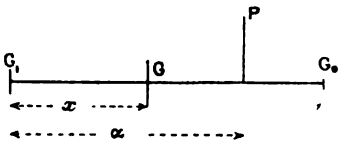
Fig. 80.



angle ω_1 autour du point G_1, les ordonnées du polygone funiculaire, comptées à partir de sa tangente extrême, représenteraient toujours les déplacements verticaux à partir de la tangente à la fibre moyenne déformée. Pour avoir les déplacements verticaux totaux, il suffirait d'y ajouter les déplacements verticaux subis par les points de cette tangente dans sa rotation, c'est-à-dire de prendre comme ligne de référence une droite passant en G_1 et correspondant à l'angle $-\omega_1$. (Si l'épure n'est pas faite en vraie grandeur, comme c'est ordinairement le cas, il faut évidemment tenir compte de la déformation de la figure par voie d'amplification ou de réduction d'ordonnées.)

Dans le cas particulier où I est constant, on peut faire les intégrations dans divers cas simples de surcharge.

Fig. 81.



Prenons comme origine des abscisses le point d'encastrement, c'est-à-dire supposons la poutre retournée bout pour bout. Au point d'encastrement on a une rotation nulle, de sorte que

l'expression de v se réduit à

$$v = \int_0^x \frac{M}{EI}(x - \xi)\, d\xi.$$

1° *Cas d'une charge isolée* P *d'abscisse* α. — Supposons d'abord $\alpha > x$. Dans tout l'intervalle de o à x on a $M = P(x - \alpha)$. En effectuant l'intégration, on trouve facilement

$$-v = \frac{Px^2}{6EI}(3\alpha - x).$$

Si l'on suppose maintenant $\alpha < x$, on appliquera par exemple le théorème de Maxwell et l'on cherchera le déplacement de la section α sous l'action d'une charge P placée dans la section x. On trouvera

$$-v = \frac{P\alpha^2}{6EI}(3x - \alpha).$$

2° *Cas d'une charge uniformément répartie p.* — On a tout le long de la poutre

$$M = p\frac{(l - \xi)^2}{2}.$$

L'intégration conduit à la formule

$$-v = \frac{p}{2EI}\left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right].$$

Le déplacement de l'extrémité libre, pour laquelle $x = l$, est

$$-v = \frac{pl^4}{8EI}.$$

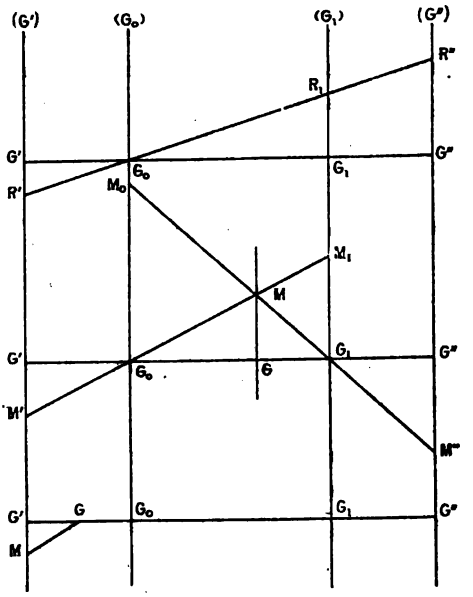
II. — POUTRES-CONSOLES.

Une poutre-console est une poutre droite reposant sur deux appuis simples G_0 et G_1 qui ne correspondent pas à ses extrémités et qui divisent sa longueur en trois parties distinctes : une partie centrale comprise entre les appuis et deux consoles en porte à faux $G'G_0$ et G_1G'', dont nous désignerons les longueurs respectives par l, l' et l''.

Réactions des appuis. — Ces réactions se déterminent par les seules équations de la statique, tout comme si les appuis corres-

pondaient aux extrémités de la poutre. En prenant G_0 comme origine des coordonnées et en désignant par α l'abscisse, positive ou négative de la charge P, le moment de cette charge par rapport

Fig. 82.



à G_0 sera toujours $P\alpha$. L'équation des moments appliquée à G_1 donne donc toujours

$$R_0 = P\frac{(l-\alpha)}{l};$$

on aurait de même

$$R_1 = \frac{P\alpha}{l}.$$

La ligne d'influence de R_1 sera donc toujours la droite $G_0 R_1$, avec la condition $G_1 R_1 = 1$, mais cette droite devra être prolongée dans l'étendue des travées-consoles. Dans l'étendue de la travée-console de gauche, R_1 est négatif, de sorte qu'il pourra y avoir à considérer un maximum négatif en même temps qu'un maximum positif. Il pourra se faire que l'on ait besoin de prendre des dispositions pour empêcher le soulèvement de la poutre sur cet appui, dans certains cas de surcharges.

Il en est évidemment de même pour R_0.

Dans le cas de charges simultanées on n'a évidemment qu'à faire les sommations relatives aux différentes charges après avoir multiplié chacune d'elles par l'ordonnée correspondante de la ligne d'influence, soit qu'on relève celle-ci sur l'épure, soit qu'on la calcule directement,

Dans le cas d'une surcharge uniformément répartie, on trouverait R_1 en faisant la surface totale de la ligne d'influence et en la multipliant par p. Le résultat est

$$R_1 = \frac{p}{2l}[(l + l'')^2 - l''^2].$$

On trouverait de même

$$R_0 = \frac{p}{2l}[(l + l')^2 - l'^2].$$

Moments fléchissants. — Il y a deux cas à distinguer suivant la situation de la section G, d'abscisse α.

1° Si G est sur la partie centrale, le moment fléchissant y est produit à la fois par la réaction d'appui R_0 et par l'ensemble des charges appliquées à sa gauche. On a donc, comme dans le cas de la poutre simple,

$$M = R_0 x - \sum_g P(x - \alpha).$$

Toutes les conséquences que nous en avons tirés précédemment subsistent. L'orsque l'on a une charge isolée, on a

$$M = P\alpha\frac{(l - x)}{l} \quad \text{si} \quad \alpha < x,$$

$$M = P\frac{(l - \alpha)}{l}x \quad \text{si} \quad \alpha > x,$$

et cela quelle que soit la valeur positive ou négative de α, puisque la formule donnant R_0 est absolument générale.

La ligne d'influence de M sera donc composée toujours des portions G_0M et MG_1 des deux droites G_0M_1 et G_1M_0 qui se croisent sur la verticale de G, au point M dont l'ordonnée est

$$\frac{x(l - x)}{l}.$$

Mais ces deux droites doivent être prolongées suivant G_0M' et G_1M'' dans l'étendue des travées-consoles. Les moments fléchissants sont donc négatifs dans l'étendue de ces consoles, c'est-à-dire pour toute charge placée sur elles. Il y aura lieu de considérer sous l'effet des surcharges un maximum négatif pour le moment fléchissant aussi bien qu'un maximum positif. Pour obtenir le maximum positif, on chargera autant qu'on le pourra la travée centrale comme si elle existait seule. Pour obtenir le maximum négatif, on chargera autant qu'il sera possible soit les deux consoles à la fois, soit tout au moins l'une d'elles.

2° Supposons maintenant que la section G soit sur une des consoles, celle de gauche par exemple.

On n'aura qu'à appliquer les résultats obtenus pour la console simple. Le moment fléchissant en G est indépendant des charges situées à sa droite. La ligne d'influence de ce moment est par suite composée d'une droite telle que GM, l'ordonnée G'M représentant à l'échelle convenue la longueur G'G. A droite de G la ligne d'influence se confond avec l'axe des x.

Efforts tranchants. — Il y a à distinguer deux cas comme pour les moments fléchissants :

1° La section G est dans la partie centrale de la poutre.

On a toujours la relation générale

$$T = R_0 - \sum_g P$$

avec toutes les conséquences qui s'en déduisent. S'il s'agit d'une charge isolée, on a donc toujours

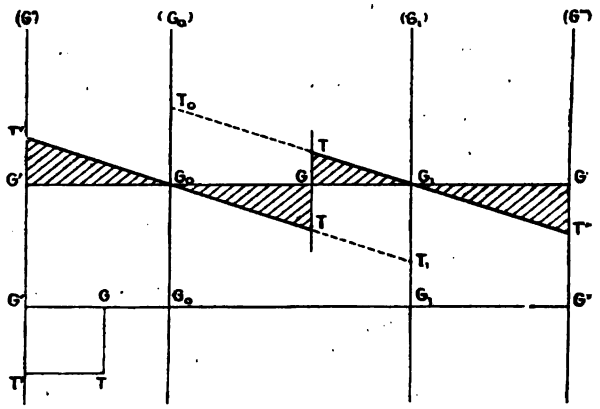
$$T = R_0 = P\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{si} \quad x > x,$$

$$T = R_0 - P = -P\frac{x}{l} \quad \text{si} \quad x < x.$$

La ligne d'influence de T est donc toujours constituée par les deux droites parallèles T_0G_1 et G_0T_1 qui découpent sur les verticales (G_0) et (G_1) des segments égaux à l'unité adoptée. Les segments utiles sont le segment TG_1 prolongé jusqu'en T'' et le

segment $G_0 t$ prolongé en arrière jusqu'en T'. La surface de la ligne d'influence est la partie hachurée sur la figure.

Fig. 83.



On a deux zones positives et deux zones négatives, qu'il faudra envisager séparément pour avoir les maxima positifs et négatifs de l'effort tranchant, sous l'effet des surcharges.

2° La section G est sur l'une des consoles, celle de gauche par exemple.

On n'a qu'à appliquer les résultats obtenus pour la console simple. L'effort tranchant en G est indépendant des charges situées à sa droite. La ligne d'influence est par suite composée du segment T'T de l'horizontale menée au-dessous de l'axe des x, G T étant égal à l'unité adoptée. A droite de G la ligne d'influence se confond avec l'axe des x.

Déterminations graphiques. — Traçons un polygone funiculaire de toutes les forces appliquées, quelles que soient leurs lignes d'action par rapport à la travée centrale ou par rapport aux consoles. Soit AI son premier côté qui coupe en I la verticale (G_0) et soit BJ son dernier côté qui coupe en J la verticale (G_1).

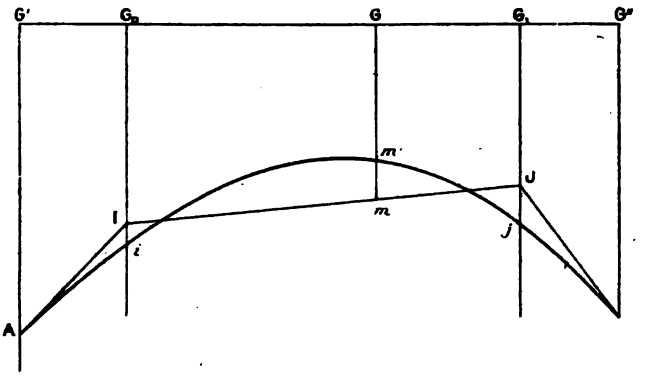
La ligne de fermeture relative aux deux verticales d'appui est IJ. C'est parallèlement à cette ligne de fermeture qu'il faudra mener par le pôle O la droite $O\omega$ qui déterminera sur le polygone des

forces les réactions d'appui

$$\omega a = R_0, \qquad b\omega = R_1.$$

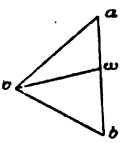
Dans la partie centrale de la poutre, le polygone funiculaire rapporté à sa ligne de fermeture constituera toujours la ligne repré-

Fig. 84.



sentative des moments fléchissants. En effet, pour trouver le moment fléchissant en G, il faut envisager comme première force R_0,

Fig. 85.



et ensuite toutes les forces situées à gauche. Le premier côté du polygone funiculaire correspondant est JI, le second est IA, parallèle à Oa, et les autres viennent dans leur ordre. Le moment cherché est donc $m\,m'$ compté sur la verticale (G) entre I J ligne de fermeture et le côté afférent à la dernière charge prise en compte à gauche de G.

Dans l'étendue de la console G' G_0, ainsi que nous l'avons vu, la courbe représentative est le polygone funiculaire rapporté à son premier côté AI, car il n'y a nullement ici à prendre en considération la réaction d'appui R_0.

On peut donc dire que la ligne représentative des moments fléchissants est entièrement constituée par le polygone funiculaire des charges appliquées, à la seule condition de compter ses ordonnées à partir de la ligne brisée AIJB, constituée par le premier et le dernier côté du polygone et par la ligne de fermeture IJ relative aux verticales des appuis.

Rien n'empêche évidemment, si cela est plus commode pour les constructions, de remplacer les portions Ai et jB du polygone funiculaire total, par des polygones différents construits avec la même distance polaire, les segments Ii et Jj conservant leurs valeurs et pouvant toujours servir à la détcrmination de la ligne de fermeture IJ.

En ce qui concerne l'effort tranchant, son échelle fonctionnelle est donnée par le polygone des forces.

Dans la console de gauche, il faut prendre comme origine de l'échelle l'origine a du polygone des forces. Puis dans la travée centrale, il faut déplacer l'origine et la prendre au point ω, afin de prendre en compte la réaction R_0. Enfin, dans la console de droite, il faut prendre comme origine l'extrémité b du polygone des forces, afin de prendre en compte R_1. Cela revient du reste à changer la poutre bout pour bout.

Étude de la déformation. — Nous n'avons qu'à répéter que la ligne élastique est définie, quant à sa forme, comme étant le polygone funiculaire des force fictives $-\frac{M\,d\xi}{EI}$.

Quant à la ligne de référence à adopter, ce sera évidemment la corde de ce polygone comprise entre les verticales (G_0) et (G_1), puisqu'on suppose que les appuis G_0 et G_1 sont fixes et qu'en ces points on doit avoir $v = 0$.

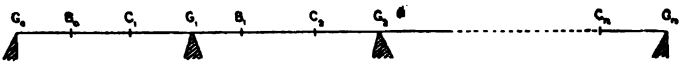
Pour trouver la ligne d'influence de v dans une section donnée on appliquerait le théorème de Maxwell et l'on chercherait la ligne élastique correspondant à une charge unité placée dans cette section.

III. — Ponts-grues complets ou incomplets.

Définition des ponts-grues complets. — Nous appellerons, avec M. Résal, *pont-grue complet* un ouvrage composé de n travées et

reposant par suite sur $n+1$ appuis, qui est constitué dans chaque travée par une poutre centrale, *indépendante*, reposant sur les abouts de deux consoles encastrées sur les appuis voisins. On sup-

Fig. 86.



pose que les attaches des poutres centrales sont capables de laisser le libre jeu des dilatations.

Sur les appuis extrêmes G_0 et G_1, il peut n'y avoir pas de consoles.

Ce genre d'ouvrages jouit des propriétés caractéristiques suivantes :

1° Les dénivellations des appuis sont sans influence sur la répartition des efforts dans la construction.

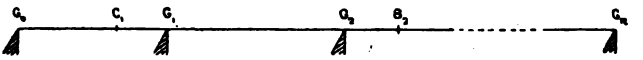
2° Une surcharge ne produit d'effet que sur tout ou partie de la travée dans laquelle elle est placée.

Définition des ponts-grues incomplets. — On appelle *pont-grue incomplet* un ouvrage qui se déduirait du précédent par la substitution aux consoles doubles encastrées sur les piles, ou seulement à quelques-unes d'entre elles, de *poutres-consoles*. On peut dire encore qu'un pont-grue incomplet dérive d'un pont-grue complet lorsqu'on soude dans une travée sur deux les poutres indépendantes aux consoles et que d'ailleurs on supprime les encastrements sur tous les appuis.

Aux extrémités on peut avoir soit une poutre indépendante, soit une console en porte à faux, soit une poutre-console n'ayant pas de porte à faux du côté du premier appui.

La figure ci-dessous en donne un exemple schématique.

Fig. 87.



Ce genre d'ouvrages jouit comme le précédent de la propriété d'être insensible aux dénivellations d'appui. Les effets produits par une charge ne s'étendent aussi qu'à une partie limitée de

l'ouvrage, quoique plus étendue que dans le cas précédent. Ainsi une charge placée sur une poutre indépendante telle que $G_0 C_1$ fait sentir son action sur la portion $G_1 G_2$ de la poutre-console voisine.

Étude des différentes parties d'un pont-grue. — L'étude de semblables ouvrages est extrêmement simple et dérive de ce qui a été exposé précédemment.

Les poutres indépendantes ne sont aucunement influencées par les charges situées en dehors d'elles. Ce sont des poutres posées sur deux appuis simples, et on les étudiera comme telles.

Quant aux consoles et aux poutres-consoles, les effets des charges qu'elles supportent directement seront exactement ceux qui ont été étudiés aux articles précédents. La présence des poutres indépendantes est à cet égard indifférente.

Il ne reste donc qu'à étudier l'effet produit sur les consoles et poutres-consoles par les charges appliquées aux poutres indépendantes et cette étude sera facile en raison des considérations suivantes :

Une charge appliquée à une poutre indépendante fait intervenir aux deux extrémités de celle-ci des réactions d'appui qui sont des fonctions linéaires de son abscisse x. Ce sont ces réactions d'appui qui constituent les charges transmises aux abouts des consoles. Il en résulte que la ligne d'influence d'un effet quelconque produit dans une console ou poutre-console par une charge mobile P, parcourant la poutre indépendante voisine, sera toujours une portion de ligne droite, au droit de cette poutre indépendante. Cette ligne droite passera par deux points faciles à déterminer. En effet, quand la charge mobile est placée à l'extrémité de la poutre indépendante qui coïncide avec l'about de la console, elle produit exactement le même effet que si elle était placée sur l'about même de la console, la réaction produite étant égale à P. D'autre part, quand la charge est placée à l'autre extrémité de la poutre indépendante, elle produit un effet nul, la réaction sur l'about de la console étant elle-même nulle.

CHAPITRE X.

POUTRES ENCASTRÉES.

I. — Poutre encastrée a ses deux extrémités.

Définitions. — On dit d'une manière générale qu'une poutre *est encastrée* à une de ses extrémités, ou sur un de ses appuis, lorsque la section correspondante est assujettie à conserver une orientation fixe dans tous les états déformés de la poutre. La réaction de l'appui dont il s'agit ne peut plus, en général, passer par le centre de gravité de la section encastrée. Si on la transporte à ce centre de gravité, il faut lui adjoindre un certain couple qui s'appellera *moment d'encastrement* sur l'appui.

Dans le cas d'une poutre droite uniquement sollicitée par des forces verticales, la réaction de l'appui sera donc constitué à la fois par une réaction verticale et par un moment d'encastrement. Il y aura pour définir les réactions d'appui quatre quantités

Fig. 88.

inconnues, à raison de deux par appui. Les équations de la statique, au nombre de deux seulement, ne nous permettront pas de déterminer ces quatre inconnues. Nous sommes donc en présence d'un *système hyperstatique*, c'est-à-dire d'un système dont la statique seule ne peut déterminer les conditions d'équilibre. Pour lever l'indétermination, il faut recourir aux équations capables d'exprimer analytiquement les conditions auxquelles sont supposées assujetties les extrémités, équations de déformation, ou bien équations du travail de déformation minimum. Nous emploierons de préférence les équations de déformation qui sont sous une forme explicite.

Équations d'équilibre statique. — Réactions complémentaire

d'appui. — Comme nous l'avons expliqué dans la théorie générale des poutres, on simplifiera le problème en étudiant d'abord la poutre de même portée, soumise aux mêmes charges, mais *dans l'hypothèse où elle reposerait à ses deux bouts sur des appuis simples ou statiques*. Dans cette hypothèse, on pourra déterminer les réactions d'appui que nous appellerons R'_0 et R'_1, et trouver pour chaque section transversale G le moment fléchissant que nous appellerons μ et l'effort tranchant $\frac{d\mu}{dx}$. Les réactions R'_0 et $(-R'_1)$ seront d'ailleurs respectivement égales aux valeurs de $\frac{d\mu}{dx}$ pour $x = 0$ et pour $x = l$. On pourra aussi supposer déterminés les angles ω_0 et ω_1 que fait avec sa direction primitive l'axe longitudinal déformé à ses deux extrémités G_0 et G_1.

Cela fait, il ne s'agit plus que de déterminer les *réactions complémentaires d'appui*, lesquelles sont nécessairement deux forces égales et directement opposées. Si l'on désigne par M le moment fléchissant réel en G, on sait que la différence $M - \mu$ est une fonction linéaire de l'abscisse x de G. C'est un cas particulier d'un théorème général précédemment démontré. On peut donc poser pour tout point

$$M - \mu = A + Bx; \tag{1}$$

A et B sont ce qu'on peut appeler les *composantes de la réaction complémentaire de l'appui de gauche* G_0. A est son moment par rapport à l'origine des abscisses, et B sa composante verticale. On a d'ailleurs, pour $x = 0$ $\mu = 0$, et par suite $A = M_0$, ce qui était évident puisque M_0 ne peut provenir que du moment de la réaction complémentaire.

Appliquons l'équation précédente à la section transversale qui est infiniment voisine de G_1 et pour laquelle $x = l$ et désignons par par M_1 le moment fléchissant en ce point (moment qui sera égal et de signe contraire au moment d'encastrement sur l'appui G_1); nous aurons, μ étant nul,

$$M_1 = A + Bl = M_0 + Bl,$$

d'où

$$B = \frac{M_1 - M_0}{l}.$$

En dérivant par rapport à x l'équation (1) qui donne les

moments M on en obtient une seconde qui donne l'effort tranchant en chaque point et qui est

$$(2) \qquad T - \frac{d\mu}{dx} = B.$$

Appliquons-la aux deux extrémités de la poutre, et d'abord en G_0. On doit avoir $T = R_0$ et $\left(\frac{d\mu}{dx}\right)_0 = R'_0$. Donc

$$R_0 - R'_0 = B,$$

ce qui était évident.

En G_1 on a $T = -R_1$ et $\left(\frac{d\mu}{dx}\right)_1 = -R'_1$, et l'on en déduit encore $-R_1 + R'_1 = B$, comme cela devait être.

Nous voyons donc de nouveau que le fait d'avoir exprimé M et T par les équations (1) et (2) assure toutes les conditions d'équilibre statique tant de la poutre entière que de chacun de ses tronçons. Cela dispense d'écrire les équations d'équilibre statique.

Le problème revient par suite à déterminer les deux constantes A et B, en fonction desquelles les quatre quantités M_0, M_1, R_0, R_1 peuvent facilement s'exprimer. Il est du reste loisible de leur substituer M_0 et M_1, ce qui donne plus de symétrie dans la plupart des calculs.

C'est ce que nous ferons dans le cas actuel et les équations (1) et (2) s'écriront :

$$(1) \qquad M - \mu = M_0 + \frac{M_1 - M_0}{l} x = M_0 \frac{l - x}{l} + M_1 \frac{x}{l},$$

$$(2) \qquad T - \frac{d\mu}{dx} = \frac{M_1 - M_0}{l}.$$

Application des équations de déformation à la recherche de M_0 et M_1. — Les équations générales de déformation des poutres droites sont

$$\omega = \omega_0 + \int_0^x \frac{M\,d\xi}{EI},$$

$$v = \omega_0 x + \int_0^x \frac{M(x - \xi)}{EI}\,d\xi.$$

Si on les applique à l'extrémité G_1 dans le cas actuel où $\omega_0 = 0$ et où l'on suppose aussi $\omega_1 = 0$ et $v_1 = 0$, on obtient les deux équa-

tions de condition

$$\int_0^l \frac{M\,d\xi}{EI} = 0,$$

$$\int_0^l \frac{M(l-\xi)}{EI}\,d\xi = 0.$$

En tenant compte de la première, la seconde peut s'écrire

$$\int_0^l \frac{M\xi}{EI}\,d\xi = 0,$$

et cette nouvelle équation peut remplacer la première.

Substituons dans les deux équations de condition l'expression générale de M, nous obtiendrons

$$M_0\int_0^l \frac{(l-\xi)^2}{EI}\,d\xi + M_1\int_0^l \frac{\xi(l-\xi)}{EI}\,d\xi + l\int_0^l \frac{\mu(l-\xi)}{EI}\,d\xi = 0,$$

$$M_0\int_0^l \frac{\xi(l-\xi)}{EI}\,d\xi + M_1\int_0^l \frac{\xi^2}{EI}\,d\xi + l\int_0^l \frac{\mu\xi}{EI}\,d\xi = 0.$$

Les intégrales, coefficients de M_0 et M_1, sont ce que nous avons appelé précédemment *abc*. Quant aux intégrales qui contiennent μ, ce sont les produits par l des valeurs que l'on obtiendrait pour les angles de rotation $-\omega_0$ et ω_1 des extrémités de la poutre, dans l'hypothèse où celle-ci serait posée sur deux appuis simples. Avec ces notations, les équations s'écrivent

$$(3)\qquad \begin{cases} b\,M_0 + a\,M_1 = \quad l^2\omega_0, \\ a\,M_0 + c\,M_1 = -\,l^2\omega_1. \end{cases}$$

On en déduit

$$(bc - a^2)M_0 = \quad l^2(c\,\omega_0 + a\,\omega_1),$$

$$(bc - a^2)M_1 = -\,l^2(b\,\omega_1 + a\,\omega_0).$$

Nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse particulière sur les charges. Si nous supposons qu'il s'agit du cas d'une charge isolée P d'abscisse α, on voit que le problème sera résolu dès que l'on aura construit les lignes d'influence de $l\omega_0$ et $l\omega_1$ ainsi que nous avons appris à le faire. Il suffira de relever les ordonnées relatives à l'abscisse α et d'en introduire les valeurs multipliées par P dans les deux équations qui précèdent.

Pour le cas de charges simultanées, on ferait leurs produits par

les ordonnées correspondant à leurs différentes abscisses et ensuite les totaux.

Pour une charge continue $p\,d\alpha$, on ferait la surface des lignes d'influence et on la multiplierait par p.

Détermination directe des lignes d'influence de M_0 et M_1 et plus généralement de $M - \mu$ pour une section quelconque G. — Pour une section G d'abscisse x, on a

$$M - \mu = M_0 \frac{l-x}{l} + M_1 \frac{x}{l}.$$

Si l'on élimine M_0 et M_1 entre cette équation et les deux équations qui donnent M_0 et M_1, on obtient

$$(4)\quad (M-\mu)\frac{(bc-a^2)}{l} = (l-x)[c\omega_0 + a\omega_1] - x(a\omega_0 + b\omega_1)$$
$$= \omega_0[c(l-x) - ax] + \omega_1[a(l-x) - bx].$$

On voit déjà sur cette expression qu'il y a un point pour lequel $M - \mu$ ne dépend pas de ω_1 et est simplement proportionnel à ω_0. C'est le point pour lequel on a

$$\frac{x}{l-x} = \frac{a}{b}.$$

C'est le foyer de gauche F de la travée, son abscisse f satisfaisant précisément à cette relation, d'où l'on tire

$$f = l\frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad l - f = l\frac{b}{a+b}.$$

En ce point on a

$$(M-\mu)\frac{(bc-a^2)}{l} = \omega_0[c(l-f) - af] = f\omega_0\left[c\frac{b}{a} - a\right] = f\frac{\omega_0}{a}(bc-a^2),$$

d'où simplement

$$M - \mu = \frac{f}{a} l\omega_0.$$

De même il y a un point pour lequel $M - \mu$ ne dépend pas de ω_1. C'est le foyer de droite F' dont l'abscisse f' satisfait aux relations

$$\frac{l-f'}{f'} = \frac{a}{c} \quad \text{ou} \quad f' = l\frac{c}{a+c} \quad \text{ou encore} \quad l - f' = l\frac{a}{a+c}.$$

Pour ce point particulier on trouverait

$$M - \mu = -\frac{(l - f')}{a} l \omega_1.$$

Si dans le second membre de l'équation (4) on remplace ω_0 et ω_1 par les intégrales définies qui les représentent respectivement, et si l'on groupe sous le même signe d'intégration l'ensemble des termes, après avoir multiplié les deux membres par $\frac{l}{bc - a^2}$, on obtient une relation de la forme

$$(5) \qquad M - \mu = \int_0^l \frac{\mu\, d\xi}{EI} y,$$

en désignant par y la fonction de ξ et de x donnée par l'équation

$$(6) \qquad (bc - a^2) y = (\xi - l)[c(l - x) - ax] + \xi[a(l - x) - bx].$$

La ligne d'influence de $M - \mu$ s'obtiendra donc, en vertu du théorème du Chapitre VII, en construisant sur le réseau des droites de rappel (ξ), avec la distance polaire variable EI, un polygone funiculaire de forces fictives continues, dont l'intensité en chaque point serait égale à y.

Comme y est linéaire en ξ, il peut se représenter par une ligne droite, qui constituera la *ligne de charge*. A chaque section G, d'abscisse x, correspondra une ligne de charge particulière. Comme les coefficients de son équation sont eux-mêmes linéaires en x, toutes ces droites passeront par un point fixe, qu'on appellera *centre fixe* de la travée.

La démonstration de ce dernier résultat est connue. Si une droite

$$y = (a\alpha + b)x + (c\alpha + d)$$

a pour coefficients des fonctions linéaires d'un paramètre α, le point d'intersection de deux droites particulières correspondant à deux valeurs α_1 et α_2 du paramètre aura pour abscisse la racine de l'équation

$$a(\alpha_1 - \alpha_2)x + c(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

qui se réduit à

$$ax + c = 0$$

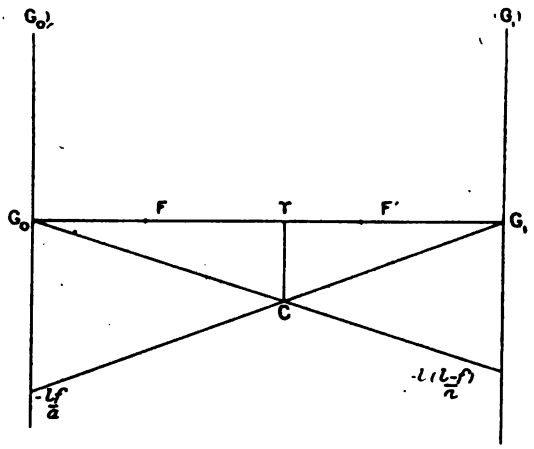
et est indépendante des valeurs particulières α_1 et α_2.

Passons rapidement en revue quelques positions particulières de la ligne de charge.

Si l'on fait $x = 0$, c'est-à-dire si G est confondu avec G_0, l'équation (6) devient

$$(bc - a^2)y = (\xi - l)lc + \xi la.$$

Fig. 89.



Elle coupe l'axe des x au point pour lequel on a

$$\frac{l - \xi}{\xi} = \frac{a}{c}.$$

Ce point est, comme nous l'avons vu, le foyer de droite F'.

Si l'on fait $x = f$, c'est-à-dire si G est confondu avec le foyer de gauche F, l'équation (6) se réduit à

$$(bc - a^2)y = (\xi - l)[c(l - f) - af],$$

car la parenthèse coefficient de ξ s'annule. Cette droite passe par le point G_1. Elle coupe d'ailleurs la verticale (G_0) au point dont l'ordonnée est donnée par l'équation

$$(bc - a^2)y = -l[c(l - f) - af] = -\frac{lf}{a}[bc - a^2]$$

ou

$$y = -\frac{lf}{a}.$$

On verrait de même que la ligne de charge correspondant à G_1

passerait par le foyer de gauche et que celle qui correspond à F′ passerait par G_0 et couperait la verticale (G_1) au point dont l'ordonnée est

$$y = -\frac{l(l-f')}{a}.$$

Quant au centre fixe C, on l'obtiendra par l'intersection des deux lignes de charge afférentes aux foyers. Si l'on désigne par m son abscisse $G_0\gamma$ et par n son ordonnée $C\gamma$, on aura les deux relations

$$n = -\frac{lf}{a}\frac{l-m}{l} = -\frac{l(l-f')}{a}\frac{m}{l}.$$

On en déduit

$$\frac{m}{l-m} = \frac{f}{l-f'}.$$

Le point γ est toujours compris entre les foyers, car on a évidemment

$$\frac{f}{l-f} < \frac{f}{l-f'} < \frac{f'}{l-f'}.$$

On a ensuite

$$n = -\frac{lf}{a}\frac{l-m}{l} = -\frac{lf(l-f')}{a(l+f-f')}.$$

La ligne de charge qui correspond au centre fixe est horizontale. En effet, si l'on cherche le point G satisfaisant à cette condition, il faut que son abscisse m annule le coefficient de ξ dans l'équation (6), ce qui donne

$$c(l-m) - am + a(l-m) - bm = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{m}{l-m} = \frac{a+c}{a+b} = \frac{f}{l-f'}.$$

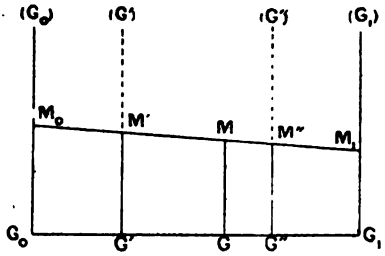
C'est la même condition que plus haut.

Ainsi, en résumé, quand G parcourt la poutre, la ligne de charge pivote autour du point C. Lorsque G est en G_0, la ligne de charge passe par F′; lorsque G arrive en F, la ligne de charge passe par G_1; enfin lorsque G vient en γ, à l'aplomb de C, la ligne de charge devient horizontale. Son point d'intersection avec l'axe des x est reporté à l'infini. Au delà, les mêmes variations se reproduisent en sens inverse, de sorte que la ligne de charge ne coupe jamais l'axe des x entre les deux foyers. *Le point où elle coupe*

l'axe des x détermine dans chaque cas le point d'inflexion de la ligne d'influence de M — μ, *lorsque* I *est constant et un point qui en est au moins très voisin dans tous les cas de la pratique.*

Détermination des lignes d'influence de M — μ au moyen de deux quelconques d'entre elles. Échelles fonctionnelles équivalentes. — Supposons qu'on ait déterminé les lignes d'influence de M — μ pour deux sections particulières, d'ailleurs quelconques G′ et G″.

Fig. 90.



Pour une position quelconque de la charge on sera en mesure de connaître les valeurs de M — μ en ces deux points. Portons sur les verticales (G′) et (G″) deux segments G′M′ et G″M″ égaux aux valeurs ainsi trouvées et traçons la droite M′M″. Cette droite sera la ligne représentative de (M — μ) aux différents points de la travée et le segment GM sera, en particulier, la valeur de M — μ au point G pour la position de la charge qui a été considérée.

Supposons maintenant que, pour une série de positions de la charge, on ait fait la même opération, ce qui revient à porter sur les verticales (G′) et (G″) les échelles fonctionnelles de (M — μ), échelles fonctionnelles qui sont une traduction des deux lignes d'influence supposées construites. L'ensemble des droites analogues à M′M″ déterminera sur la verticale (G) l'échelle fonctionnelle de la fonction M — μ afférente à la section correspondante G.

De cette échelle fonctionnelle, on pourra inversement déduire la ligne d'influence dont elle est la traduction.

Parmi les groupes de sections G′ et G″ que l'on peut envisager, il y en a deux particuliers dont le choix s'impose. C'est d'abord celui des deux sections d'appui G_0 et G_1. Ensuite celui des sections

des foyers. On a en effet, pour ces dernières, les relations simples écrites plus haut :

Au foyer de gauche..... $M - \mu = \frac{f}{a} l\omega_0$;

Au foyer de droite..... $M - \mu = -\frac{l - f'}{a} l\omega_1$.

Leurs lignes d'influence sont, à des facteurs près, les mêmes que celles de $l\omega_0$ et de $l\omega_1$ dont le tracé est en tout cas nécessaire pour déterminer les lignes en croix, les coefficients abc et la position des foyers.

Détermination et forme de la ligne d'influence de M, dans une section donnée. — On a évidemment

$$M = M - \mu + \mu = (M - \mu) - (-\mu).$$

Cela signifie que les ordonnées de la ligne d'influence de M sont les différences des ordonnées des deux lignes d'influence de $M - \mu$ et de $(-\mu)$. Cette dernière est, comme on sait, facile à tracer. Elle se compose de deux segments de droite $G_0\mu$ et μG_1, se coupant sur la verticale du point G au point μ d'ordonnée

$$-\frac{x(l-x)}{l}.$$

Il suffit donc de prendre comme ligne de référence l'ensemble de ces deux segments de droite $G_0\mu$ et μG_1 pour que la ligne d'influence de $M - \mu$ se transforme en la ligne d'influence de M.

La ligne d'influence de $M - \mu$ a d'ailleurs en G_0 et G_1 ses tangentes confondues respectivement avec les deux droites $G_0\mu$ et μG_1.

En effet, si l'on se reporte à l'expression générale de $M - \mu$, on a

$$(bc - a^2)(M - \mu) = [c(l-x) - ax]l\omega_0 + [a(l-x) - bx]l\omega_1.$$

Or, pour $\alpha = 0$, on a

$$\frac{d(l\omega_0)}{d\alpha} = -\frac{b}{l},$$

$$\frac{d(l\omega_1)}{d\alpha} = +\frac{a}{l},$$

d'après la définition même des lignes en croix et des coefficients *abc*. On a donc pour $\alpha = 0$

$$(bc - a^2)\frac{d(M - \mu)}{dx} = (-bc + a^2)\frac{l - x}{l}$$

ou

$$\frac{d(M - \mu)}{dx} = -\frac{l - x}{l}.$$

C'est précisément le coefficient angulaire de la droite $G_0\mu$.

De même, pour $\alpha = l$, on aurait

$$\frac{d(l\omega_0)}{dx} = \frac{a}{l}$$

et

$$\frac{d(l\omega_1)}{dx} = -\frac{c}{l},$$

d'où

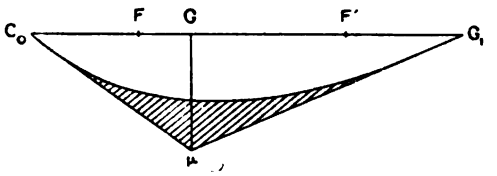
$$(bc - a^2)\frac{d(M - \mu)}{dx} = (bc - a^2)\frac{l - x}{l}$$

ou enfin

$$\frac{d(M - \mu)}{dx} = \frac{x}{l}.$$

C'est précisément le coefficient angulaire de μG_1.

Fig. 91.

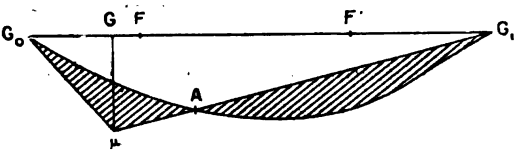


Cela posé, considérons une section G comprise entre les foyers. La ligne de charge correspondante coupe l'axe des x à droite de G_1. La ligne d'influence de $M - \mu$ a donc son point d'inflexion reporté à droite de G_1, de telle sorte que, entre G_0 et G_1, elle a une courbure toujours de même signe. On a donc forcément la disposition de la figure 91. Il en résulte que la ligne d'influence de M, rapportée au contour $G_0\mu G_1$, ne présente qu'une seule zone dans laquelle M est positif.

Considérons au contraire une section G comprise entre G_0 et le foyer de gauche F. La ligne de charge correspondante coupe l'axe

des x entre F' et G_1, et la ligne d'influence de $M - \mu$ a un point d'inflexion dans cette même région. On a donc la disposition de la figure 92. La ligne d'influence de M présente alors deux zones, une zone positive $G_0 \mu A$ et une zone négative AG_1.

Fig. 92.



Les cas limites sont intéressants à envisager.

Supposons que G tende vers l'appui de gauche G_0. La zone positive $G_0 \mu A$ diminuera de plus en plus et tendra vers zéro. Sa surface sera même un infiniment petit du troisième ordre, car $G_0 A$ sera du premier ordre, et la distance de μ à la courbe sera du second ordre. Il ne restera alors qu'une seule zone qui sera négative. Le coefficient angulaire de la ligne d'influence de $M - \mu$ pour $x = 0$, c'est-à-dire de M_0, est égal à -1 pour $\alpha = 0$, et à 0 pour $\alpha = l$.

Supposons ensuite que G tende vers F. La courbe aura son point d'inflexion en G_1 et la zone négative s'annulera. Son aire sera, au voisinage de F, un infiniment petit de troisième ordre.

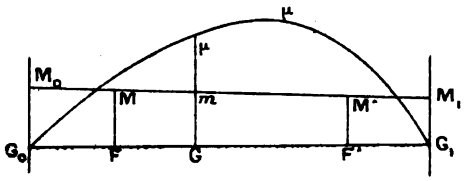
Utilisation des lignes d'influence. Méthodes abrégées pour la construction des lignes enveloppes. — La méthode des lignes d'influence est tout à fait générale et complète. Les résultats théoriques obtenus sont, au fond, assez simples et mettent en relief certains points importants. Elle permet de déterminer par points les lignes enveloppes.

En pratique, il importe de remarquer que toutes les lignes d'influence utiles à envisager pour M_0, M_1, $M - \mu$ ne sont que des combinaisons linéaires et homogènes de celles de $l\omega_0$ et $l\omega_1$. Si donc on a pu s'assurer que ces dernières sont assimilables, avec une approximation suffisante, à des arcs de paraboles cubiques, il en sera de même de toutes les autres, et l'on n'aura alors besoin pour les tracer, quand cela sera utile, que des points et des tangentes à leur extrémité, conformément à ce que nous avons dit au Chapitre VIII.

En outre, il n'est pas toujours nécessaire, pour parvenir à la détermination des lignes enveloppes des moments fléchissants, de procéder au tracé effectif des lignes d'influence relatives à toutes les sections que l'on a à étudier. Certaines simplifications se présentent d'elle-mêmes dans les principaux cas de charges et de surcharges que l'on envisage dans la pratique.

1° Supposons d'abord qu'on envisage la charge permanente; on la suppose uniformément répartie à raison de p^{kg} par unité de longueur, et elle s'applique nécessairement à toute la longueur. Si

Fig. 93.



l'on a seulement tracé les deux lignes d'influence de $M - \mu$ relatives aux foyers F et F', lignes d'influence qui sont celles de $l\omega_0$ et de $l\omega_1$, et qu'on est en tout cas conduit à envisager, on n'a qu'à évaluer leur surface et à la multiplier par p, pour avoir les ordonnées FM et F'M' de la droite $M_0 M_1$ qui représente la valeur de $\mu - M$ dans toute l'étendue de la travée.

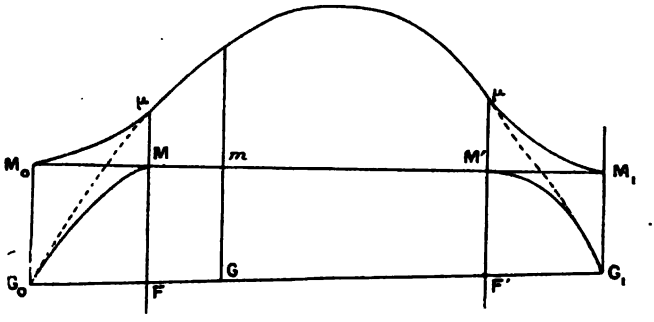
Si, d'autre part, on a tracé la parabole $G_0 \mu G_1$ à axe vertical, qui représente dans ce cas le moment μ, on aura dans chaque section G le moment cherché en faisant la différence $G\mu - Gm = m\mu$ des ordonnées de la parabole et de la droite, ou autrement dit en rapportant la parabole à la droite de fermeture $M_0 M_1$.

2° Supposons ensuite qu'on envisage une surcharge uniforme, ou bien une surcharge que l'on soit autorisé à assimiler à une charge uniforme pouvant couvrir indifféremment toutes les zones de la poutre (ponts-routes).

Voici comment on pourra opérer, en supposant toujours tracées les lignes d'influence de $M - \mu$ dans les sections des foyers. On tracera l'épure précédente relative à la surcharge supposée couvrant toute la poutre.

a. Pour toute section G comprise entre les foyers, on sait que le maximum positif s'obtient précisément quand la surcharge couvre toute la travée. La courbe enveloppe des maxima positifs est donc

Fig. 94.



constituée par l'arc de parabole $\mu\mu'$. Quant au maximum négatif, il est constamment nul. La courbe qui le représenterait, en adoptant pour ligne de référence $M_0 M_1$, serait donc le segment M M'.

b. Quand la section est entre G_0 et F, on a à la fois un maximum positif et un maximum négatif. A l'égard du premier, on sait qu'il devient nul en G_0. Sa courbe doit y être tangente à la ligne de référence, puisque, ainsi que nous l'avons vu, l'aire de la zone positive de la ligne d'influence par l'appui G_0 devient un infiniment petit du second ordre au moins. La courbe enveloppe représentant le maximum positif part donc de μ, tangentiellement à la parabole pour aboutir en M_0, tangentiellement à $M_0 M_1$. Elle affecte ainsi, dans son entier, la forme d'un chapeau de gendarme.

A l'égard du maximum négatif, il est nul en F, et sa courbe y est tangente à $M_0 M_1$, puisque la surface négative de la ligne d'influence y est un infiniment petit du deuxième ordre. Elle doit d'ailleurs aboutir au point G_0, puisque pour la section d'appui il n'y a plus de zone positive et que le maximum négatif y est confondu avec le résultat donné par la charge complète. Elle est même tangente en G_0 à la parabole tracée pour la surcharge complète. Dans son entier, la courbe représentant le maximum négatif est donc G_0 M M' G_1, rapportée à la droite de référence $M_0 M_1$.

Les ordonnées de l'arc G_0 M, comptées à partir de $M_0 M_1$, doivent

d'ailleurs être égales aux ordonnées de $M_0\mu$ comptées à partir de la parabole, car elles correspondent aux mêmes charges.

Pour tracer approximativement G_0M, on pourra chercher à déterminer quelques points intermédiaires par tâtonnement, mais en général il suffira de tracer la parabole du troisième degré, tangente en M à M_0M_1 et tangente en G_0 à la parabole, ce qui est facile.

3° S'il s'agit d'un convoi type de chemin de fer, dont la tête est notablement plus lourde que le reste, on ne peut plus formuler de règle aussi précise.

Si les lignes d'influence des différentes sections étudiées avaient été tracées, on reconnaîtrait cependant que, pour une section située entre les foyers, le maximum positif s'obtiendrait sensiblement, comme pour une poutre droite sur appuis simples, en plaçant une des charges à l'aplomb de la section et en plaçant la tête du train du côté de l'appui le plus rapproché.

Il en sera de même pour le maximum positif d'une section située en dehors des foyers, à cela près qu'il faudra limiter le train à la zone positive de la ligne d'influence. Pour le maximum négatif, il n'y a plus de point anguleux dans la ligne d'influence, et tout ce qu'on peut dire c'est que, dans les essais à faire, il faudra limiter la longueur du train.

En gros, les courbes enveloppes conserveront la même allure que si l'on remplaçait le convoi type par une charge continue uniforme, et il suffira, dans tous les cas, pour les tracer avec une approximation suffisante, d'un très petit nombre de points exacts.

Étude de l'effort tranchant. — En vertu de la relation

$$T = \frac{d\mu}{dx} + B = \frac{d\mu}{dx} + \frac{M_1 - M_0}{l},$$

l'étude de l'effort tranchant se ramène à celle de $\frac{d\mu}{dx}$ qui est l'effort tranchant dans la poutre sur appui simple et à celle de $\frac{M_1 - M_0}{l}$.

Si l'on cherche la ligne d'influence de T pour une section G, elle s'obtiendra en rapportant à la ligne d'influence de $\frac{M_0 - M_1}{l}$, laquelle

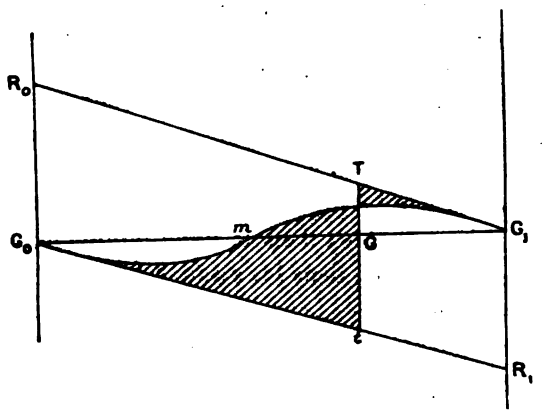
ne dépend pas de G, la ligne d'influence de $\frac{d\mu}{dx}$, que nous avons appris à tracer au Chapitre VIII, et qui se compose des deux segments $G_0 t$ et TG_1 des deux droites fixes $G_0 R_1$ et $G_1 R_0$ parallèles entre elles et de coefficient angulaire égal à $-\frac{1}{l}$.

Si l'on se reporte aux expressions données plus haut pour M_0 et M_1, on trouve facilement

$$\frac{M_0 - M_1}{l} = \frac{1}{bc - a^2}[(a+c)l\omega_0 + (a+b)l\omega_1].$$

On pourra tracer sa ligne d'influence dès que l'on aura construit celles de $l\omega_0$ et de $l\omega_1$.

Fig. 95.



Cette ligne d'influence a pour tangentes en G_0 et G_1 les droites $G_0 R_1$ et $G_1 R_0$ respectivement. En effet, nous avons déjà vu que, pour $\alpha = 0$, on a

$$\frac{d(l\omega_0)}{d\alpha} = -\frac{b}{l}, \qquad \frac{d(l\omega_1)}{d\alpha} = \frac{a}{l}.$$

On a donc, en différentiant par rapport à α et faisant $\alpha = 0$,

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{M_0 - M_1}{l}\right] = \frac{1}{bc - a^2}\left[(a+b)\frac{a}{l} - (a+c)\frac{b}{l}\right] = -\frac{1}{l}.$$

C'est précisément le coefficient angulaire de $G_0 R_1$.

La courbe a donc la forme sinusoïdale indiquée sur la figure.

Dans ces conditions, la ligne d'influence de T pour la section G

se compose des deux portions de droite $G_0 t$ et TG_1 rapportées à la courbe $G_0 m G_1$. Elle présente une zone négative s'étendant de G_0 à G et une zone positive de G à G_1. Il y a une discontinuité sur la verticale de G.

Les courbes enveloppes présenteront en gros les mêmes caractères que celles qui sont relatives à une poutre sur appuis simples.

Étude de la déformation. — Cette étude se fera suivant les mêmes principes que dans le cas de la poutre droite sur appuis simples, avec cette simplification toutefois que ω_0 et ω_1 sont toujours nuls. Cela peut se traduire en disant que les charges fictives $-\frac{M\,d\xi}{EI}$ se font constamment équilibre sur la poutre, car c'est là une traduction pure et simple des équations de condition exprimant l'encastrement.

Le polygone funiculaire, qui correspond à une ligne élastique, doit donc toujours être tel que son premier et son dernier côté soient dans le prolongement l'un de l'autre. Cela est du reste bien évident puisque une ligne élastique n'est que la représentation de l'axe longitudinal déformé, et que dans le cas actuel ses tangentes extrêmes restent en coïncidence avec l'axe longitudinal primitif.

Cas de la poutre à section constante. — Dans ce cas on trouve, comme nous l'avons vu :

$$a = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = \frac{l^3}{6EI}.$$

Les foyers s'obtiennent simplement en divisant la poutre en trois parties égales.

D'autre part, on a (*voir* Chapitre VIII) :

$$l\omega_0 = -P\frac{l^3}{6EI}m(1-m)(2-m),$$

$$l\omega_1 = +P\frac{l^3}{6EI}m(1-m)(1+m),$$

en désignant par $ml = \alpha$ l'abscisse de la charge isolée P.

Au foyer de gauche, l'équation de la ligne d'influence de $M - \mu$

est donc

$$M - \mu = f\frac{l\omega_0}{a} = -\frac{Pl}{3}m(1-m)(2-m).$$

Au foyer de droite, on aurait de même

$$M - \mu = -\frac{(l-f')l\omega_1}{a} = -\frac{Pl}{3}m(1-m)(1+m).$$

Les équations des lignes d'influence de M_0 et M_1 seraient respectivement

$$M_0 = \frac{l^2}{bc-a^2}[c\omega_0 + a\omega_1] = \frac{l}{3}\frac{2l\omega_0 + l\omega_1}{a}$$
$$= -Plm(1-m)^2 = -P\frac{\alpha(l-\alpha)^2}{l^2},$$
$$M_1 = \frac{-l^2}{bc-a^2}[b\omega_1 + a\omega_0] = -\frac{l}{3}\frac{2l\omega_1 + l\omega_0}{a}$$
$$= -Plm^2(1-m) = -P\frac{\alpha^2(l-\alpha)}{l^2},$$

expressions qui sont très faciles à calculer ou à construire graphiquement.

Plus généralement, pour une section G d'abscisse x, on aura

$$M - \mu = \frac{1}{bc-a^2}[c(l-x) - ax]l\omega_0 + \frac{1}{bc-a^2}[a(l-x) - bx]l\omega_1$$
$$= P\frac{m(1-m)}{3}[(m-2)(2l-3x) + (1+m)(l-3x)]$$
$$= -P\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}\left[l - x - \frac{\alpha}{l}(l-2x)\right].$$

Si l'on envisage le cas particulier où l'on a $m = \frac{\alpha}{l} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire le cas où la charge est au milieu de la poutre, on obtient les résultats suivants :

Aux extrémités, on a

$$M_0 = M_1 = -\frac{Pl}{8};$$

Au milieu de la poutre, pour $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$, on a également

$$M - \mu = -\frac{Pl}{8},$$

de sorte que $M = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{8} = \frac{Pl}{8}$ seulement, tandis que, dans une poutre sur appuis simples, il serait $\mu = \frac{Pl}{4}$.

Mais la valeur ainsi trouvée $\pm \frac{Pl}{8}$ ne représente pas le moment fléchissant maximum maximorum que puisse produire la charge isolée P en passant sur la poutre. Il importe de le remarquer.

Pour chaque valeur de α, le maximum positif de M s'obtient bien toujours à l'aplomb de la charge, c'est-à-dire pour $x = \alpha$. On a alors

$$\mu = P\frac{\alpha(l-\alpha)}{l}$$

et

$$M - \mu = -P\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}\left[l - \alpha - \frac{\alpha}{l}(l - 2\alpha)\right]$$
$$= -P\frac{\alpha(l-\alpha)}{l}\left[1 - 2\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}\right],$$

de sorte que

$$M = 2Pl\frac{\alpha^2(l-\alpha)^2}{l^4}.$$

La courbe représentative de M_{max} est donc une courbe du quatrième degré, tangente à l'axe des x aux deux extrémités de la poutre et ayant pour $\alpha = \frac{l}{2}$ un maximum égal à $\frac{Pl}{8}$.

Mais il faut prendre aussi en considération le maximum négatif de M, qui est donné par M_0, ou par M_1, suivant le cas. Or, d'après la valeur de M_0 écrite plus haut, on voit que sa courbe représentative est une courbe du troisième degré en α, tangente à l'axe des x à l'extrémité droite de la poutre. Elle a un maximum pour la valeur de α qui annule la dérivée de $\alpha(l-\alpha)^2$. Cette valeur est donnée par l'équation $(l-\alpha)^2 - 2\alpha(l-\alpha) = 0$. En écartant la valeur $\alpha = l$ qui ne convient pas, il reste

$$l - 3\alpha = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{l}{3}.$$

Le maximum de M_0 est lui-même

$$M_0 = -Pl \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -Pl \times \frac{4}{27} = -\frac{Pl}{8} \times \frac{32}{27} = -\frac{Pl}{8} \times 1,185.$$

Quand on a affaire à une charge uniformément répartie $p.d\alpha$, il faut intégrer les diverses expressions précédentes, ce que l'on peut

faire simplement en partant des valeurs intégrées de $l\omega_0$ et $l\omega_1$, lesquelles sont, comme on sait,

$$l\omega_0 = -l\omega_1 = -\frac{pl^4}{24\,\mathrm{EI}} = -\frac{pl}{4}\,\frac{l^3}{6\,\mathrm{EI}}.$$

On en déduit

$$\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}_1 = -\frac{pl^2}{12}.$$

En un point quelconque de la poutre on a

$$\mathrm{M} = \mu - \frac{pl^2}{12} = p\frac{x(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{12}.$$

Au milieu, pour $x = \frac{l}{2}$, on trouve

$$\mathrm{M} = \frac{pl^2}{24}.$$

En ce qui concerne les déformations, puisque les déformations angulaires sont nulles aux extrémités, on a

$$v = \int_0^x \frac{\mathrm{M}(x-\xi)}{\mathrm{EI}}\,d\xi = \int_0^x \frac{\mu(x-\xi)}{\mathrm{EI}}\,d\xi + \int_0^x \frac{(\mathrm{M}-\mu)(x-\xi)}{\mathrm{EI}}\,d\xi.$$

Envisageons d'abord une charge isolée. Le premier terme a déjà été calculé dans un Chapitre précédent (Chap. VIII) et a pour valeur

$$\frac{\mathrm{P}}{6\,\mathrm{EI}}\left(\frac{l-\alpha}{l}\right)x^3 \quad \text{si} \quad x < \alpha,$$
$$\frac{\mathrm{P}}{6\,\mathrm{EI}}\,\frac{\alpha}{l}(l-x)^3 \quad \text{si} \quad x > \alpha.$$

Quant au second, en se reportant à la valeur de $\mathrm{M}-\mu$, dans laquelle x doit être remplacé par ξ, on trouve

$$-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}\,\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}\int_0^x \left[l - \xi - \frac{\alpha}{l}(l-2\xi)\right](x-\xi)\,d\xi$$
$$= -\frac{\mathrm{P}x^2}{6\,\mathrm{EI}}\,\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}\left[3l - x - \frac{\alpha}{l}(3l-2x)\right].$$

Si l'on fait dans ces formules $\alpha = x = \frac{l}{2}$, c'est-à-dire si l'on cherche la flèche produite au milieu de la poutre par une charge P également placée au milieu, on trouve respectivement pour les

deux termes de v :

$$\frac{Pl^3}{EI} \times \frac{1}{96} \quad \text{et} \quad -\frac{Pl^3}{EI} \times \frac{1}{64}.$$

La somme est

$$-\frac{Pl^3}{EI} \times \frac{1}{192}.$$

Dans le cas d'une poutre sur appuis simples, on avait trouvé

$$v = -\frac{Pl^3}{EI} \times \frac{1}{48}.$$

Le rapport est donc de $\frac{1}{4}$ dans ce cas particulier.

Quand on a affaire à une charge uniformément répartie, on a immédiatement; en se reportant à la valeur de M écrite plus haut,

$$\begin{aligned} EI\,v &= \frac{p}{2}\int_0^x \xi(l-\xi)(x-\xi)\,d\xi - \frac{pl^2}{12}\int_0^x (x-\xi)\,d\xi \\ &= \frac{px^2}{24}(2l-x) - \frac{pl^2x^2}{24}. \end{aligned}$$

Au milieu de la poutre on trouve

$$v = -\frac{1}{384} \times \frac{pl^4}{EI}.$$

Cette flèche est cinq fois moindre que celle de la poutre posée sur appuis simples.

Cas où la poutre encastrée ne supporte aucune charge mais subit à son extrémité de gauche une dénivellation v_0. — Dans ce cas, on aura $\mu = 0$ et pour un point G de la poutre le moment fléchissant aura pour valeur, d'après (1),

$$M = M_0\frac{l-x}{l} + M_1\frac{x}{l}.$$

D'autre part, la seconde équation générale de déformation devra s'écrire

$$v = v_0 + \omega_0 x + \int_0^x \frac{M(x-\xi)}{EI}\,d\xi.$$

Appliquons encore les deux équations de déformation à toute

la poutre, nous aurons les deux conditions

$$\int_0^l \frac{M\,d\xi}{EI} = 0,$$

$$v_0 + \int_0^l \frac{M(l-\xi)}{EI}\,d\xi = 0,$$

dont la première peut être remplacée par la suivante :

$$v_0 - \int_0^l \frac{M\xi}{EI}\,d\xi = 0.$$

En y remplaçant M par sa valeur, nous obtiendrons des équations analogues aux équations (3), qui seront évidemment

$$bM_0 + aM_1 = -lv_0,$$
$$aM_0 + cM_1 = \quad lv_0;$$

d'où

$$M_0 = -\frac{a+c}{bc-a^2}\,lv_0, \qquad M_1 = \frac{a+b}{bc-a^2}\,lv_0.$$

Si la poutre est à section constante, on a

$$a = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = \frac{l^2}{6EI}.$$

On en déduit

$$a + b = a + c = 3a,$$
$$bc - a^2 = 3a^2,$$
$$\frac{a+b}{bc-a^2} = \frac{1}{a} = \frac{6EI}{l^2}.$$

Par suite,

$$M_1 = -M_0 = \frac{6EI}{l^2}\,v_0.$$

II. — Poutre encastrée a une extrémité et simplement appuyée a l'autre.

Supposons que la poutre soit simplement appuyée à son extrémité de gauche G_0 et encastrée à son extrémité G_1. On pourra en faire une étude générale au moyen des mêmes principes. Nous nous bornerons ici à quelques indications sommaires, tout en signalant, qu'en pratique, ce type de poutre a une importance plus grande que le type de poutre doublement encastrée.

L'appui G_0 ne pouvant développer aucun couple de réaction, on aura, pour le moment fléchissant en un point G (x) de la poutre, l'expression

$$M = \mu + Bx = \mu + \frac{M_1}{l} x.$$

D'autre part, on suppose $v_1 = 0$, $\omega_1 = 0$, $v_0 = 0$. Les équations générales de déformation appliquées à la poutre entière donnent donc

$$\omega_0 + \int_0^l \frac{M\,d\xi}{EI} = 0,$$

$$\omega_0 l + \int_0^l \frac{M(l-\xi)}{EI} d\xi = 0.$$

On élimine ω_0 en multipliant la première équation par l et en retranchant la seconde; il restera ainsi la condition

$$\int_0^l \frac{M\xi\,d\xi}{EI} = 0.$$

En la développant, on arrivera à une équation qui ne sera pas autre chose que la seconde équation (3) du paragraphe précédent, privée de son terme en M_0, savoir :

$$cM_1 = -l^2\omega_1,$$

ω_1 étant ici l'angle de rotation de la poutre en G_1 lorsqu'elle est supposée sur appuis simples. La ligne d'influence de M_1 a donc ses ordonnées proportionnelles à celles de la ligne d'influence de $l\omega_1$.

Si la section est constante, on a, pour une charge P d'abscisse $\alpha = lm$,

$$c = \frac{2l^3}{6EI}, \qquad l\omega_1 = P\frac{l^3}{6EI} m(1-m)(1+m),$$

et l'on en déduit

$$M_1 = -\frac{Pl}{2} m(1-m)(1+m).$$

Cas où la poutre ne supporte aucune charge, mais subit à son extrémité de gauche une dénivellation v_0. — Dans ce cas, la seconde équation de déformation appliquée à la poutre entière

doit s'écrire, en conservant le terme v_0,

$$v_0 + \omega_0 l + \int_0^l \frac{M(l-\xi)}{EI} d\xi = 0,$$

de sorte qu'après élimination de ω_0 il restera la condition

$$\int_0^l \frac{M\xi\, d\xi}{EI} = v_0.$$

D'autre part, l'expression de M se réduit à $M = \frac{M_1}{l} x$, de sorte que l'équation donnant M_1 est

$$c M_1 = l v_0.$$

Dans le cas de la section constante, on a

$$M_1 = \frac{3EI}{l^2} v_0.$$

Cas où la poutre ne supporte aucune charge, mais subit à son extrémité de gauche une rotation donnée ω_0, *en même temps qu'une dénivellation donnée* v_0. — Dans ce cas, il n'est plus permis de supposer $M_0 = 0$, et l'on a pour M l'expression

$$M = M_0 \frac{(l-x)}{l} + M_1 \frac{x}{l}.$$

D'autre part, les équations de déformation appliquées à la poutre entière donnent

$$\omega_0 + \int_0^l \frac{M\, d\xi}{EI} = 0,$$

$$v_0 + \omega_0 l + \int_0^l \frac{M(l-\xi)}{EI} d\xi = 0,$$

la première pouvant être remplacée par la suivante :

$$v_0 - \int_0^l \frac{M\xi}{EI} d\xi = 0.$$

On obtiendra des équations analogues aux équations (3) en remplaçant M par sa valeur. Ces équations seront :

$$b M_0 + a M_1 = -l v_0 - l^2 \omega_0,$$
$$a M_0 + c M_1 = l v_0.$$

Dans le cas de la section constante, on trouve

$$M_0 = -\frac{6EI}{l^2}v_0 - \frac{4EI}{l}\omega_0,$$

$$M_1 = \frac{6EI}{l^2}v_0 + \frac{2EI}{l}\omega_0.$$

Il faut bien remarquer qu'ici ω_0 est la rotation totale imposée à la section G_0 et comprend implicitement celle qui proviendrait de la dénivellation v_0 considérée seule.

Si l'on voulait revenir à ce dernier cas, il faudrait faire dans ces formules $M_0 = 0$, et l'on trouverait entre ω_0 et v_0 la relation

$$\omega_0 = -\frac{3}{2}\frac{v_0}{l},$$

de sorte que M_1 aurait la valeur trouvée précédemment :

$$M_1 = \frac{3EI}{l^2}v_0.$$

Cas où la poutre simplement appuyée à son extrémité de gauche n'est que partiellement encastrée à son extrémité droite, et y subit une dénivellation v_1 en même temps qu'une rotation ω_1, les charges étant nulles.

On a encore

$$M = \frac{M_1}{l}x.$$

D'autre part, les équations de déformation donnent

$$\omega_1 - \omega_0 = \int_0^l \frac{M\,d\xi}{EI},$$

$$v_1 - \omega_0 l = \int_0^l \frac{M(l-\xi)}{EI}d\xi.$$

En éliminant ω_0, il vient

$$\omega_1 l - v_1 = \int_0^l \frac{M\xi\,d\xi}{EI} = \frac{M_1}{l}c,$$

d'où

$$M_1 = \frac{3EI}{l^2}(l\omega_1 - v_1),$$

dans le cas de la poutre à section constante.

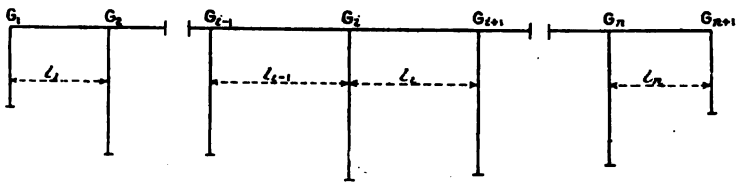
CHAPITRE XI.

POUTRES CONTINUES OU A TRAVÉES SOLIDAIRES. PORTIQUES.

I. — Considérations générales.

Définitions. — On appelle *poutres continues*, ou à travées solidaires, une poutre droite reposant sur plus de deux appuis.

Fig. 96.



Nous numéroterons ces appuis à partir de la gauche en attribuant l'indice 1 au premier, de sorte que, s'il y a $n+1$ appuis, le dernier correspondra à l'indice $n+1$. Nous désignerons par x_i l'abscisse de G_i et nous prendrons généralement pour origine des abscisses le point G_1, de sorte que $x_1 = 0$.

Ces $n+1$ appuis divisent la poutre en n travées. L'indice 1 s'appliquera à la première, l'indice n à la dernière, et l'indice i à celle qui va de G_i à G_{i+1}. La longueur de cette dernière sera désignée par l_i.

Lorsqu'il s'agira d'une travée arbitraire et qu'il n'y aura aucune chance de confusion, nous désignerons souvent sa longueur par la lettre l sans indice et par les lettres G et G′ ses appuis, dont les abscisses seront respectivement x et x'. De même pour un appui arbitraire G, on désignera par des lettres sans indice les quantités qui s'y rapportent.

Nous envisagerons uniquement des charges appliquées verticales, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe de la poutre, et nous réduirons presque toujours le problème à la considération d'une charge unique P dont la ligne d'action sera définie par l'abscisse α,

de manière à parvenir à la détermination des lignes d'influence des diverses inconnues.

Les inconnues principales seront les réactions des appuis, ou des quantités ayant avec elles des rapports intimes.

Nature et rôle des appuis. — Les conditions de résistance d'une poutre continue dépendent au premier chef de la nature des appuis qui la supportent et des liaisons qu'elle a avec eux.

Nous nous représenterons généralement un appui G comme le sommet d'un pilier ou poteau vertical dont la base sera fixe. Pour simplifier, nous supposerons ordinairement cette base encastrée, de sorte que le pilier sera en somme une console à axe vertical, ne supportant pas d'autre charge que les réactions exercées à son sommet. Dans le cas où la base serait constituée par une simple rotule, il serait aisé d'en tenir compte.

La poutre continue peut être liée d'une manière complète ou incomplète aux piliers qui la supportent.

Si la liaison est complète, en un sommet ou *nœud* tel que G, la poutre et le pilier correspondant auront mêmes déplacements et même déformation angulaire. Si l'on désigne par u, v, ω le déplacement horizontal, le déplacement vertical et l'angle de rotation de la fibre moyenne de la poutre, ces trois quantités pourront être regardées aussi comme appartenant au pilier en son sommet. Dans ces conditions, la réaction exercée par le pilier sur la poutre sera définie généralement par ses deux composantes horizontale et verticale, que l'on désignera par X et Y respectivement et par son moment S pris par rapport au point G. Les six quantités u, v, ω d'une part, et X, Y, S d'autre part, seront alors nécessairement liées par trois relations, faciles à établir par la considération préalable du pilier dont il s'agit, en se reportant aux résultats donnés à la fin du Chapitre X. En particulier, Y et v seront proportionnels l'un à l'autre. Quant à X et S, ils seront des fonctions linéaires de u et de ω.

Il peut exister des cas très variés de liaisons incomplètes et nous envisagerons seulement quelques-uns d'entre eux.

La poutre peut reposer sur les piliers par l'intermédiaire de glissières ou de doubles bielles, ou de lames, incapables de transmettre des efforts horizontaux X, et l'on peut alors poser $X = 0$.

Les réactions de l'appui sont réduites à Y et à S, qui sont respectivement proportionnelles à v et à ω. Les déplacements horizontaux u du pilier et de la poutre n'ont plus de rapport nécessaire entre eux.

La poutre peut reposer sur les piliers par l'intermédiaire de rouleaux incapables de transmettre des efforts horizontaux X et incapables aussi de transmettre des moments tels que S. La seule réaction à envisager est alors la réaction verticale Y qui reste proportionnelle à v. Le déplacement u et la rotation ω de la poutre n'ont plus rien qui leur corresponde dans le pilier.

Ce qu'il y a de commun dans tous ces cas, c'est qu'il y a toujours trois au plus des six quantités u, v, ω et X, Y, S qui soient indépendantes. Ces inconnues indépendantes sont celles qui suffisent à déterminer l'état de la poutre au droit d'un appui, c'est-à-dire l'ensemble des autres inconnues qui ne se trouvent pas déterminées *a priori*.

Il en est de même quand la nature du pilier impose d'autres conditions. Par exemple, s'il est constitué par un massif en maçonnerie de dimensions transversales suffisantes pour qu'on puisse le considérer comme indéformable dans le sens vertical, on pourra poser *a priori* $v = 0$. Dans ce cas, Y sera l'une des trois quantités déterminant l'état de la poutre au droit de l'appui, les deux autres étant soit u et ω, soit X et S.

Pour exposer une théorie générale, nous supposerons des appuis déformables et des liaisons complètes. Ensuite, nous reviendrons en détail à des cas plus simples.

Théorie générale. — Soient donc u_i, v_i, ω_i les déplacements de la fibre moyenne de la poutre au droit de l'appui G_i et soient X_i, Y_i, S_i les réactions qu'elle subit de la part de cet appui. Ces six inconnues satisfont à trois équations linéaires, que nous appellerons le *groupe* (1) sans le préciser autrement. Il y aura en tout $3n+3$ équations de cette espèce. Elles sont indépendantes des charges appliquées et dépendent seulement de la nature des supports et de leurs liaisons avec la poutre.

D'autre part, les réactions satisfont aux trois équations générales d'équilibre, qui sont linéaires également, et que nous appellerons le *groupe* (2), sans le préciser davantage pour le moment.

Elles sont indépendantes des déformations et ne renferment que les réactions et les forces appliquées.

Enfin, si l'on applique les équations de déformation à chacune des travées de la poutre continue, on obtiendra pour chacune d'elles trois relations entre les déformations de ses extrémités et celles des réactions d'appui qui interviennent dans la composition du moment fléchissant et de l'effort normal en un point courant $G(\xi)$ de la travée. Ces réactions sont uniquement celles qui sont situées à sa gauche. Les relations dont il s'agit seront du reste linéaires et elles seront au nombre de $3n$. Elles formeront un troisième groupe (groupe n° 3).

Le problème se trouve donc théoriquement résolu, puisqu'on obtient ainsi $(3n+3)+3+3n=6n+6$ équations linéaires entre les $6n+6$ inconnues. Mais cette constatation ne donnerait qu'une satisfaction fort incomplète, si l'on ne trouvait pas des moyens propres à faciliter la résolution effective de ces multiples équations du premier degré.

Il se présente heureusement toujours cette circonstance remarquable que les équations obtenues peuvent se classer et se ranger dans un ordre tel qu'elles constituent ce qu'on appelle un *système étagé*, les différentes inconnues ne s'y introduisant que successivement à partir d'un certain rang. On peut s'en rendre compte aisément de la manière suivante.

Supposons qu'on laisse provisoirement arbitraires les déplacements u_1, v_1, ω_1 du premier appui. Les réactions de cet appui pourront être déterminées au moyen des trois équations correspondantes du groupe (1). Dans la première travée, le moment fléchissant et l'effort normal, qui ne dépendent que des charges et des réactions situées à sa gauche, sont exprimables en fonction linéaire de X_1, Y_1, S_1, et par suite de u_1, v_1, ω_1. Les trois équations de déformation relatives à cette travée, groupe (3), permettront alors de calculer les déformations u_2, v_2, ω_2 du second appui, et par suite les réactions X_2, Y_2, S_2, et ainsi de suite.

Toutes les inconnues u, v, ω, ou X, Y, S, pourront ainsi de proche en proche être calculées en fonction des trois premières, et il suffira de porter les valeurs des réactions dans les trois équations d'équilibre statique, groupe (2), pour avoir trois conditions auxquelles devront satisfaire nécessairement u_1, v_1, ω_1, et qui les détermineront.

Toutes les autres inconnues s'en déduiront ensuite. On aura donc, en définitive, à résoudre un groupe de trois équations au plus, moyennant un travail préparatoire, qui est au fond assez simple lorsqu'on se trouve en présence de données numériques.

Cette indication est valable, quel que soit le système des charges appliquées. Lorsque celui-ci se réduit à une charge unique P placée à l'abscisse α, on peut préciser la forme des équations des groupes (2) et (3) et en déduire certaines conséquences intéressantes, au point de vue du tracé des lignes d'influence des diverses inconnues.

Les équations générales d'équilibre, groupe (2), s'écrivent

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1} = 0, \\ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n+1} = P, \\ Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + \ldots + Y_{n+1} x_{n+1} - S_1 - S_2 - \ldots - S_{n+1} = P\alpha. \end{cases}$$

Elles sont linéaires évidemment par rapport à P et du premier degré au plus par rapport à l'abscisse α.

D'autre part, supposons que α tombe dans la travée n° j, c'est-à-dire soit comprise entre x_j et x_{j+1}.

Pour toute travée d'indice i inférieur à j, on aura, pour le point courant G d'abscisse ξ, les expressions suivantes :

$$M = Y_1(\xi - x_1) + Y_2(\xi - x_2) + \ldots + Y_i(\xi - x_i) + S_1 + S_2 + \ldots + S_i,$$
$$N = X_1 + X_2 + \ldots + X_i.$$

Si l'on a $i = j$, tant que l'on aura $\xi < \alpha$, l'expression de M conservera la même forme, indépendante de P, l'indice j étant simplement substitué à l'indice i. Pour les sections telles que $\xi > \alpha$, il faudra ajouter à l'expression de M le terme $-P(\xi - \alpha)$.

Il en sera de même pour tout point appartenant à une travée d'indice supérieur à j. Le terme $-P(\xi - \alpha)$ interviendra.

Cela posé, les équations de déformation relatives à la travée d'indice i auront toujours la forme suivante :

$$(3)\quad \begin{cases} \omega_{i+1} - \omega_i = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{M\,d\xi}{EI}, \\ v_{i+1} - v_i - \omega_i l_i = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{M(x_{i+1} - \xi)}{EI}\,d\xi, \\ u_{i+1} - u_i = -\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{N}{ES}\,d\xi = -(X_1 + X_2 + \ldots X_i)\frac{1}{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\xi}{ES}. \end{cases}$$

La dernière équation (3) ne dépendra ainsi ni de P ni de α et ne contiendra que les réactions horizontales X d'indice égal ou inférieur à i.

Quant aux deux autres équations (3), elles ne contiendront jamais que des réactions Y et S d'indice égal ou inférieur à i, et elles ne dépendront ni de P ni de α tant que l'on aura $i < j$.

Si l'on a $i > j$, les termes dépendant de P seront respectivement de la forme

$$P\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\alpha - \xi)}{EI} d\xi \quad \text{et} \quad P\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\alpha - \xi)(x_{i+1} - \xi)}{EI} d\xi$$

et les coefficients de P seront du premier degré en α.

Enfin, si l'on a $i = j$, les intégrales coefficients de P auront pour limites inférieures α au lieu de x_i. Ce seront des fonctions de α d'un degré plus ou moins élevé, suivant que I variera d'une manière plus ou moins compliquée en fonction de l'abscisse. Mais dans le cas important d'une poutre à section constante, ce seront des fonctions du troisième degré au plus en α. Dans ce cas les inconnues, déplacements ou réactions d'appui, sont des fonctions de α qui sont au plus du troisième degré et qui ne changent pas de définition analytique tant que α ne franchit pas les limites d'une travée.

Lorsque α franchit les limites d'une travée et passe par exemple par la valeur x_{j+1}, la définition analytique d'une inconnue quelconque change forcément, puisque les termes en P et α qui figuraient dans les deux premières équations du groupe (3) relatives à la travée n° j disparaissent. Mais on peut remarquer que ces termes, au moment où ils disparaissent, c'est-à-dire pour $\alpha = x_{j+1}$, deviennent nuls ainsi que leurs dérivées en α. Ils sont, en effet, de la forme

$$P\int_{\alpha}^{x_{j+1}} \frac{(\alpha - \xi)}{EI} d\xi \quad \text{ou} \quad P\int_{\alpha}^{x_{j+1}} \frac{(\alpha - \xi)(x_{j+1} - \xi)}{EI} d\xi.$$

et leurs dérivées en α sont de la forme

$$P\int_{\alpha}^{x_{j+1}} \frac{d\xi}{EI} \quad \text{ou} \quad P\int_{\alpha}^{x_{j+1}} \frac{(x_{j+1} - \xi)}{EI} d\xi.$$

Il y a donc forcément, d'une travée à l'autre, un raccordement

tangentiel. Les différents arcs des lignes d'influence ont non seulement des points communs, mais des tangentes communes sur les verticales des appuis.

Il est également intéressant de remarquer que toutes les équations étant linéaires par rapport aux inconnues, si l'on en prend les dérivées par rapport à α, elles conserveront la même forme, à cela près que les différentes inconnues y seront remplacées par leurs quotients différentiels par rapport à α et que les termes dépendant de P y seront remplacés par leurs dérivées en α. Le déterminant du système des équations dérivées demeurera exactement le même que celui du système primitif. La plus grande partie des calculs faits pour parvenir à la résolution de celui-ci pourra donc servir pour le second, en modifiant simplement les valeurs des termes dépendant de P, c'est-à-dire de α. On obtiendra ainsi simultanément, si on le désire, non seulement des points des lignes d'influence, mais les tangentes en ces mêmes points, et cela peut abréger beaucoup leur détermination.

Prenons en particulier le cas d'une section constante. Nous avons vu que les différents arcs des lignes d'influence sont des arcs de paraboles cubiques et que ces arcs doivent se raccorder entre eux sur les verticales des appuis. Il suffit, pour les déterminer complètement, de connaître les points et les tangentes situées sur les verticales des appuis, c'est-à-dire, en somme, d'envisager uniquement les valeurs de α correspondant aux divers appuis. C'est une simplification notable. Il n'est même pas nécessaire que la section soit constante d'un bout à l'autre de la poutre; il suffit qu'elle le soit dans l'étendue de chaque travée.

Dans le cas général, on aura presque toujours intérêt à déterminer les points et les tangentes des lignes d'influence correspondant aux verticales des appuis. Les paraboles cubiques déterminées par ces seuls éléments fournissent, la plupart du temps, une approximation satisfaisante.

Remarque au sujet des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une section déterminée $G(\xi)$ de la poutre. — Soit α l'abscisse variable de la charge.

Si l'on a $\alpha > \xi$, le moment fléchissant est une fonction linéaire des réactions des appuis situés à gauche de la section. Si l'on

a $\alpha < \xi$, il faut ajouter à cette même fonction linéaire le terme $-P(\xi - \alpha)$.

Or les réactions des appuis changent de définition analytique toutes les fois que la charge franchit un appui, mais les arcs successifs de leurs lignes d'influence se raccordent tangentiellement entre eux. Il en est donc de même de toute fonction linéaire d'un nombre quelconque de ces réactions. La ligne d'influence de M sera composée d'arcs se raccordant tangentiellement entre eux sur les verticales des appuis.

Mais en outre M change de définition analytique lorsque α passe par la valeur ξ, puisqu'il faut tenir compte du terme $-P(\xi - \alpha)$ pour $\alpha < \xi$ et n'en pas tenir compte pour $\alpha > \xi$. Les deux expressions de M fournissent d'ailleurs la même valeur pour $\alpha = \xi$, puisque le terme additionnel est alors nul.

Mais $\frac{dM}{d\alpha}$ a deux valeurs distinctes pour $\alpha = \xi$, suivant que l'on considère l'une ou l'autre des expressions de M. La différence de ces valeurs est évidemment $P\frac{d(\xi - \alpha)}{d\alpha} = -P$.

Ainsi la ligne d'influence du moment fléchissant dans une section quelconque présente un point de brisure au droit de cette section et la différence des coefficients angulaires des deux tangentes en ce point de brisure est toujours égale à $-P$. Partout ailleurs la ligne d'influence est continue.

En ce qui concerne l'effort tranchant, si ξ est dans la travée $n^0 i$, il a pour valeur

$$T = \frac{dM}{d\xi} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i$$

dans le cas où $\alpha > \xi$ et

$$T = y_1 + y_2 + \ldots + y_i - P$$

dans le cas où $\alpha < \xi$.

Sa ligne d'influence se compose d'arcs de courbe se raccordant tangentiellement entre eux sur les verticales des appuis, mais elle présente un ressaut égal à P au droit de la section considérée.

Revue de quelques cas particuliers. — Il existe un cas particulièrement simple qu'il importe de mentionner. C'est celui où l'on a affaire à des appuis incompressibles, tels que les inconnues auxi-

liaires v_i soient nulles. On connaît d'avance la solution lorsque la charge est au-dessus d'un appui x_j. On satisfait évidemment à toutes les conditions d'équilibre en faisant

$$Y_j = P$$

et en faisant toutes les autres inconnues égales à zéro. La réaction de l'appui directement chargé suffit, en effet, à assurer l'équilibre et la poutre ne subit aucune déformation. Si, de plus, la poutre est à section constante, on voit que le problème ne nécessitera, en définitive, que la détermination des tangentes aux points situés sur les verticales des appuis.

Il y a d'ailleurs, dans l'hypothèse d'appuis incompressibles, une autre source de simplification. Le système des équations à résoudre devient étagé à partir de deux inconnues seulement au lieu de trois. Si l'on suppose, en effet, que l'on se donne u_1 et ω_1, déformations du sommet du premier appui, le groupe des équations (1) se réduit à deux seulement et fait connaître les deux inconnues X_1 et S_1. Alors la seconde équation du groupe (3), qui ne contient que Y_1 et S_1 en même temps que ω_1, permettra de déterminer Y_1, les deux autres faisant ensuite connaître ω_2 et u_2 respectivement, et ainsi de suite.

On peut souvent admettre une simplification du même ordre en ce qui concerne la poutre elle-même, et supposer nuls ou négligeables les raccourcissements qui proviennent de l'effort normal $N = \Sigma_g X$. Cela revient à supposer, dans les dernières équations du groupe (3), que la surface de la section est suffisamment grande pour que les intégrales $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\xi}{ES}$ soient négligeables. Alors toutes les différences

$$u_{i+1} - u_i$$

sont nulles et tous les déplacements u_i seront nuls eux-mêmes pourvu que l'un d'eux le soit. On pourra supposer qu'il en est ainsi lorsque la poutre sera butée contre un appui fixe à l'une de ses extrémités. Si cette circonstance n'est pas réalisée, tous les u_i seront égaux au premier d'entre eux u_1, et la marche générale des calculs sera conservée, le système des équations demeurant étagé à partir de u_1 et ω_1. Toutefois, les dernières équations du groupe (3) n'interviendront plus et, d'autre part, la détermination

de la série des inconnues X_i se fera d'une manière indépendante des autres. Elles n'interviennent pas, en effet, dans les deux premières équations du groupe (3) et sont déterminées uniquement par les équations du groupe (1) qui leur correspondent.

Enfin, une simplification plus profonde encore résulte des hypothèses simultanées $v_i = 0$ et $X_i = 0$, qui sont conciliables avec des liaisons incomplètes. On a encore $u_{i+1} - u_i = 0$, d'après les dernières équations du groupe (3), et d'ailleurs les déplacements u_i de la poutre ne peuvent intervenir dans la détermination des réactions des appuis. On n'a plus, dans ce cas, que $3n + 3$ inconnues en tout au lieu de $6n + 6$, savoir : les Y, S, ω relatifs à chaque appui. Pour les déterminer, il reste :

1° $n + 1$ équations du groupe (1), à raison d'une seule par appui. Elles établiront des relations de proportionnalité entre S_i et ω_i;

2° Deux équations d'équilibre du groupe (2);

3° $2n$ équations du groupe (3), à raison de deux par travée.

L'ensemble de ces équations forme un système étagé à partir de la première inconnue seulement, ω_1 par exemple. En effet, si ω_1 était donné, S_1 s'en déduirait par la première équation du groupe (1), puis R_1 serait calculable par la seconde équation du groupe (3) relative à la première travée, l'autre équation de ce même groupe faisant connaître ω_2 et ainsi de suite.

Nous nous bornons ici à ces indications générales, nous réservant de revenir en détail sur ce cas important.

Effets d'un changement de température. — Avant de terminer, nous ajouterons un mot au sujet des effets que peut produire une modification de la température sur un pareil système, et de la manière d'en tenir compte le cas échéant. Nous ajouterons ces effets à ceux produits par les charges et surcharges, et nous pouvons les évaluer séparément.

Supposons pour plus de généralité que la poutre et les piliers soient à liaisons complètes.

Dans le groupe des équations (1) qui lient les réactions d'appui aux déformations, il faudra modifier celle qui établissait un rapport de proportionnalité entre Y et v. En effet, le déplacement v

sera la résultante de l'allongement du poteau sous un accroissement de température τ et du raccourcissement dû à la réaction $-Y$ de la poutre sur le poteau. Au lieu d'une relation telle que $v = -KY$, il faudra donc écrire une relation binome de la forme $v = -KY + K'\tau$. Les autres équations du groupe ne dépendent pas de τ.

En sont également indépendantes les équations d'équilibre (groupe 2), d'où les termes en P auront disparu, ainsi que les deux premières équations du groupe (3). Mais, dans la troisième équation de ce groupe, la différence $u_{i+1} - u_i$ devra être égalée à la variation totale de la longueur de la travée, de sorte que le second membre contiendra un terme proportionnel à τ.

L'ensemble des équations demeure linéaire et étagé, comme dans le cas où l'on envisage les effets d'une surcharge. Dans les applications, on tiendra compte d'ailleurs des simplifications qui se présenteront.

Si tous les poteaux ont même hauteur, leurs dilatations, dues à une élévation de température, seront toutes égales et il sera évidemment inutile d'en tenir compte dans les équations (1).

Si la poutre repose sur des rouleaux et est librement dilatable, il sera également inutile de tenir compte de l'allongement des travées.

II. — Étude détaillée des poutres sur appuis incompressibles, quand leurs déplacements longitudinaux sont sans influence sur les réactions d'appui.

Nous supposons expressément ici que l'on a pour tous les appuis $v_i = 0$, de sorte que les composantes Y_i des réactions soient des inconnues indépendantes.

Nous supposons également que les déplacements longitudinaux u_i de la poutre soient, sinon nuls, du moins sans influence sur les réactions désignées par S_i et X_i, de sorte que celles-ci soient simplement proportionnelles à ω_i

En particulier nous poserons des relations de la forme

$$S_i = k_i \omega_i, \tag{1}$$

k_i étant un coefficient essentiellement positif.

Quant aux composantes horizontales X_i, nous ne nous en occuperons pas et nous supposerons qu'elles peuvent être déterminées après coup et équilibrées par une butée convenable d'une des extrémités de la poutre.

Dans ces conditions, le groupe de relations désigné précédemment par le n° (1) se réduit aux seules équations (1).

Changement d'inconnues. — On peut, d'un autre côté, simplifier notablement les groupes d'équations (2) et (3) par certains changements d'inconnues.

Supposons que toutes les charges agissent dans la travée l_j, autrement dit que la tracée l_j soit seule chargée. On pourra commencer par faire l'étude de cette travée dans l'hypothèse où elle reposerait sur deux appuis simples coïncidant avec G_j et G_{j+1}.

On obtiendra dans ces conditions, pour un point courant $G(\xi)$ de cette travée (l'abscisse ξ étant rapportée à son extrémité de gauche G_j), un certain moment fléchissant μ que nous savons déterminer, et un effort tranchant égal à $\frac{d\mu}{d\xi}$.

On aurait également des réactions d'appui déterminées que nous appellerons respectivement Y et Y' pour G_j et G_{j+1}.

Enfin, on aurait des déformations angulaires bien déterminées ω et ω' au droit des appuis, et l'on aurait pour ces déformations les deux relations connues

$$-l_j\omega = \int_0^{l_j} \frac{\mu(l_j-\xi)}{EI}\,d\xi,$$

$$l_j\omega' = \int_0^{l_j} \frac{\mu\xi}{EI}\,d\xi.$$

(Quand il s'agira de lignes d'influence, le système des charges se réduira, bien entendu, à une charge unité P appliquée au droit de l'abscisse α.)

Dans toutes les autres travées le moment fléchissant serait nul, et toutes les réactions des autres appuis seraient nulles.

L'intervention des autres appuis a pour effet d'introduire des réactions complémentaires que nous désignerons par Y_i et S_i, en ce qui concerne un appui quelconque G_i. De cette façon, les réactions verticales *réelles* des deux appuis spéciaux G_j et G_{j+1}

encadrant la travée chargée seront évidemment :

$$Y_j + Y \quad \text{et} \quad Y_{j+1} + Y'.$$

Cette considération des réactions complémentaires, au lieu des réactions réelles, a déjà pour effet de rendre homogènes par rapport à elles les équations d'équilibre (groupe 2), de sorte qu'on peut dire que les réactions indépendantes ne sont qu'au nombre de $2n$ au lieu de $2n + 2$. On peut effectivement réduire à $2n$ le nombre des inconnues distinctes, et s'épargner la considération des équations d'équilibre en écrivant que dans chaque travée $M - \mu$ est une fonction linéaire de l'abscisse, ce qui n'introduit que $2n$ coefficients inconnus.

Nous prendrons comme inconnues dans chaque travée les moments fléchissants à ses deux extrémités; l'un, désigné par M_i, sera le moment fléchissant obtenu en un point situé immédiatement à droite de G_i; l'autre, désigné par N_i, sera le moment obtenu en un point situé immédiatement à gauche de G_{i+1}. De cette façon, dans toute travée non chargée, c'est-à-dire pour $i \neq j$, le moment fléchissant, au point courant d'abscisse ξ, a pour expression simple

$$M = M_i \frac{l_i - \xi}{l_i} + N_i \frac{\xi}{l_i}.$$

Pour la travée chargée, c'est-à-dire pour $i = j$, on a

$$M = \mu + M_j \frac{l_j - \xi}{l_j} + N_j \frac{\xi}{l_j}.$$

Les nouvelles inconnues M et N sont liées aux réactions complémentaires d'appui par des relations très simples que l'on obtient en écrivant les conditions d'équilibre des petits tronçons situés au-dessus des appuis. Ce sont :

$$S_i = M_i - N_{i-1},$$
$$Y_i = \frac{N_i - M_i}{l_i} - \frac{N_{i-1} - M_{i-1}}{l_{i-1}}.$$

Les réactions complémentaires d'appui seront donc aisées à déterminer après coup, en fonction des nouvelles inconnues M_i et N_i.

L'équation de condition (1) est d'ailleurs immédiatement rem-

placée par

$$(1)' \qquad M_i - N_{i-1} = k_i \omega_i.$$

Équations de déformation. — L'introduction des nouvelles inconnues permet de simplifier notablement le groupe (3) des équations de déformation, dont l'on n'a du reste à considérer que les deux premières pour chaque travée.

Ces deux équations s'écrivent, d'une manière générale, en rapportant dans chaque travée les abscisses à son extrémité de gauche.

$$\omega_{i+1} - \omega_1 = \int_0^{l_i} \frac{M d\xi}{EI},$$

$$v_{i+1} - v_i - l_i \omega_i = \int_0^{l_i} \frac{M(l_i - \xi)}{EI} d\xi.$$

Pour obtenir plus de symétrie, nous remplacerons d'ailleurs la première d'entre elles par la suivante qui en est une combinaison linéaire, savoir :

$$v_{i+1} - v_i - l_i \omega_{i+1} = -\int_0^{l_i} \frac{M\xi}{EI} d\xi.$$

Remplaçons maintenant M par sa valeur dans ces équations de déformation, en posant dans chaque travée

$$\int_0^{l_i} \frac{\xi(l_i - \xi)}{EI} = a_i,$$

$$\int_0^{l_i} \frac{(l_i - \xi)^2}{EI} = b_i,$$

$$\int_0^{l_i} \frac{\xi^2}{EI} = c_i,$$

et en nous rappelant, pour la travée chargée, la signification de ω et de ω'. Nous obtiendrons pour toute travée non chargée ($i \neq j$) les deux équations suivantes :

$$(2) \qquad l_i(v_{i+1} - v_i) - l_i^2 \omega_i = b_i M_i + a_i N_i,$$

$$(3) \qquad -l_i(v_{i+1} - v_i) + l_i^2 \omega_{i+1} = a_i M_i + c_i N_i,$$

et pour la travée chargée, $i = j$, les deux équations analogues

$$(2)' \qquad l_j(v_{j+1} - v_j) - l_j^2 \omega_j = b_j M_j + a_j N_j - l_j^2 \omega,$$

$$(3)' \qquad -l_j(v_{j+1} - v_j) - l_j^2 \omega_{j+1} = a_j M_j + c_j N_j + l_j^2 \omega'.$$

Dans le cas où nous nous sommes placés, les appuis étant incompressibles, ces équations se simplifient notablement par la disparition des termes en v. Nous les supposerons supprimés, sauf à les rétablir exceptionnellement dans certaines circonstances, par exemple quand nous étudierons l'effet d'une dénivellation accidentelle de deux appuis. Alors la différence $v_{i+1} - v_i$ sera supposée donnée.

Les équations (2) et (3), dans le groupe desquelles rentrent (2)' et (3)', résolvent le problème, avec l'adjonction des relations (1)'. Il y a en effet $n + 1$ équations (1)', c'est-à-dire autant que d'inconnues auxiliaires ω, et $2n$ équations (2) et (3), c'est-à-dire autant que d'inconnues principales M et N. On pourrait d'ailleurs éliminer facilement les ω.

Le système des équations (2) et (3) est beaucoup plus simple que celui que l'on obtiendrait en considérant les réactions complémentaires d'appui. Chaque équation, en effet, renferme au plus trois inconnues à la fois. De plus, il n'y a que deux équations qui dépendent des charges. Ce sont les équations (2)' et (3)', relatives à la travée chargée.

Résolution des équations. — L'ensemble des équations (1)', (2) et (3) forme un système étagé à partir de ω_1 seulement, comme il est facile de s'en assurer à nouveau. La première des équations (1)' ne renferme, en effet, que ω_1 et M_1. Il est de la même façon étagé à partir de ω_{n+1}. Le procédé à employer pour résoudre un pareil système, tout en dérivant de la méthode générale applicable aux systèmes étagés, devient particulièrement simple.

Supposons qu'on parte d'une valeur ω_1 arbitraire, M_1 se calculera par la première équation (1)' et lui sera proportionnelle. Puis N_1 se calculera par la première équation (2) et lui sera encore proportionnelle. De même ω_2 se calculera par la première équation (3) et ainsi de suite. On voit facilement que toutes les inconnues d'indice $i < j$ seront ainsi proportionnelles à ω_1 et qu'il en sera encore de même de ω_j et de M_j données respectivement

par l'équation (3) afférente à la travée l_{j-1} et par l'équation (1)' afférente à l'appui G_j. La première inconnue qui ne sera pas proportionnelle à ω_1 sera N_j donnée par l'équation (2) afférente à la travée l_j. Elle contiendra un terme dépendant des charges, dont la détermination est d'ailleurs immédiate, ce terme ayant pour valeur $\frac{l_j^2 \omega}{a_j}$.

Si donc, partant de l'hypothèse $\omega_1 = 1$, on avait calculé, d'un bout à l'autre de la poutre, les valeurs prises par les différentes inconnues, en appliquant systématiquement les équations (1), (2) et (3), en faisant abstraction des charges, ou si l'on veut en supposant ces charges nulles, ce travail préparatoire permettrait d'écrire les relations de proportionnalité suivantes, jusqu'à l'indice j :

$$(4) \qquad \omega_1 = \frac{M_i}{m_i} = \frac{N_i}{n_i} = \frac{\omega_i}{p_i} = \ldots = \frac{\omega_j}{p_j} = \frac{M_j}{m_j},$$

et l'on aurait en outre

$$(5) \qquad N_j = n_j \omega_1 + \frac{l_j^2}{a_j} \omega.$$

Si maintenant on remplace dans cette dernière équation ω_1 par sa valeur $\omega_1 = \frac{M_j}{m_j}$ déduite de (4), et si l'on multiplie par a_j, on obtient l'équation de condition :

$$(6) \qquad -a_j \frac{n_j}{m_j} M_j + a_j N_j = l_j^2 \omega.$$

D'autre façon toute semblable, en partant de l'extrémité droite de la poutre, c'est-à-dire des mêmes équations (1)' (2) et (3), mais en renversant leur ordre, on établirait des relations de proportionnalité telles que

$$(4)' \qquad \omega_{n+1} = \frac{M_i}{m_i} = \frac{N_i}{n_i} = \frac{\omega_i}{p_i} = \ldots = \frac{\omega_{j+1}}{p'_{j+1}} = \frac{N_j}{n'_j},$$

et l'on aurait pour M_j, d'après l'équation (3)' afférente à la travée chargée

$$(5)' \qquad M_j = m'_j \omega_{j+1} - \frac{l_j^2}{a_j} \omega'.$$

On en déduira une seconde équation de condition, qui sera

$$(6)' \qquad a_j M_j - a_j \frac{m'_j}{n'_j} N_j = - l_j^2 \omega'.$$

Les deux équations (6) et (6)' résolvent le problème, en permettant de calculer M_j et N_j. Toutes les autres inconnues s'en déduiront ensuite au moyen des relations de proportionnalité (4) et (4)' valables les unes à gauche, les autres à droite de la travée chargée.

Posons pour une travée quelconque

$$\beta_i = - a_i \frac{n_i}{m_i} \qquad \text{et} \qquad \gamma_i = - a_i \frac{m'_i}{n'_i},$$

les deux équations (6) et (6)' s'écriront

$$(7) \qquad \begin{cases} \beta_j M_j + a_j N_j = \quad l_j^2 \omega, \\ a_j M_j + \gamma_j N_j = - l_j^2 \omega'. \end{cases}$$

Elles sont alors tout à fait semblables à celles que l'on aurait obtenues (*voir* Chapitre X, équation 3) pour trouver les moments fléchissants aux deux extrémités de la travée l_j, si celle-ci était complètement encastrée sur ses deux appuis G_j et G_{j+1}, à cela près que les quantités β_j et γ_j remplacent respectivement dans le déterminant des équations les deux quantités de même nature b_i et c_i. On en déduira des résultats tout à fait analogues.

On aura d'abord les expressions suivantes :

$$M_j = \frac{l_j^2}{\beta_j \gamma_j - a_j^2} [\gamma_j \omega + a_j \omega'],$$
$$N_j = - \frac{l_j^2}{\beta_j \gamma_j - a_j^2} [\beta_j \omega' + a_j \omega].$$

Propriétés des foyers. — Considérons dans une travée quelconque l le point Φ dont l'abscisse φ satisfait à la relation

$$(8) \qquad \frac{\varphi}{l - \varphi} = \frac{a}{\beta} = - \frac{m}{n}.$$

Nous appellerons ce point Φ le foyer de gauche de la travée, par analogie avec le point F, d'abscisse f, qui était défini par la

relation

$$(9) \qquad \frac{f}{l-f} = \frac{a}{b},$$

et qui serait le foyer de gauche dans la travée complètement encastrée.

Nous appellerons F le foyer *principal* de gauche, afin de le distinguer de Φ.

Si la travée l a un indice $i < j$, le moment fléchissant a dans cette travée pour expression

$$M = M_i \frac{l_i - \xi}{l_i} + N_i \frac{\xi}{l_i} = \omega_1 \left[m_i \frac{l_i - \xi}{l_i} + n_i \frac{\xi}{l_i} \right].$$

Il est nul pour le point Φ, foyer de gauche. La droite qui le représente passe toujours par le point Φ.

Si la travée l est la travée chargée, d'indice j, on a

$$M - \mu = M_j \frac{l_j - \xi}{l_j} + N_j \frac{\xi}{l_j} = \omega_1 \left[m_j \frac{l_j - \xi}{l_j} + n_j \frac{\xi}{l_j} \right] + \frac{l_j \omega}{a_j} \xi.$$

Pour le point Φ_j d'abscisse φ_j, la parenthèse s'annule et il reste

$$(10) \qquad M - \mu = \frac{\varphi_j l_j \omega}{a_j}.$$

Au foyer de gauche de la travée chargée $M - \mu$ est donc simplement proportionnel à $l_j \omega$.

On peut de même définir dans une travée quelconque un foyer de droite Φ' dont l'abscisse φ' satisfera à la relation

$$(8)' \qquad \frac{l - \varphi'}{\varphi'} = \frac{a}{\gamma} = -\frac{n'}{m'},$$

et qui sera l'analogue du foyer *principal* de droite F', dont l'abscisse f' satisfait à la relation

$$(9)' \qquad \frac{l - f'}{f'} = \frac{a}{c}.$$

On trouverait évidemment que pour toute travée d'indice $i > j$ la droite représentative du moment fléchissant passerait par Φ' et

que pour la travée chargée l_j on aurait à son foyer de droite Φ'_j

$$(10)' \qquad M - \mu = -\frac{(l_j - \varphi'_j) l_j \omega'}{a_j}.$$

On aurait pu se rendre compte *a priori* de l'existence des foyers et de leur propriété fondamentale, qui est en rapport étroit avec l'hypothèse faite sur l'incompressibilité des appuis.

Supposons dans la poutre une coupure au point situé immédiatement à droite de G_j. Quelles que soient les charges appliquées au tronçon situé à sa droite, et même quelles que soient les dénivellations accidentelles de ses appuis, la réaction qu'il exerce sur le tronçon de gauche peut se ramener à une force verticale et à un couple A. La force verticale, qui s'exerce au droit de G_j, sera annulée purement et simplement par la réaction de cet appui supposé incompressible, de sorte que le couple A intervient seul dans l'état déformé du tronçon de gauche et que tous les effets, quels qu'ils soient, produits dans ce tronçon seront *proportionnels* à la seule quantité A, et s'annuleront avec A.

Dans une travée quelconque, de ce tronçon qui est sans charge, le moment fléchissant a pour ligne représentative une droite, et cette droite coupe forcément la ligne des appuis en un point fixe Φ, car si le moment fléchissant y est nul pour une valeur quelconque de A, il le sera pour toute autre valeur.

Dans la travée chargée l_j il y aura de même un point Φ tel que le moment fléchissant y est indépendant des charges (ou des dénivellations) qui seraient appliquées au delà de G_{j+1}. Il en sera de même de $M - \mu$. Supposons donc que, au delà de G_{j+1}, l'on applique à la poutre des charges telles que le moment M_i s'annule à l'extrémité G_j de la travée l_j. Tout le tronçon de poutre situé à gauche de G_j sera dans son état initial sous l'action combinée de toutes les charges, et l'on aura en particulier $\omega_j = 0$. Dans la travée l_j, la droite représentative de $M - \mu$ aura une équation de la forme

$$M - \mu = H \frac{\xi}{\varphi},$$

en désignant par H la valeur de $M - \mu$ au foyer Φ.

D'autre part, la seconde équation de déformation relative à cette

travée se réduit à

$$\int_0^{l_j} \frac{M(l_j - \xi)}{EI} d\xi = 0,$$

puisque $v_{j+1} = v_j = \omega_j = 0$.

Si l'on y remplace M par sa valeur

$$M = \mu + H\frac{\xi}{\varphi},$$

on en déduit bien facilement

$$a_j H = \varphi l_j \omega,$$

résultat trouvé plus haut, équation (10).

Détermination des foyers. — Les divers coefficients m_i, n_i, p_i qui figurent dans les relations (4) sont les valeurs que prennent respectivement M_i, N_i, ω_i lorsqu'on part d'une valeur initiale $\omega_1 = 1$ et qu'on résout successivement les équations (1)', (2) et (3).

Commençons ce calcul, en admettant pour chaque travée les inégalités $a_i < b_i$ et $a_i < c_i$. Dans la première équation (1)', il faut faire $N_{i-1} = N_0 = 0$, et l'on a

$$M_1 = K_1 > 0.$$

La première équation (2) donne

$$a_1 N_1 = -b_1 M_1 - l_1^2.$$

Elle montre que N_1 est négatif et plus grand en valeur absolue que M_1 puisque $\frac{b_1}{a_1} > 1$.

La première équation (3) donne

$$l_1^2 \omega_2 = a_1 M_1 + c_1 N_1.$$

Elle montre que ω_2 est négatif, puisque $|N_1| > M_1$ et que d'ailleurs $c_1 > a_1$.

La seconde équation (1)' donne ensuite

$$M_2 = K_2 \omega_2 + N_1.$$

Elle montre que M_2 est négatif, puisque ω_2 et N_1 le sont. Elle montre de plus que, en valeur absolue, M_2 est plus grand que N_1 et par suite que M_1.

En poursuivant, on constaterait les lois suivantes : *Les signes des inconnues* M_i, N_i, ω_i *vont en alternant quand on passe d'un indice à l'indice suivant. Le signe de* N_i *est toujours opposé à celui de* M_i *et de* ω_i. *Enfin, les valeurs absolues des inconnues* M_i *et* N_i *vont constamment en croissant, de telle sorte que l'on a*

$$|N_i| > |M_i|,$$
$$|M_i| > |N_{i-1}|.$$

On le démontrerait par le procédé ordinaire qui consiste à vérifier que si ces lois sont vraies jusqu'à un certain indice, elles restent vraies au delà.

Cela posé, l'équation (2) relative à une travée quelconque peut s'écrire

$$-a_i N_i = b_i M_i + l_i^2 \omega_i.$$

En divisant par M_i, on a la relation

$$-a_i \frac{n_i}{m_i} = \beta_i = b_i + l_i^2 \frac{p_i}{m_i}.$$

Puisque ω_i et M_i sont de même signe, leur rapport $\frac{p_i}{m_i}$ est positif et l'on en conclut que

$$\beta_i > b_i \quad \text{ou} \quad \beta > b.$$

Si l'on se reporte à la définition du foyer de gauche, et si l'on compare son abscisse donnée par la relation

$$\frac{\varphi}{l-\varphi} = \frac{a}{\beta} \tag{8}$$

à celle du foyer principal correspondant, donnée par la relation

$$\frac{f}{l-f} = \frac{a}{b}, \tag{9}$$

on voit que l'on a toujours $\varphi < f$. En d'autres termes, *le foyer de gauche* Φ *d'une travée est toujours compris entre l'extrémité de gauche de cette travée et le foyer principal* F, *quelles que soient les valeurs des coefficients* K *figurant dans les relations* (1)'.

Le foyer principal correspond au cas limite où tous les coeffi-

cients K seraient supposés infinis, de sorte que chaque travée serait encastrée à ses deux bouts.

Un second cas limite est celui où tous les coefficients K seraient supposés nuls. Dans ce cas, les appuis ne fourniraient plus de couples de réaction S et l'on aurait constamment $M_i = N_{i-1}$, de sorte que le problème se simplifie notablement par la fusion de ces deux séries d'inconnues. On a d'ailleurs dans ce cas

$$M_1 = M_{n+1} = 0.$$

La détermination des foyers est alors très facile, au moyen d'une équation de récurrence qui permet de trouver Φ_i dès que l'on connaît Φ_{i-1}. Écrivons en effet l'équation (2) relative à la travée d'indice i et l'équation (3) relative à la travée d'indice $(i-1)$, en remplaçant N_i et N_{i-1} respectivement par M_{i+1} et M_i, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} -l_i^2\ \omega_i &= b_i\ M_i + a_i\ M_{i+1}, \\ l_{i-1}^2\ \omega_i &= a_{i-1} M_{i-1} + c_{i-1} M_i. \end{aligned}$$

En éliminant ω_i il vient l'équation dite *des trois moments :*

$$\frac{a_i}{l_i^2} M_{i+1} + \left[\frac{b_i}{l_i^2} + \frac{c_{i-1}}{l_{i-1}^2}\right] M_i + \frac{a_{i-1}}{l_{i-1}^2} M_{i-1} = 0.$$

Cette relation subsiste pour les coefficients m. En divisant par m_i, on obtient

$$\frac{a_i}{l_i^2}\frac{m_{i+1}}{m_i} + \frac{b_i}{l_i^2} + \frac{c_{i-1}}{l_{i-1}^2} + \frac{a_{i-1}}{l_{i-1}^2}\frac{m_{i-1}}{m_i} = 0. \tag{11}$$

Sous cette forme, on voit qu'elle permet de déterminer le rapport $\rho_i = -\frac{m_i}{m_{i+1}}$ qui définit le foyer Φ_i, dès que l'on connaît le rapport analogue $\rho_{i-1} = -\frac{m_{i-1}}{m_i}$ qui définit le foyer Φ_{i-1} dans la travée précédente.

Or, dans la première travée à gauche, puisqu'on a $M_1 = 0$ et par suite $\rho_1 = \frac{m_1}{m_2} = 0$, le foyer Φ_1 est connu et confondu avec le premier appui. Tous les autres s'en déduiront successivement en appliquant la relation de récurrence précédente.

Si la poutre est à section constante, l'équation se simplifie et permet de reconnaître les limites entre lesquelles le rapport ρ_i peut

varier. En tenant compte des relations

$$a = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = \frac{l^3}{6EI},$$

on trouve

$$\frac{1}{\rho_i} = 2 + \frac{l_{i-1}}{l_i}(2 - \rho_{i-1}).$$

Si le rapport $\frac{l_{i-1}}{l_i}$ est très grand, on a $\rho_i = 0$. Si, au contraire, ce rapport est nul, on a $\rho_i = \frac{1}{2}$.

En dehors de ces cas extrêmes, on peut trouver pour ρ_i des limites plus rapprochées. Si $\frac{l_{i-1}}{l_i} = z$, on voit que $\frac{1}{\rho_i}$ est compris entre $2 + \frac{3}{2}z$ et $2 + 2z$, puisque ρ_{i-1} est compris lui-même entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Si l'on fait $z = 1$, les deux limites précédentes sont $\frac{7}{2}$ et $\frac{8}{2}$, de sorte que ρ_i est compris entre $\frac{2}{7} = 0,2857$ et $\frac{2}{8} = 0,25$.

Bresse a calculé des Tables donnant les valeurs des ρ pour des poutres composées de travées égales encadrées par deux travées de rive de longueur $l\delta$ un peu différentes des autres. En voici un extrait :

Valeurs de l'indice i.	Valeur de ρ_i pour $i \leqq n-1$ et pour $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
2.....	0,2059	0,2222	0,2368	0,2500	0,2619	0,2727	0,2826
3.....	0,2636	0,2647	0,2657	0,2667	0,2675	0,2683	0,2690
4.....	0,2676	0,2677	0,2678	0,2678	0,2679	0,2679	0,2680
5.....	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679
6.....	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679	0,2679

Nombre n de travées.	Valeurs de ρ_n pour $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
3.....	0,3071	0,2922	0,2788	0,2667	0,2556	0,2455	0,2363
4.....	0,3110	0,2951	0,2808	0,2678	0,2560	0,2452	0,2353
5.....	0,3113	0,2953	0,2810	0,2679	0,2561	0,2452	0,2352
6.....	0,3113	0,2954	0,2810	0,2679	0,2561	0,2452	0,2352

Les Tableaux ci-dessus peuvent être prolongés indéfiniment, les

chiffres de chaque colonne ne changeant plus quand le nombre des travées augmente.

Tout ce qui précède resterait applicable si la section, au lieu d'être constante d'un bout à l'autre de la poutre, était constante seulement dans l'étendue de chaque travée. Il faudrait simplement remplacer les longueurs réelles des travées par les quantités proportionnelles $\lambda = \frac{l}{I}$.

La recherche des foyers, qui est ainsi très simple au moyen de l'équation de récurrence (11), peut également être abordée par un procédé graphique qui est classique dans le cas de poutres à section constante et qui peut être généralisé ainsi qu'il suit.

Transformons d'abord l'équation (11) en tenant compte des relations que l'on déduit de (8), (9) et (9)', savoir

$$\frac{m_{i+1}}{m_i} = -\frac{l_i - \varphi_i}{\varphi_i}; \qquad \frac{m_{i-1}}{m_i} = -\frac{\varphi_{i-1}}{l_{i-1} - \varphi_{i-1}}; \qquad b_i = \frac{a_i(l_i - f_i)}{f_i};$$

$$c_{i-1} = a_{i-1}\frac{f'_{i-1}}{l_{i-1} - f_{i-1}}.$$

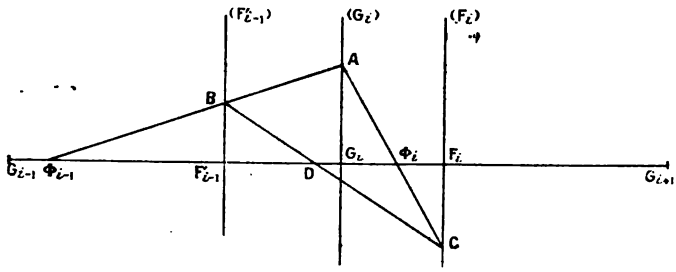
Nous obtiendrons

$$\frac{a_i}{l_i^2}\left[\frac{l_i - f_i}{f_i} - \frac{l_i - \varphi_i}{\varphi_i}\right] + \frac{a_{i-1}}{l_{i-1}^2}\left[\frac{f'_{i-1}}{l_{i-1} - f'_{i-1}} - \frac{\varphi_{i-1}}{l_{i-1} - \varphi_{i-1}}\right] = 0,$$

ou, après réduction,

$$\frac{a_i}{l_i}\frac{f_i - \varphi_i}{\varphi_i f_i} = \frac{a_{i-1}}{l_{i-1}}\frac{f'_{i-1} - \varphi_{i-1}}{(l_{i-1} - f'_{i-1})(l_{i-1} - \varphi_{i-1})}.$$

Fig. 97.



Considérons maintenant la figure ci-dessus où Φ_{i-1}, Φ_i sont les foyers de gauche des deux travées, F'_{i-1} le foyer *principal* de droite de la première travée et F_i le foyer *principal* de gauche de la

seconde travée. Traçons les lignes de rappel de F'_{i-1}, G_i, F_i. Puis menons par Φ_{i-1} une droite quelconque coupant (G_i) en A et (F'_{i-1}) en B. Joignons ensuite A à Φ_i et prenons le point C où cette droite rencontre (F_i). Enfin, joignons BC. Cette troisième droite coupera la ligne des appuis en un point D, qui, en vertu d'un théorème connu, sera indépendant de la direction de la droite issue de Φ_{i-1}, ou, ce qui revient au même, de la longueur du segment $G_iA = m$.

Ce point peut être déterminé à l'avance par le rapport $\frac{DF'_{i-1}}{DF_i}$ qui a une expression assez simple. En effet, on a

$$BF'_{i-1} = m\frac{\Phi_{i-1}F'_{i-1}}{\Phi_{i-1}G_i} = m\frac{f'_{i-1} - \varphi_{i-1}}{l_{i-1} - \varphi_{i-1}},$$

$$CF_i = m\frac{\Phi_i F_i}{\Phi_i G_i} = m\frac{f_i - \varphi_i}{\varphi_i},$$

et par suite

$$\frac{DF'_{i-1}}{DF_i} = \frac{BF'_{i-1}}{CF_i} = \frac{f'_{i-1} - \varphi_{i-1}}{l_{i-1} - \varphi_{i-1}} \times \frac{\varphi_i}{f_i - \varphi_i}.$$

Or, d'après l'équation de récurrence transformée, l'expression trouvée est égale à

$$\frac{a_i}{a_{i-1}}\,\frac{l_{i-1}}{l_i}\,\frac{l_{i-1} - f'_{i-1}}{f_i}.$$

Ce rapport ne dépend que d'éléments tous connus et est facile à construire.

Si toutes les travées sont symétriques et identiques, que leurs sections soient constantes ou non, on a $a_i = a_{i-1} \parallel l_i = l_{i-1}$ et $l_{i-1} - f'_{i-1} = f_i$. Par suite, le rapport est égal à l'unité et le point D est confondu avec G_i.

Si la section est constante, sans que les longueurs des travées soient égales, on a $\frac{l_{i-1} - f'_{i-1}}{f_i} = \frac{l_{i-1}}{l_i}$ et le rapport se réduit à $\frac{l_i}{l_{i-1}}$. Dans ce cas, il est facile de voir que l'on a

$$DF_i = F'_{i-1}G_i.$$

Dans ces deux cas, la détermination du point D est immédiate.

Une fois le point D connu, la détermination du point Φ_i s'en déduit évidemment. On trace BA passant par le foyer Φ_{i-1}. On joint B à D, ce qui donne le point C, et l'on joint CA par une droite qui passe en Φ_i.

Tout ce que nous venons de dire pour les foyers de gauche peut se répéter sans changement pour les foyers de droite en supposant la poutre retournée bout pour bout.

Étude de la travée chargée. — Revenons aux équations (7) que nous récrirons, en supprimant les indices des coefficients

$$(7)\quad \begin{cases} \beta M_j + a N_j = l^2\omega, & \text{d'où} \quad M_j = \dfrac{l^2}{\beta\gamma - a^2}[\gamma\omega + a\omega'], \\ a M_j + \gamma N_j = -l^2\omega', & \text{»} \quad N_j = \dfrac{-l^2}{\beta\gamma - a^2}[\beta\omega' + a\omega]. \end{cases}$$

Elles sont identiques aux équations (3) que nous avons discutées à propos de la poutre encastrée (Chap. X), à cette seule différence près que les quantités b et c figurant comme coefficients dans ces dernières sont respectivement remplacés par β et γ qui leur sont supérieures. On a $\beta > b$ ainsi que nous l'avons vu, et de même $\gamma > c$. Nous pouvons donc répéter sans changement tout ce que nous avons dit des lignes d'influence de $M - \mu$ et des lignes de charge correspondantes.

Ces lignes de charge passent par un point fixe. Celle qui correspond à l'appui de gauche passe par le foyer de droite, celle qui correspond au foyer de gauche passe par l'appui de droite. Aucune d'elles ne coupe la ligne des appuis entre les deux foyers. Le point d'intersection, qui détermine la position exacte ou approchée du point d'inflexion de la ligne d'influence correspondante, est au delà des limites de la travée pour toutes les sections comprises entre les foyers.

Les lignes d'influence de M, rapportées à la ligne d'influence de $(-\mu)$, conservent la même allure générale que précédemment. Elles n'ont qu'une zone positive pour les sections comprises entre les foyers; elles ont une zone positive et une zone négative pour les autres.

Il y a cependant une différence à noter : c'est que les lignes d'influence de $M - \mu$ et celles de $(-\mu)$ n'ont plus en général mêmes tangentes à leurs extrémités.

En effet, si l'on se reporte à l'équation (4) du Chapitre X, on trouve pour $M - \mu$ l'expression suivante :

$$(\beta\gamma - a^2)(M - \mu) = [\gamma(l - x) - ax]l\omega + [a(l - x) - \beta x]l\omega'.$$

Si l'on dérive par rapport à α, et si l'on fait $\alpha = 0$, on aura

$$\frac{d(l\omega)}{d\alpha} = -\frac{b}{l}, \qquad \frac{d(l\omega')}{d\alpha} = \frac{a}{l},$$

et par suite

$$(\beta\gamma - a^2)\frac{d(M-\mu)}{d\alpha} = -(b\gamma - a^2)\frac{l-x}{l} + a(b-\beta)\frac{x}{l}.$$

Il s'agit de comparer le second membre à l'expression

$$-(\beta\gamma - a^2)\frac{l-x}{l},$$

coefficient angulaire de la ligne d'influence de $(-\mu)$, multiplié par le facteur $(\beta\gamma - a^2)$. Posons $\frac{x}{l-x} = \lambda$, ce second membre devient

$$-\frac{l-x}{l}[b\gamma - a^2 - a(b-\beta)\lambda].$$

Il s'agit donc de voir le signe de la différence

$$b\gamma - a^2 - a(b-\beta)\lambda - (\beta\gamma - a^2) = (b-\beta)[\gamma - a\lambda].$$

Or $b - \beta$ est toujours négatif. Si donc on a $\gamma - a\lambda$ positif, c'est-à-dire si l'on a $\lambda < \frac{\gamma}{a}$, ou $\frac{x}{l-x} < \frac{\varphi'}{l-\varphi'}$, ou encore $x < \varphi'$, la différence dont il s'agit est négative et la ligne d'influence de $M - \mu$ a un coefficient angulaire inférieur en valeur absolue à celle de $(-\mu)$. Elle se tient au-dessus. Elle ne lui devient tangente que pour $x = \varphi'$, et elle ne se tient au-dessous que pour $x > \varphi'$, alors qu'il y a à considérer de ce côté une zone négative.

Les conclusions relatives à la forme des lignes enveloppes, dans les cas de charges assimilables à des charges uniformément réparties, demeurent donc les mêmes que dans la théorie de la poutre encastrée à ses deux extrémités, lorsque la charge ne sort pas de la travée considérée.

Il est utile, en passant, de noter la valeur des coefficients angulaires des tangentes aux deux extrémités des arcs qui forment les lignes d'influence de M_j et N_j lorsque la charge parcourt la travée d'indice j.

Pour $\alpha = 0$, on trouve, en faisant $x = 0$ dans la formule générale

donnée plus haut,

$$(\beta\gamma - a^2)\frac{dM_j}{d\alpha} = -(b\gamma - a^2),$$

d'où

$$\frac{dM_j}{d\alpha} = -\frac{b\gamma - a^2}{\beta\gamma - a^2}.$$

En remplaçant b, β, γ par leurs valeurs en fonction des abscisses des foyers, on trouve l'expression équivalente

$$\frac{dM_j}{d\alpha} = -\frac{\varphi}{f}\,\frac{\varphi' - f}{\varphi' - \varphi}.$$

Pour $\alpha = l$, en tenant compte cette fois de ce que $\frac{d(l\omega)}{d\alpha} = \frac{a}{l}$ et $\frac{d(l\omega')}{d\alpha} = -\frac{c}{l}$, on trouve, d'après l'expression de M_j,

$$(\beta\gamma - a^2)\frac{dM_j}{d\alpha} = a(\gamma - c),$$

d'où

$$\frac{dM_j}{d\alpha} = \frac{a(\gamma - c)}{\beta\gamma - a^2} = \frac{\varphi}{l - f'}\,\frac{\varphi' - f'}{\varphi' - \varphi}.$$

En ce qui concerne N_j, on trouverait de même :

pour $\alpha = 0$,

$$\frac{dN_j}{d\alpha} = \frac{a(b - \beta)}{\beta\gamma - a^2} = -\frac{l - \varphi'}{f}\,\frac{f - \varphi}{\varphi' - \varphi};$$

pour $\alpha = l$,

$$\frac{dN_j}{d\alpha} = \frac{\beta c - a^2}{\beta\gamma - a^2} = \frac{l - \varphi'}{l - f'}\,\frac{f' - \varphi}{\varphi' - \varphi}.$$

Ces deux dernières formules se déduisent d'ailleurs des premières en changeant f en $l - f'$ et φ en $l - \varphi'$, et en inversant les signes.

Des considérations analogues s'appliqueraient aux lignes d'influence de l'effort tranchant, et nous ne répéterons pas ce qui a été dit pour la poutre encastrée. Ici, les lignes d'influence de $\frac{M_j - N_j}{l_j}$ et de $\frac{d\mu}{dx}$ n'ont pas mêmes tangentes à leurs extrémités, mais on aura toujours deux zones de signe contraire séparées par la section, avec un ressaut égal à P au droit de celle-ci. Les courbes enveloppes conservent la même allure générale.

Ligne d'influence de $M_{(x)}$ quand la charge n'est pas dans la

même travée que la section. — Supposons maintenant que, la section G_x considérée étant dans la travée l_j, la charge P ait franchi l'appui G_{j+1} et se déplace dans la travée suivante l_{j+1}. Les moments M_j et N_j aux deux extrémités de la travée l_j seront proportionnels aux moments M_{j+1}, les coefficients de proportionnalité étant déterminés par les relations (4). La ligne représentative du moment M_x dans la travée l_j sera d'ailleurs une droite passant par son foyer de gauche Φ_j, et si x est l'abscisse de la section on pourra écrire

$$M_{(x)} = \frac{x - \varphi_j}{l_j - \varphi_j} N_j,$$

M_x sera donc lui-même proportionnel à M_{j+1}. Or la ligne d'influence de M_{j+1}, quand la charge parcourt la travée l_{j+1}, se réduit à une zone négative. La ligne d'influence de M_x dans les mêmes circonstances se réduira donc à une seule zone aussi, qui sera positive ou négative suivant les valeurs relatives de x et de φ_j.

On peut ajouter que N_j est toujours du même signe que M_{j+1} et que M_j est de signe contraire. On a d'ailleurs $|N_j| < |M_{j+1}|$ et, à moins de circonstances très exceptionnelles, on aura

$$|M_j| < \frac{1}{3}|N_j| < \frac{1}{3}|M_{j+1}|.$$

Si la charge franchit l'appui G_{j+2} et passe dans la travée suivante, M_j et N_j seront toujours proportionnels à M_{j+1}, mais celui-ci sera lui-même, ainsi que N_{j+1}, proportionnel à M_{j+2}, dont la ligne d'influence se réduit encore à une zone négative quand la charge parcourt la travée l_{j+2}. Il en résulte que, dans ces conditions, M_{j+1} devient positif, que N_j est positif aussi, et que M_j est négatif.

Le signe de M_x sera donc lui-même toujours inversé et sa ligne d'influence sera dans la travée l_{j+2} de signe contraire à celle de la travée l_{j+1}.

On aura d'ailleurs généralement

$$|M_j| < \frac{1}{3}|M_{j+1}| < \frac{1}{9}|M_{j+2}|.$$

On poursuivrait ainsi indéfiniment. La ligne d'influence de M_x se composera d'arcs alternativement positifs et négatifs, en passant d'une travée à l'autre, et les ordonnées maxima de ces différents arcs iront en s'atténuant rapidement.

Il en serait de même si la charge parcourait les travées à gauche de la travée l_j.

La conclusion de tout ceci, c'est que si l'on a besoin de tracer la ligne d'influence complète du moment fléchissant dans une section quelconque G_x de la travée l_j, *lorsque la charge se déplace soit à droite, soit à gauche de cette travée*, on peut le faire par des réductions des lignes d'influence des moments M_i ou N_i aux extrémités des travées successivement parcourues. Dans chaque travée ces lignes d'influence ne présentent qu'une seule zone, et l'on pourra généralement les tracer avec une approximation suffisante, conformément à une remarque générale faite précédemment, dès que l'on connaîtra leurs tangentes extrêmes. Les zones successives de la ligne d'influence étant ainsi alternativement positives et négatives, et les points de passage correspondant aux appuis, on saura toujours que les maxima, soit positif, soit négatif, du moment fléchissant s'obtiennent en chargeant de deux en deux les travées autres que la travée l_j. Enfin, l'influence des charges situées à une certaine distance de l_j pourra être négligée devant les autres charges. En général, il suffira de prendre en considération les deux ou trois travées encadrant la travée l_j.

Lignes enveloppes des moments fléchissants dans la travée l_j. — Supposons, pour préciser les idées, qu'il s'agisse d'une surcharge assimilable à une charge uniforme, mais pouvant couvrir indifféremment une zone quelconque de la poutre.

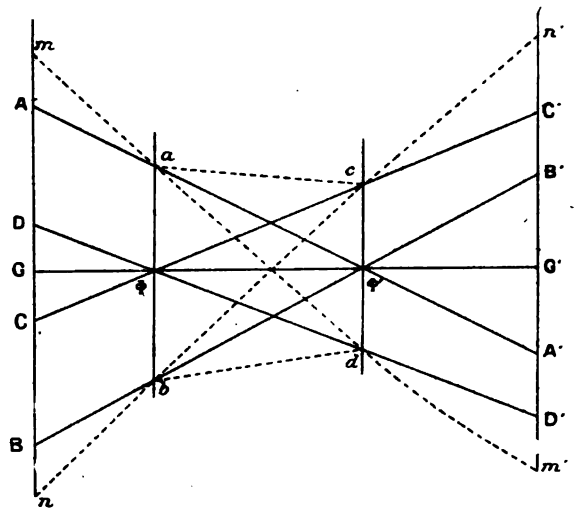
On commencera par tracer les lignes enveloppes dans l'hypothèse où les surcharges ne sortiraient pas de la travée considérée. On opérera pour cela exactement comme dans le cas de la poutre encastrée. Entre les foyers, les maxima positifs correspondront à la surcharge complète et les maxima négatifs seront nuls. En dehors des foyers, on aura des courbes de raccordement, d'une part avec la parabole représentative des moments fléchissants dus à la surcharge complète, *d'autre part avec sa ligne de fermeture*. Ces courbes pourront du reste, en pratique, être assimilées à des paraboles cubiques.

Cela fait, on surchargera les travées de deux en deux, tant à droite qu'à gauche de la travée l_j, et dans chacun de ces quatre cas on déterminera les moments M_j, ou N_j, que les surcharges

produiront aux deux extrémités de la travée, en cumulant, par exemple, les résultats relatifs à chaque travée surchargée, s'il y en a plusieurs simultanément. On tracera ensuite les lignes droites qui, dans chacun de ces cas, représentent les moments fléchissants dans la travée l_j, et qui d'ailleurs passent respectivement, soit par les foyers de gauche quand il s'agit de surcharges des travées à droite, soit par les foyers de droite quand il s'agit de surcharges de travées à gauche.

On aura, par exemple, la disposition de la figure ci-dessous. Il ne restera plus qu'à faire pour chaque section la somme des

Fig. 98.



ordonnées positives et celle des ordonnées négatives des quatre droites AA′ — BB′ — CC′ — DD′. L'enveloppe des ordonnées positives sera évidemment la ligne brisée *macn′*, et l'enveloppe des ordonnées négatives sera de même *nbdm′*, les droites *mm′* et *nn′* étant respectivement les lignes qui joignent en croix les points situés sur les verticales des foyers. En effet, dans chacun des intervalles GΦ — ΦΦ′ — Φ′G′, on doit avoir comme résultat des segments de droites, et il suffit, pour déterminer celle-ci, d'en avoir deux points.

En ce qui concerne les ordonnées positives, par exemple, il faut dans l'intervalle GΦ additionner les ordonnées des deux

droites $D\Phi$ et $A\Phi'$, qui passent l'une en Φ, l'autre en Φ'. Pour obtenir la droite qui en résulte, il suffit de remarquer que a et d sont forcément les points où cette droite résultante rencontre les verticales des foyers.

Pour compléter la solution, il suffit dès lors de rapporter à ces lignes brisées *macn'* et *nbdm'*, considérées comme lignes de référence, les arcs correspondants des courbes enveloppes tracées dans l'hypothèse où la travée était seule chargée. On aura ainsi les moments définitifs totaux, tant positifs que négatifs, si on les compte à partir de GG'.

Si les surcharges ne sont pas uniformes, la méthode reste la même; mais la détermination des courbes enveloppes relatives aux surcharges placées dans la travée sera un peu plus compliquée.

Lignes enveloppes des efforts tranchants dans la travée l_j. — Nous savons, pour une section G_x, tracer la ligne d'influence de l'effort tranchant

$$T = \frac{d\mu}{dx} - \frac{M_j - N_j}{l_j},$$

quand la charge est dans la travée l_j, et nous pouvons par suite en déduire les courbes enveloppes dans la même hypothèse. Nous répéterons que celles-ci ont la même allure générale que celles qui se rapportent à la travée posée sur deux appuis simples, et il suffira par suite d'en déterminer un petit nombre de points.

Si la charge passe dans la travée l_{j+1} on a, *pour une section d'ailleurs quelconque* de la travée l_j,

$$T = -\frac{M_j - N_j}{l_j},$$

et comme M_j et N_j sont proportionnels à M_{j+1}, la ligne d'influence de T sera encore une réduction de celle de M_{j+1}. Elle n'aura qu'une zone dans l'étendue de la travée l_{j+1} et cette zone sera négative, puisque alors M_j est positif et N_j négatif.

Si la charge passe dans la travée suivante, la ligne d'influence sera de même une réduction de celle de M_{j+2}. Elle n'aura qu'une seule zone et sera négative, et ainsi de suite. De même pour les travées à gauche.

Pour avoir les lignes enveloppes de T quand la charge est en

dehors de la travée, il faudra donc encore surcharger les travées de deux en deux, tant à droite qu'à gauche de la travée l_j, et, dans chacun de ces quatre cas, déterminer les valeurs cumulées de $\frac{M_j - N_j}{l_j}$, puis ajouter les résultats de même signe. Les lignes enveloppes seront des horizontales.

Pour compléter la solution il suffira de rapporter à ces horizontales les courbes enveloppes obtenues dans l'hypothèse où les surcharges étaient dans la travée l_j. On aura ainsi les enveloppes des efforts tranchants définitifs totaux.

Résumé de la méthode à suivre dans le cas de charges et de surcharges uniformes. — L'étude théorique qui précède était nécessaire pour mettre en évidence les propriétés des lignes d'influence, et notamment le sens des effets produits par une surcharge quelconque dans une section donnée. Mais il n'est peut être pas inutile d'en reprendre les principaux résultats à un point de vue pratique, et principalement dans le cas le plus habituel, où l'on ne considère que des charges uniformes, savoir une charge permanente couvrant nécessairement toute la longeur de la poutre et une surcharge, assimilable à une charge uniformément répartie, mais pouvant couvrir des zones partielles quelconques.

Que la poutre soit à section constante, ou variable, que ses appuis soient capables ou non de développer des couples de réaction, la méthode à suivre est toujours la même et peut se résumer comme il suit :

1° Pour chaque appui on déterminera, d'après sa nature et ses dimensions, le coefficient k qui figure dans l'équation (1) relative à cet appui.

Pour chaque travée on déterminera les trois quantités a, b, c qui la définissent au point de vue mécanique et qui figurent dans les équations (2) et (3) relatives à cette travée. Ces trois quantités définissent les *foyers principaux* de la travée, et le tracé à faire pour les obtenir donne les lignes d'influence des quantités $l\omega$ et $l\omega'$, relatives à la travée, qui figurent dans les équations (7). Dans le cas d'une section constante, leur détermination est immédiate.

2° On résoudra le système des équations (1)', (2), (3) d'un

bout à l'autre de la poutre, dans l'hypothèse $\omega_1 = 1$, de manière à obtenir tous les coefficients de proportionnalité figurant dans les relations (4). On en fera autant pour les mêmes équations prises en ordre inverse, dans l'hypothèse $\omega_{n+1} = 1$, c'est-à-dire pour la poutre retournée bout pour bout, de manière à obtenir tous les coefficients de proportionnalité figurant dans les relations (4)'.

On déterminera ainsi la position des foyers de chaque travée.

Le cas échéant, on utilisera l'équation de récurrence (11) ou le procédé graphique qui s'en déduit, ou encore les tableaux de Bresse.

3° On envisagera chaque travée l_j comme si elle était seule, dans le cas où elle serait entièrement couverte par une charge uniforme de valeur égale à une unité arbitraire. On calculera par les équations (7), les valeurs des moments M_j et N_j à ses extrémités, ou bien encore on calculera par les équations (10) et (10)' les valeurs de la fonction $M - \mu$ à ses deux foyers. Les quantités $l_j\omega$ et $-l_j\omega'$ qui figurent dans les équations (7) ou (10) et (10') seront données dans le cas général par l'aire des lignes d'influence tracées pour la détermination de $a_j\, b_j\, c_j$. Dans le cas d'une section constante, on pourra les calculer directement par la formule donnée au Chapitre VIII, savoir :

$$-l\omega_0 = l\omega_1 = \frac{pl^4}{24\,EI}.$$

D'une façon ou de l'autre, on déterminera la droite de fermeture, dont les ordonnées représenteront la valeur de $M - \mu$ dans l'étendue de la travée, si celle-ci était seule chargée et complètement chargée. C'est aussi la ligne de référence à laquelle il faudrait rapporter la parabole, représentative de μ, pour avoir M dans les mêmes conditions.

4° On pourra alors dresser un Tableau à double entrée, d'après l'indice des travées, et l'on y inscrira méthodiquement, dans la colonne correspondant à la travée l_j, les moments M_j et N_j qui viennent d'être déterminés, puis tous les moments M_i et N_i que la charge couvrant la travée l_j produirait aux extrémités des autres travées, soit à droite, soit à gauche. Ces moments M_i et N_i se déduiront des relations (4) ou (4)' et seront proportionnels soit

à M_j, soit à N_j. On aura souvent avantage à les déterminer graphiquement.

Bien entendu, on pourra négliger de remplir les cases relatives à des travées éloignées de l_j, dès que, en procédant de proche en proche, on constatera que les valeurs de M_i et de N_i sont réellement négligeables.

5° Pour étudier l'effet de la charge permanente totale p dans la travée l_j il suffira de faire les sommes de tous les moments M_j et N_j qui proviendraient pour elle des autres travées chargées, et de les ajouter aux moments qui proviennent de sa charge propre; en un mot, il suffira de faire les sommes de tous les moments M_j ou N_j inscrits dans la ligne horizontale correspondant à l_j et de les multiplier par p. Ces sommes donneront la ligne de fermeture définitive à laquelle il faut rapporter la parabole tracée pour avoir la ligne représentative des moments fléchissants dans la travée considérée. Si les coefficients k sont nuls, toutes ces lignes de fermeture se raccordent bout à bout.

6° Pour étudier l'effet de la surcharge p', dans les conditions les plus défavorables qu'elle puisse présenter, on tracera d'abord les lignes enveloppes des moments fléchissants, dans l'hypothèse où cette surcharge ne dépasserait pas les limites de la travée l_j.

Puis on supposera les autres travées complètement chargées de deux en deux, soit à droite, soit à gauche de l_j, et l'on fera, d'après le Tableau (4°), les sommations correspondantes des valeurs qui en résulteraient pour M_j ou N_j et l'on tracera les lignes brisées résultantes des quatre droites qui représenteraient dans chaque cas les moments fléchissants dans la travée l_j et qui devront passer soit par l'un, soit par l'autre des foyers.

On rapportera à ces lignes brisées les lignes enveloppes précédemment déterminées et l'on aura les courbes enveloppes définitives.

7° On procédera d'une façon analogue pour les efforts tranchants.

Pour la charge permanente, il suffira, dans la ligne horizontale du Tableau (4°) correspondant à la travée l_j, de faire la somme des N_j et des M_j, puis de calculer $\frac{\Sigma M_j - \Sigma N_j}{l_j}$. La ligne représen-

tative de l'effort tranchant sera

$$y = \frac{\Sigma N_j - \Sigma M_j}{l_j} + \frac{pl}{2} - px.$$

Pour la surcharge de longueur variable, on tracera les courbes enveloppes dans l'hypothèse où la surcharge ne dépasserait pas les limites de la travée. Ensuite, on supposera les autres travées complètement chargées de deux en deux, et le Tableau (4°) fournira les ordonnées des droites horizontales auxquelles il faut rapporter ces courbes enveloppes.

Effets produits par une dénivellation accidentelle des appuis. — Le cas type auquel on peut rapporter tous les autres est celui où l'on suppose la travée l_j dénivelée, c'est-à-dire où toutes les quantités $v_{i+1} - v_i$ sont supposées nulles, à l'exception de l'une d'elles, $v_{j+1} - v_j$ que l'on supposera égale à une quantité donnée δ. On ne suppose alors aucune charge sur la poutre.

La solution est encore donnée par l'ensemble des équations (1), (2) et (3), avec cette observation que le groupe des équations (2) et (3)' qui sont afférentes à la travée dénivelée ne contiennent plus dans leur second membre les termes $-l_j^2\omega$ et $l_j^2\omega'$, respectivement, mais contiennent par contre dans leur premier membre les termes $+l_j\delta$ et $-l_j\delta$.

Les équations (7) et toutes les formules qui s'en déduisent seront donc encore valables, à la seule condition de remplacer $l_j^2\omega$ et $l_j^2\omega'$ par $l_j\delta$.

On en déduira notamment, en supprimant les accents des coefficients,

$$M_j = \frac{l\delta}{\beta\gamma - \alpha^2}(\alpha + \gamma) \qquad \text{et} \qquad N_j = \frac{-l\delta}{\beta\gamma - \alpha^2}(\alpha + \beta).$$

Aux foyers Φ et Φ' de la travée, on aurait respectivement, équations (10) et (10'),

$$M = \frac{\varphi\delta}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{-(l - \varphi')\delta}{\alpha}.$$

On peut mettre sous une autre forme les expressions de M_j et N_j en introduisant à la place de β et γ les absisses φ et φ' des

foyers. On a, en effet,

$$\beta = a\frac{l-\varphi}{\varphi} \quad \text{et} \quad \gamma = a\frac{\varphi'}{l-\varphi'}.$$

On en déduit

$$a+\beta = \frac{al}{\varphi}, \quad a+\gamma = \frac{al}{l-\varphi'} \quad \text{et} \quad \beta\gamma - a^2 = a^2 l\frac{\varphi'-\varphi}{\varphi(l-\varphi')}.$$

Et par suite on a

$$M_j = \frac{l\delta}{a}\frac{\varphi}{\varphi'-\varphi} \quad \text{et} \quad N_j = -\frac{l\delta}{a}\frac{(l-\varphi')}{\varphi'-\varphi}.$$

Il sera facile dès lors, connaissant les foyers, de tracer la ligne représentative des moments dans toute l'étendue de la poutre.

Si l'on suppose plusieurs travées dénivelées, on cumulera les résultats. En particulier, on pourra trouver l'effet produit par le déplacement vertical d'un appui donné, ce qui suppose des dénivellations égales et de signe contraire dans les deux travées contiguës.

Dans le cas général où tous les appuis auraient subi des déplacements verticaux quelconques, mais connus, cette décomposition du problème en une série de problèmes simples ne présente pas grand avantage au point de vue des déterminations pratiques. Le plus expéditif paraît être d'aborder franchement la résolution du système étagé formé par les groupes d'équations (1)', (2) et (3). En mettant une inconnue quelconque MN ou ω sous la forme $A\omega_1 + B$, la série des coefficients A reproduira celle des coefficients m_i, n_i, Φ_i, qui correspondent à l'hypothèse $v_i = 0$. Il restera à calculer la série des coefficients B, ce qu'on peut faire en partant de l'hypothèse $\omega_1 = 0$. L'équation de condition déterminant finalement ω_1, et par suite toutes les autres inconnues, s'obtiendra en égalant à zéro l'expression qui serait fournie pour M_{n+1} par la dernière des équations (1)', dernière équation du système étagé.

Influence d'une variation de température qui donnerait pour chaque appui des déplacements v_i et u_i connus *a priori*. — Tout en supposant les appuis et la poutre elle-même incompressibles dans le sens de leur longueur, on peut les considérer comme dilatables. Alors tous les v_i sont connus, et d'ailleurs leurs différences à l'un

d'eux importent seules. Toutes les différences telles que $u_{i+1} - u_i$ sont également connues, et si l'on suppose donné l'un de ces déplacements, par exemple $u_1 = 0$, tous les autres sont connus.

Le problème se résoudra comme le précédent. Toutefois, les équations (1)' devront être modifiées. On aura généralement, en effet, des relations de la forme binome

$$(1') \qquad S_i = M_i - N_{i-1} = K_i \omega_i + H_i u_i.$$

Les équations (2) et (3) restent les mêmes.

Le système des équations (1)', (2) et (3) reste étagé à partir de ω_1, et si l'on met encore les inconnues successivement rencontrées sous la forme

$$A\omega_1 + B,$$

la série des coefficients A, correspondant aux hypothèses

$$u_i = v_i = 0,$$

sera encore la même que précédemment. La série des coefficients B s'obtiendra en partant de l'hypothèse $\omega_1 = 0$.

Comme dans les autres cas précédemment envisagés, les composantes X_i des réactions d'appui se déduiront après coup, si l'on en a besoin, des équations de liaison qui leur correspondent et qui seront de la même forme que (1)', savoir

$$X_i = K'_i \omega_i + H'_i u_i.$$

III. — Étude sommaire des poutres sur appuis compressibles.

Les transformations qui ont été apportées à la méthode générale dans le cas d'appuis incompressibles peuvent encore être utilisées dans le cas actuel. Il faut simplement, dans les équations (2) et (3) et (2)' et (3)', conserver les termes en v et, d'autre part, tenir compte des relations qui existent pour chaque appui entre le déplacement vertical v_i et la réaction verticale correspondante. Ces relations seront généralement de la forme

$$(A) \qquad -v_i = h_i Y_i = h_i \left[\frac{N_i - M_i}{l_i} - \frac{N_{i-1} - M_{i-1}}{l_{i-1}} \right];$$

mais pour les appuis G_j et G_{j+1} de la travée chargée, elles seront

de la forme

$$(A') \quad -v_j = h_j[Y_j + Y] = h_j\left[\frac{N_j - N_j}{l_j} - \frac{N_{j-1} - M_{j-1}}{l_{j-1}}\right] + h_j Y,$$

Y étant la réaction correspondant à la poutre posée sur appuis simples.

La solution est notablement plus compliquée que dans le cas précédent et ne se prête pas à des développements théoriques aussi intéressants en raison de ce fait capital que le système des équations à envisager n'est étagé qu'à partir de ω_1 et de v_1. On ne peut plus établir de relations de simple proportionnalité.

On reconnaîtra facilement les points suivants. Si on laisse ω_1 et v_1 arbitraires, la première équation (1)' donne M_1 et la première équation (A) donne N_1. La première équation (2) donne v_2 et la première équation (3) donne ω_2, et ainsi de suite. On aura donc des expressions de la forme

$$m\omega_1 + nv_1$$

pour toutes les inconnues successivement rencontrées jusqu'ici, v_j et M_j inclusivement. Quand on arrive à N_j, donnée par l'équation (A'), cette équation dépendant des charges par son terme Y, on n'aura plus une expression linéaire et homogène en ω_1 et v_1, mais il faudra y joindre le terme $h_j Y = p$. Il en sera de même pour v_{j+1} qui est donné par l'équation (2)'.

On peut alors transformer ces expressions de N_j et v_{j+1} en substituant à ω_1 et v_1 les valeurs qui se déduiraient des relations linéaires et homogènes existant entre celles-ci et v_j et M_j, de sorte qu'on pourra écrire pour N_j et v_{j+1} des relations de la forme

$$(B) \qquad N_j = mM_j + nv_j + p.$$

En considérant la poutre retournée bout pour bout, c'est-à-dire en prenant le système d'équations dans un ordre inverse, on parviendra de la même façon à exprimer M_j et v_j en fonction de N_j et de v_{j+1} et l'on aura deux nouvelles relations de la forme

$$(B') \qquad M_j = m'N_j + n'v_{j+1} + p'.$$

Ces quatre équations (qui ne renferment chacune que trois des quatre inconnues M_j N_j v_j v_{j+1}) permettront de calculer les quatre

inconnues qui y figurent. Toutes les autres s'en déduiront ensuite puisqu'elles ont des expressions linéaires et homogènes, soit par rapport à ω_1 et v_1, dont on a les expressions linéaires et homogènes en M_j et v_j, soit par rapport à ω_{n+1} et v_{n+1}, exprimables en N_j et v_{j+1}.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces calculs. Ils se simplifient quand on se trouve en présence de données numériques concrètes. Si l'on avait à entreprendre une étude complète d'une pareille poutre, on la déduirait de la connaissance des lignes d'influence des inconnues M_j et N_j, et pour tracer celles-ci avec une approximation satisfaisante il suffira la plupart du temps de déterminer leurs points et leurs tangentes au droit des verticales des appuis, c'est-à-dire pour un nombre très limité de positions de la charge, en utilisant à la fois le système des équations (1'), (A), (2) et (3) et le système dérivé par rapport à α, abscisse de la charge, les équations (A)', (2)', (3)' étant convenablement modifiées.

Une autre simplification pratiquement admissible consiste à limiter, pour chaque position envisagée de la charge mobile, la région de la poutre sur laquelle cette charge peut produire des effets appréciables. On jugerait après coup si l'approximation ainsi obtenue est satisfaisante d'après la grandeur même des réactions obtenues pour les appuis extrêmes de la poutre réduite.

Méthode particulière au cas où les appuis ne peuvent développer que des réactions verticales et où les appuis extrêmes sont incompressibles. — Les restrictions que nous supposons ici ne sont pas absolument nécessaires, mais il n'y aurait aucun intérêt pratique à généraliser.

Par appuis extrêmes incompressibles, il faut d'ailleurs entendre que ces appuis sont tels, soit d'après leur constitution propre, soit d'après la place qu'ils occupent par rapport à la charge. Il suffit que leur déformation verticale soit considérée comme pratiquement négligeable par rapport à celles des appuis intermédiaires.

Supposons une charge unique P agissant suivant la verticale d'abscisse α et soient $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$ les réactions des appuis.

Ces réactions ne sont pas toutes indépendantes, car elles doivent satisfaire aux deux équations d'équilibre statique, lesquelles per-

mettront par exemple de déterminer les deux réactions extrêmes R_1 et R_{n+1} dès que les $n-1$ réactions intermédiaires seront connues.

Pour déterminer ces dernières on peut disposer des $n-1$ équations que l'on obtiendra en écrivant qu'au droit de l'appui intermédiaire n° i le déplacement vertical sous l'action combinée de la force P et des $n-1$ réactions cherchées est proportionnel à R_i, c'est-à-dire de la forme

$$v_i = k_i R_i,$$

k_i étant positif si l'on convient de compter positivement les déplacements s'opérant de haut en bas.

Supposons que les $n-1$ appuis intermédiaires soient provisoirement supprimés, et appliquons successivement une force unité au droit de chacun d'eux, puis traçons dans chacune de ces hypothèses la ligne élastique de la poutre. Nous serons en mesure de connaître les déplacements verticaux aux différents points de la poutre et notamment au droit des différents appuis intermédiaires, ainsi qu'au droit de l'abscisse α, sous l'action de la charge unité placée au droit de l'appui n° i. Si l'on désigne d'une manière générale par v_β^α le déplacement produit dans la section β par la force agissant dans la section α, on sait par le théorème de Maxwell que $v_\beta^\alpha = v_\alpha^\beta$.

Évaluons maintenant le déplacement total au droit de l'appui n° i sous l'action de la force P, on aura

$$v_i^\alpha P \qquad \text{ou encore} \qquad v_\alpha^i P;$$

sous l'action d'une réaction telle que R_k, on aura

$$-v_i^k R_k = -v_k^i R_k,$$

de sorte que le déplacement total sera

$$v_i = k_i R_i = v_\alpha^i P - v_2^i R_2 - v_3^i R_3 \ldots - v_i^i R_i \ldots - v_n^i R_n.$$

On a ainsi une équation linéaire contenant les différentes réactions cherchées, et l'on aurait une équation semblable pour chacun des autres appuis intermédiaires.

Tous les coefficients figurant dans le second membre de l'équation précédente peuvent être relevés sur la ligne élastique qui cor-

respond à la charge unité placée sur l'appui n° i. Dans le cas de poutres à section constante, on pourra utiliser le Tableau donné à la fin du Chapitre VIII.

Cette méthode très directe est assez pratique lorsque le nombre total des appuis à envisager ne dépasse pas cinq ou six. Le nombre des équations se réduit à trois ou quatre au plus. Au delà de ce nombre, leur résolution deviendrait pénible, car chacune des équations renferme toutes les inconnues.

La méthode est surtout à recommander quand on a à déterminer les réactions mutuelles d'un longeron pratiquement indéfini reposant sur une série de poutres transversales régulièrement espacées. On peut se contenter souvent de l'approximation obtenue en considérant trois ou quatre travées successives seulement, les réactions étant négligeables au delà.

Cas d'une poutre sur appuis élastiques infiniment rapprochés. — C'est un cas limite que l'on a à envisager lorsqu'on étudie les conditions de résistance d'une traverse de chemin de fer reposant sur un sol élastique, ou encore celles d'un rail sur traverses rapprochées. Les auteurs qui se sont occupés spécialement de ces questions admettent généralement que les réactions du sol, ou des traverses, sont assimilables à une réaction continue dont l'intensité est p par mètre courant de poutre, et que l'on a partout une relation de proportionnalité telle que

$$p = kv,$$

v étant l'abaissement de la poutre au point considéré.

Dans ces conditions, dans chaque intervalle des charges, la poutre ne se trouve soumise qu'à l'action de p et l'équation différentielle de sa ligne élastique est

$$\mathrm{EI}\frac{d^4 v}{dx^4} = -p = -kv.$$

Son intégrale générale est connue. En posant $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4\mathrm{EI}}}$, on a

$$v = \mathrm{A}\,e^{\alpha x}\cos\alpha x + \mathrm{B}\,e^{\alpha x}\sin\alpha x + \mathrm{C}\,e^{-\alpha x}\cos\alpha x + \mathrm{D}\,e^{-\alpha x}\sin\alpha x,$$

les quatre constantes étant à déterminer dans chaque intervalle par les conditions particulières au problème posé.

On aura d'ailleurs en chaque point

$$M = -EI\frac{d^2v}{dx^2} \qquad \text{et} \qquad T = -EI\frac{d^3v}{dx^3}.$$

Supposons, à titre d'exemple, un rail de longueur infinie soumis à une charge unique P, en un point qu'on prendra pour origine des coordonnées. Par hypothèse, v doit être nul, ainsi que $\frac{dv}{dx}$ pour $x = \infty$. Cela exige $A = B = 0$ pour le tronçon de droite et $C = D = 0$ pour le tronçon de gauche. Si l'on envisage seulement le tronçon de droite, on devra avoir, pour $x = 0$, les deux conditions $\frac{dv}{dx} = 0$ et $T = -\frac{P}{2}$. On en déduit

$$C - D = 0,$$
$$C + D = \frac{P}{4EI\alpha^3},$$

d'où

$$C = D = \frac{P}{8EI\alpha^3}.$$

Il en résulte

$$v = \frac{P}{8EI\alpha^3}e^{-\alpha x}(\cos\alpha x + \sin\alpha x).$$

Le déplacement v, et la réaction p qui lui est proportionnelle, s'annulent pour les abscisses en progression géométrique rentrant dans la formule

$$\alpha x = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$

Ils passent par une série de maxima et de minima pour les abscisses rentrant dans la formule

$$\alpha x = k\pi.$$

Les maxima et minima successifs ont d'ailleurs (au facteur $\frac{P}{8EI\alpha^3}$ près en ce qui concerne v), les valeurs relatives suivantes :

$$(1) \qquad -e^{-\pi} = -0{,}0432, \qquad e^{-2\pi} = 0{,}0018, \qquad \ldots.$$

Ils sont inappréciables à partir du troisième.

En ce qui concerne le moment fléchissant, il a pour valeur

$$M = \frac{P}{4\alpha}e^{-\alpha x}(\cos\alpha x - \sin\alpha x).$$

Il s'annule pour les abscisses rentrant dans la formule

$$\alpha x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

décalées de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à celles qui annulent v.

Il passe par une série de maxima et de minima pour les abscisses rentrant dans la formule

$$\alpha x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

également décalées de $\frac{\pi}{2}$ par rapport aux maxima et minima de v.

A l'origine, point d'application de la charge, on a $M = \frac{P}{4\alpha}$. Par rapport à ce moment, les maxima successifs ont pour valeurs relatives

$$-e^{-\frac{\pi}{2}} = -0,2078, \qquad e^{-\frac{3\pi}{2}} = 0,00897, \qquad \ldots.$$

Ils deviennent inappréciables au delà

Les effets de la charge s'atténuent donc tous très vite de part et d'autre de son point d'application.

CHAPITRE XII.

POUTRES COURBES OU ARCS.

I. — Généralités sur les arcs.

Caractères généraux des poutres courbes. — Les poutres droites, à travées indépendantes, sont généralement caractérisées par ce fait que pour toute section transversale la force extérieure est parallèle au plan de cette section, si bien que la composante normale N de cette force extérieure est toujours nulle. Dès lors il suffit pour définir la force extérieure de deux quantités, le moment fléchissant M et l'effort tranchant T, qui d'ailleurs est lui même égal à la composante verticale Y, l'axe de la poutre étant supposé horizontal. Pour parvenir à la détermination de la fatigue dans une section, il suffit de connaître les maxima de M et de T, indépendamment l'un de l'autre.

Les poutres courbes sont au contraire généralement soumises dans leurs différentes sections à un effort normal non négligeable, qui provient soit d'une courbure prononcée de leur axe longitudinal, soit des réactions des appuis, ceux-ci étant convenablement disposés à cet effet.

Pour définir la force extérieure il faut alors trois quantités distinctes, le moment fléchissant M, avec les deux composantes normale et tangentielle N et T, ou bien avec les deux composantes horizontale et verticale X et Y.

En ce qui concerne la fatigue dans une section, on peut encore considérer à part l'effort tranchant T, ce dernier ayant d'ailleurs la plupart du temps une importance relative assez faible. Mais on ne peut plus séparer l'effort normal du moment fléchissant. L'expression de la fatigue est de la forme

$$R = \frac{N}{S} + \frac{Mh}{I},$$

où h désigne, soit la plus grande, soit la plus petite des distances algébriques des fibres de la section à l'horizontale du centre de gravité, distances qui sont d'ailleurs de signes différents. Le maximum de la fatigue ne se produit donc nécessairement ni quand le moment fléchissant est maximum, ni quand l'effort normal est maximum. La considération des maxima de M et de N est ici insuffisante, sinon inutile, et l'on est conduit à envisager directement la fatigue dans les deux fibres extrêmes de chaque section.

Ligne d'influence de la fatigue dans une section. — Nous avons vu comment, une fois déterminées les réactions des appuis, on pouvait dans un cas donné de charges, du reste quelconques, construire la courbe des pressions et en déduire pour chaque section les valeurs de M, N, T, ou bien encore le point de passage de la force extérieure. Nous avons vu aussi comment on peut déduire de la connaissance du point de passage la position de la ligne neutre, puis déterminer les tensions dans toute l'étendue de la section et notamment dans ses fibres extrêmes. Nous n'y reviendrons pas et nous nous bornerons à décrire le procédé un peu indirect par lequel on peut parvenir assez simplement à construire la ligne d'influence de la fatigue dans une des fibres extrêmes d'une section donnée.

Supposons connues les lignes d'influence d'où dépendent la *grandeur* et la *situation* de la réaction de l'appui de gauche R_0. Pour un certain nombre de positions de la charge mobile P, prise comme unité, on déterminera R_0 et l'on tracera la courbe des pressions correspondante. Cette courbe se réduira à deux portions de droites, valables l'une à gauche, l'autre à droite de la charge P.

On sera alors en mesure de trouver la fatigue produite par la charge P dans les fibres extrêmes de toutes les sections que l'on désire étudier, et l'on obtiendra de la sorte le point situé sur la verticale de P qui appartient à chacune des lignes d'influence correspondantes.

Avec dix ou vingt de ces points, suivant le degré de précision cherché, on aura la possibilité de tracer toutes ces lignes d'influence et de reconnaître l'étendue de leurs zones positives et négatives.

Ces lignes d'influence une fois obtenues, le plus simple sera de les utiliser directement à la recherche des fatigues maxima.

Détermination des réactions d'appui. — Le problème fondamental, ici comme pour les poutres droites, consiste donc dans la recherche des réactions d'appui, pour le cas d'une force appliquée unique.

Nous le simplifierons comme toujours en étudiant d'abord la poutre comme si elle reposait sur des appuis simples et en recherchant ensuite *les réactions complémentaires d'appui*. Les forces appliquées sont supposées parallèles à une même direction, que nous supposons verticale.

Dans l'hypothèse des appuis simples, les réactions provisoires d'appui, ainsi que le moment fléchissant μ et la composante verticale Y de la force extérieure, sont exactement les mêmes que pour la poutre droite de même portée horizontale. On a d'ailleurs $Y = \frac{d\mu}{dx}$.

D'autre part $X = 0$ partout.

Il en résulte que dans cette hypothèse l'effort normal et l'effort tranchant sont respectivement

$$N = \frac{d\mu}{dx}\frac{dy}{ds},$$

$$T = \frac{d\mu}{dx}\frac{dx}{ds}.$$

Soient maintenant A le moment par rapport à l'origine des coordonnées de la réaction complémentaire de l'appui de gauche et B et C ses composantes verticale et horizontale.

Dans une section (G) de coordonnées (x, y) le moment fléchissant réel a pour expression

$$M = \mu + A + Bx - Cy.$$

Quant à l'effort normal et à l'effort tranchant ils ont respectivement pour expression :

$$N = \frac{d\mu}{dx}\frac{dy}{ds} + C\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds},$$

$$T = \frac{d\mu}{dx}\frac{dx}{ds} + B\frac{dx}{ds} - C\frac{dy}{ds}.$$

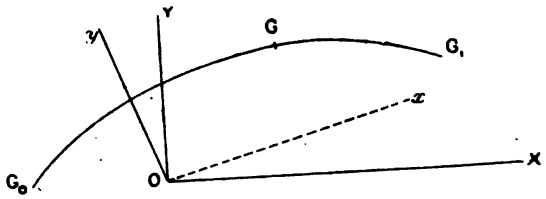
Il s'agira, dès lors, d'introduire ces expressions dans les équations particulières exprimant les conditions imposées aux appuis, pour obtenir les équations fournissant les réactions complémentaires d'appui A, B, C.

Il est utile de bien remarquer que la fonction μ, ainsi que sa dérivée $\frac{d\mu}{dx}$, supposent expressément que l'on a adopté pour les axes coordonnés deux directions particulières, l'une parallèle aux forces appliquées, ou verticale, l'autre perpendiculaire à la première ou horizontale.

Mais il n'en est aucunement ainsi en ce qui concerne la fonction linéaire complémentaire $A + Bx - Cy$ qui figure dans l'expression du moment fléchissant. Le groupe des constantes A, B, C dépend de la position et de la direction des axes coordonnés et par un choix convenable de ceux-ci on peut souvent simplifier certaines questions, ainsi que nous le verrons. C'est une ressource assez précieuse.

On peut tout concilier, lorsque cela est nécessaire, en envisageant simultanément deux systèmes distincts d'axes de coordonnées. Le premier sera désigné par les lettres majuscules OXY, étant entendu que OX est horizontale et OY verticale. Le second système sera désigné par Oxy.

Fig. 99.



Par suite les expressions de N et T s'écriront dans ce cas de la manière suivante :

$$N = \frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{ds} + C\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds},$$

$$T = \frac{d\mu}{dX}\frac{dX}{ds} + B\frac{dx}{ds} - C\frac{dy}{ds},$$

$\frac{dX}{ds}$ et $\frac{dY}{ds}$ étant les coefficients angulaires de la tangente au point G, dans le système d'axes OXY.

Rappel des équations de déformation. Leur transformation. — Appliquons les équations générales de déformation à l'arc entier et désignons par ω_1, v_1, u_1, x_1, y_1 les quantités qui se rapportent à l'extrémité de droite G_1. Convenons, en outre, de désigner par le signe $\int$ sans indices une sommation s'étendant à l'arc entier; nous obtenons les formules suivantes :

$$(A)\quad \begin{cases} (1) & \omega_1 - \omega_0 = \int \frac{M}{EI}\, d\sigma, \\ (2) & v_1 - v_0 - \omega_0(x_1 - x_0) = \int \frac{M}{EI}(x_1 - \xi)\, d\sigma - \int \frac{N}{ES}\frac{d\eta}{d\sigma}\, d\sigma, \\ (3) & u_1 - u_0 + \omega_0(y_1 - y_0) = -\int \frac{M}{EI}(y_1 - \eta)\, d\sigma - \int \frac{N}{ES}\frac{d\xi}{d\sigma}\, d\sigma. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par x_1 et en la retranchant de la seconde, on peut simplifier celle-ci et l'écrire

$$(2)\qquad v_1 - v_0 - \omega_1 x_1 + \omega_0 x_0 = -\int \frac{M}{EI}\xi\, d\sigma - \int \frac{N}{ES}\frac{d\eta}{d\sigma}\, d\sigma.$$

De même, en multipliant la première équation par y_1 et en l'ajoutant à la troisième, on obtient

$$(3)\qquad u_1 - u_0 + \omega_1 y_1 - \omega_0 y_0 = \int \frac{M}{EI}\eta\, d\sigma - \int \frac{N}{ES}\frac{d\xi}{d\sigma}\, d\sigma.$$

Sous cette forme, les premiers membres seuls contiennent les coordonnées et les déplacements des points extrêmes, et il est tout à fait simple d'y tenir compte des conditions particulières qu'ils doivent remplir.

Influence de la température. — Les poutres courbes ne sont pas, en général, insensibles à l'action de la température.

Celle-ci déforme toujours leur axe longitudinal. En outre, comme les appuis s'opposent toujours, dans une certaine mesure, aux déplacements des extrémités, l'action de la température provoque des réactions d'appui non négligeables qui se superposent à celles qui sont dues aux charges.

Ces réactions d'appui, qui s'introduisent dans un système déjà en équilibre, sont de tous points assimilables à des *réactions com-*

plémentaires d'appui, c'est-à-dire qu'elles sont réductibles à deux forces égales et directement opposées.

En l'absence de charges, la ligne d'action de la réaction d'appui de gauche constituera par suite à elle seule la courbe des pressions et dans chaque section le moment fléchissant sera égal au produit de l'intensité de cette réaction par la distance du centre de gravité à sa ligne d'action. Il sera donc une fonction linéaire des coordonnées (xy) du centre de gravité de la section.

Pour trouver, le cas échéant, les composantes A, B, C de la réaction d'appui due à une élévation de température, il suffira donc d'introduire, pour M et N, des expressions de la même forme que précédemment, à cette seule différence près que μ et $\frac{d\mu}{dX}$ disparaissent.

Il convient, du reste, de compléter dans ce cas les équations (2) et (3) respectivement par l'adjonction, dans les seconds membres, des termes

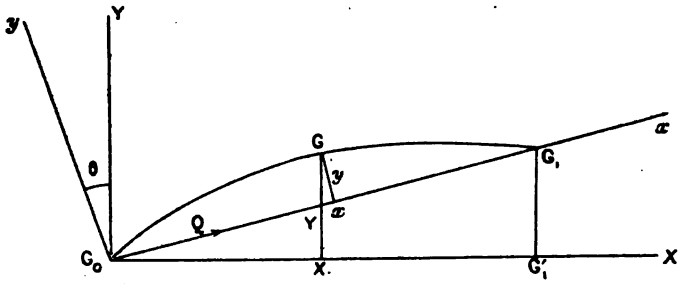
$$\tau(y_1 - y_0) \quad \text{et} \quad \tau(x_1 - x_0),$$

où τ désigne l'allongement de l'unité de longueur, c'est-à-dire le produit de l'écart de température par le coefficient de dilatation.

H. — Arcs articulés aux naissances.

Définition. — Par hypothèse, les appuis G_0 et G_1 sont de position invariable. Mais la poutre est munie en ces points d'articula-

Fig. 100.



tions, de sorte que les appuis ne peuvent produire sur elle que des réactions passant par ces points eux-mêmes. Autrement dit, le moment fléchissant est forcément nul en G_0 et G_1.

On a

$$v_0 = u_0 = 0, \qquad v_1 = u_1 = 0.$$

Mais ω_0 et ω_1 ne sont pas forcément nuls.

D'autre part, les réactions complémentaires d'appui sont nécessairement deux forces égales et directement opposées, ayant pour ligne d'action commune la corde $G_0 G_1$. Nous désignerons, suivant l'usage, par la lettre Q la réaction s'exerçant en G_0, dans le sens $G_0 G_1$, et nous l'appellerons *la poussée de l'arc*.

Équation générale fournissant la poussée. — Il est tout indiqué de choisir, comme axes coordonnés Oxy, la ligne d'action de Q, c'est-à-dire la corde $G_0 G_1$ et une droite perpendiculaire. Pour préciser, nous placerons l'origine en G_0.

Dans ces conditions, on a

$$A = B = 0 \qquad \text{et} \qquad C = Q,$$

de sorte que le moment de la réaction complémentaire par rapport à un point G de l'axe longitudinal a simplement pour valeur $-Qy$ et que l'expression générale du moment fléchissant en G est

$$M = \mu - Qy,$$

μ étant d'ailleurs, comme nous l'avons fait observer, rapporté aux deux axes OX et OY, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle à la direction des charges.

L'expression générale de N se réduit d'autre part à

$$N = \frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{ds} + Q\frac{dx}{ds}.$$

Dans la troisième équation de déformation, le premier membre a tous ses termes nuls, en vertu des hypothèses faites. Elle fournit donc la condition nécessaire à laquelle doit satisfaire la poussée

$$\int \frac{M}{EI}\eta\, d\sigma - \int \frac{N}{ES}\frac{d\xi}{d\sigma}\, d\sigma = 0.$$

Remplaçons dans cette équation M et N par leurs valeurs en fonction de Q; nous obtenons, en désignant par ξ, η, σ les variables courantes,

$$\int \frac{\mu}{EI}\eta\, d\sigma - Q\int \frac{\eta^2}{EI}\, d\sigma - \int \frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{d\sigma}\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ES} - Q\int \frac{1}{ES}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 d\sigma = 0,$$

d'où

$$Q\left[\int \frac{\eta^2\, d\sigma}{EI} + \int \frac{1}{ES}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\right] = \int \frac{\mu}{EI}\,\eta\, d\sigma - \int \frac{d\mu}{dX}\,\frac{dY}{d\sigma}\,\frac{d\xi}{d\sigma}\,\frac{d\sigma}{ES}.$$

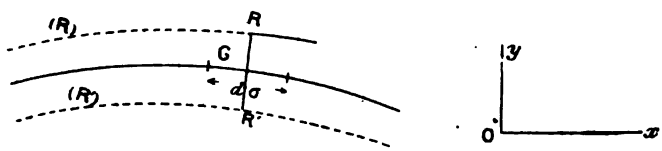
Telle est l'équation exacte et complète qui fournit la poussée. Ainsi que cela sera justifié plus tard, d'après les résultats obtenus par Bresse pour les arcs circulaires, on peut toujours, sans inconvénient, négliger le second terme du second membre. D'autre part, il est également sans inconvénient sérieux de simplifier le second terme de la parenthèse coefficient de Q et de le remplacer, par exemple, par $\int \frac{d\sigma}{ES}$, lorsque $\frac{d\xi}{d\sigma}$ est voisin de l'unité en tout point de l'arc.

Étude du coefficient de Q. — La parenthèse qui forme le coefficient de la poussée ne dépend que des formes de l'arc et nullement des causes agissant sur lui. Il peut être déterminé une fois pour toutes. On peut en donner une signification intéressante.

Le premier terme représente le moment d'inertie par rapport à Ox d'un système de masses fictives égales à $\frac{d\sigma}{EI}$ et attribuées aux points milieux des éléments d'arc infiniment petits $d\sigma$. C'est ce que l'on peut appeler, par abréviation, le moment d'inertie par rapport à Ox de la fibre moyenne.

Pour tenir compte du second terme, désignons par r le rayon de gyration de la section transversale correspondant au point $G(\xi, \eta)$, milieu de l'élément d'arc $d\sigma$. Par le point G traçons la normale à la fibre moyenne, ses coefficients angulaires étant $-\frac{d\eta}{d\sigma}$

Fig. 101.



et $\frac{d\xi}{d\sigma}$. Puis prenons sur cette normale deux points R et R' tels que $GR = GR' = r$, et attribuons-leur des masses fictives égales à $\frac{d\sigma}{2EI}$, comme si la matière fictive dont il s'agit était répartie

sur les deux lignes décrites par les points R et R', au lieu de l'être sur la fibre moyenne. Le moment d'inertie de ces deux masses fictives par rapport à une parallèle à Ox menée par leur centre de gravité G sera précisément

$$\frac{d\sigma}{EI}\left(r\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 = \frac{d\sigma}{ES}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2.$$

Leur moment d'inertie par rapport à Ox sera

$$\frac{d\sigma}{EI}\left[\eta^2 + \left(r\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2\right],$$

de sorte que le coefficient de Q sera en définitive le moment d'inertie de toutes ces masses fictives distribuées sur les courbes (R) et (R'). Pour abréger, on peut dire que c'est le moment d'inertie de la poutre par rapport à Ox.

Bien entendu, il ne faut voir là qu'une indication théorique permettant, le cas échéant, d'appliquer les résultats de la théorie des moments d'inertie. En pratique, il sera généralement plus simple de laisser la seconde intégrale sous sa forme primitive.

Nous n'avons rien à dire sur les procédés à employer pour le calcul numérique des deux intégrales. Mais si l'on veut recourir à des procédés graphiques, on pourra procéder ainsi qu'il suit :

Après avoir divisé l'arc de la fibre moyenne en éléments plus ou moins petits $d\sigma$, on construira le réseau des droites (η) en menant par le milieu des éléments $d\sigma$ des parallèles à la corde Ox. Puis on construira, avec une distance polaire unité, sur le réseau des droites (η), un polygone funiculaire de forces fictives égales à $\frac{d\sigma}{EI}$ et parallèles à Ox. Ou bien encore, on construira un polygone funiculaire de forces fictives égales à $d\sigma$ avec une distance polaire variable égale à EI. Les côtés successifs de ce polygone funiculaire découperont sur Ox des segments représentant les valeurs des quantités $\frac{\eta\, d\sigma}{EI}$ et en traceront l'échelle intégrale qui, en particulier, fournira la valeur de $\int \frac{\eta\, d\sigma}{EI}$.

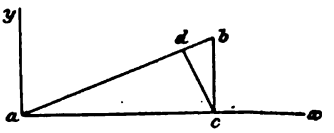
En construisant sur le même réseau des droites (η) un second polygone funiculaire correspondant aux forces fictives $\frac{\eta\, d\sigma}{EI}$, et avec une distance polaire unité, on obtiendra de même l'échelle

intégrale des quantités $\frac{\eta^2 d\sigma}{EI}$ et l'on en déduira, en particulier, la valeur de l'intégrale $\int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI}$.

C'est là du reste le procédé ordinaire employé pour la détermination du moment d'inertie des masses fictives $\frac{d\sigma}{EI}$ attribuées à la fibre moyenne.

En ce qui concerne la seconde intégrale $\int \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 \frac{d\sigma}{ES}$, si l'on ne juge pas pouvoir se contenter d'une valeur approchée basée sur la connaissance de la valeur moyenne de S, on commencera par calculer les valeurs des quantités $\frac{d\sigma}{ES} = d\lambda$ qu'on aura à réduire ensuite dans le rapport $\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2$, avant d'en faire la sommation. Voici un moyen assez simple pour parvenir à cette réduction. On tracera un vecteur ab, égal à $d\lambda$, et parallèle à la tangente à la fibre

Fig. 102.



moyenne au point G ($\xi\eta$). En le projetant sur deux directions parallèles à Ox et Oy respectivement, on obtiendra d'abord

$$ac = d\lambda \times \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right),$$

$$cb = d\lambda \quad \left(\frac{dy}{d\sigma}\right).$$

En abaissant du point C la perpendiculaire cd sur ab, on aurait

$$ad = d\lambda \times \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2.$$

On aurait, par surcroît,

$$db = d\lambda \times \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2,$$

$$cd = d\lambda \times \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right) \times \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right):$$

Bien entendu, on pourra procéder à grands coups, en prenant

des $d\sigma$ relativement grands, puisqu'il ne s'agit que d'un terme correctif dont une valeur approchée suffit.

Ligne d'influence de la partie principale de la poussée. — Nous supposerons d'abord que l'on néglige le dernier terme du second membre de l'équation qui donne la poussée Q. Alors Q est le quotient de l'intégrale $\int \frac{\mu\eta\, d\sigma}{EI}$ par le coefficient déterminé plus haut. C'est le résultat ainsi obtenu que l'on appellera la *partie principale de la poussée.*

On voit qu'à un facteur constant près elle est égale à l'intégrale

$$\int \frac{\mu\eta\, d\sigma}{EI}.$$

Quand on suppose qu'on a affaire à une charge unique, P, égale à l'unité, μ est, *par rapport aux axes* G_0X *et* G_0Y, la fonction particulière dont nous nous sommes maintes fois occupés, et la ligne d'influence de l'intégrale s'obtiendra, comme nous le savons, en construisant sur le réseau des droites (X), *verticales menées par les milieux des éléments d'arcs* $d\sigma$, un polygone funiculaire de forces fictives égales à $\frac{\eta\, d\sigma}{EI}$, et en rapportant ce polygone à sa corde.

Or les éléments, ou forces fictives, $\frac{\eta\, d\sigma}{EI}$ sont connus, puisqu'ils ont déjà servi à la détermination du coefficient de Q. Rien n'est donc plus facile que de tracer cette ligne d'influence.

Ligne d'influence du terme correctif de la poussée. — Ce terme n'a généralement aucune importance. Cependant, si l'on veut en tenir compte, nous indiquerons, pour être complet, un moyen assez simple de le faire.

Rappelons que, dans le cas où l'on a affaire à une charge unique P, égale à l'unité agissant suivant la verticale α, la quantité $\frac{d\mu}{dX}$ a pour valeur :

Pour $o < \xi < \alpha$,

$$\frac{d\mu}{dX} = \frac{l-\alpha}{l};$$

Pour $\alpha < \xi < l$,

$$\frac{d\mu}{dX} = -\frac{\alpha}{l}.$$

Par suite, toute intégrale de la forme

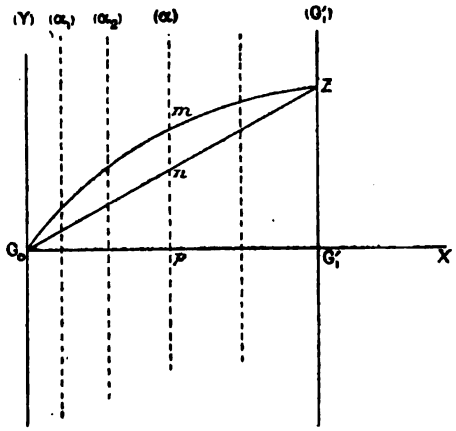
$$\int \frac{d\mu}{dX}\, dz,$$

dans laquelle z est indépendant de α, peut s'écrire

$$\frac{l-\alpha}{l}\int_0^{\alpha} dz - \frac{\alpha}{l}\int_{\alpha}^{l} dz = \int_0^{\alpha} dz - \frac{\alpha}{l}\int_0^{l} dz.$$

Supposons qu'on ait construit sur OY l'échelle intégrale de dZ, et qu'on ait construit le réseau des verticales (α), on pourra tracer par points la courbe intégrale $G_0 mz$ qui, pour chaque valeur de α, représente, par son ordonnée pm, la valeur de l'intégrale $\int_0^{\alpha} dz$.

Fig. 103.



L'intégrale $\int_0^{l} dz$ sera représentée par l'ordonnée extrême $G'_1 z$ sur la verticale (G_1), pour laquelle $\alpha = l$, et l'on aura évidemment

$$\frac{\alpha}{l}\int_0^{l} dz = pn.$$

Par suite, *pour chaque valeur de* α, *l'intégrale donnée est représentée par l'ordonnée nm de la courbe intégrale* $G_0 mZ$, *rapportée à sa corde*. Cette courbe intégrale rapportée à sa corde est donc la ligne d'influence de l'intégrale.

Dans le cas actuel, on a donc à construire la courbe intégrale de la quantité $\frac{dY}{d\sigma} \times \frac{d\xi}{d\sigma} \times \frac{d\sigma}{ES}$.

Les quantités $\frac{d\sigma}{ES} = d\lambda$ étant supposées calculées, on aura à les réduire d'abord dans le rapport $\frac{d\xi}{d\sigma}$, comme on l'a fait précédemment, puis à les réduire de nouveau dans le rapport $\frac{dY}{d\sigma}$ par un procédé tout semblable.

La ligne d'influence de la poutre principale de la poussée pourra alors subir les légères corrections jugées utiles. Elles seront généralement sans importance, le facteur $\frac{dY}{d\sigma}$ étant positif dans une région de la poutre et négatif dans l'autre.

Autres lignes d'influence. Courbe des intersections. — Une fois en possession de la ligne d'influence de la poussée, on pourra l'utiliser pour trouver la valeur de Q correspondant à un système de charges quelconques, et en déduire la courbe des pressions relatives à ce système de charges.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il sera avantageux de déterminer les valeurs de Q pour un certain nombre de positions d'une charge mobile égale à l'unité, de tracer les courbes de pressions relatives à ces différentes positions et d'en déduire la fatigue dans les différentes sections que l'on désire étudier, ou encore les moments fléchissants, efforts normaux, efforts tranchants, etc. On obtiendra ainsi les éléments de toutes les lignes d'influence que l'on voudra, et il convient de remarquer à nouveau que les courbes de pression, dans le cas d'une charge isolée, sont toujours composées de deux droites se coupant sur la verticale de la charge et passant par les points d'appui G_0 et G_1.

On envisage souvent, pour résumer et conserver les résultats, ainsi que pour faciliter les interpolations ultérieures, la courbe lieu des points où la verticale de la charge mobile est rencontrée par les deux droites qui constituent la courbe des pressions. On l'appelle la *courbe des intersections*. Quand on l'a tracée, par la construction directe d'un certain nombre de ses points, elle fournit tous les points intermédiaires et il est assez commode de s'en servir ensuite pour tracer la courbe des pressions relatives à une position intermédiaire de la charge. Il suffit de joindre aux extré-

mités G_0 et G_1 le point qui se trouve sur la verticale de cette charge.

Mais cette construction fait un peu double emploi avec celle de la ligne d'influence de Q, qui à elle seule est suffisante et qui demeure la construction fondamentale.

Effet de la température. — Supposons, pour préciser les idées, qu'il s'agisse d'une élévation de température provoquant dans le métal de l'arc un allongement τ par unité de longueur.

La réaction d'appui est encore une force Q agissant suivant la corde G_0G_1, et l'on a

$$M = -Qy,$$
$$N = Q\frac{dx}{ds},$$

D'autre part, la troisième équation de déformation doit être complétée par le terme $\tau(x_1 - x_0)$.

Le premier membre de cette équation étant toujours nul, elle donne

$$Q\left[\int \frac{\eta^2\, d\sigma}{EI} + \int \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 \frac{d\sigma}{ES}\right] = \tau(x_1 - x_0).$$

Le coefficient de Q est le même que précédemment et il n'y a rien de spécial à dire du second membre, qui est aussi simple que possible.

On remarquera simplement que, dans ce cas, la courbe des pressions, d'où se déduiront le moment fléchissant, l'effort normal, etc., dans les différentes sections transversales, se réduit à la ligne des appuis G_0G_1.

Effet d'un rapprochement des appuis. — Supposons qu'on impose aux appuis un rapprochement tel que $u_1 - u_0$ subisse une variation donnée $(-\delta)$, et qu'on veuille en apprécier l'effet. On opérera exactement de même et l'on trouvera la même équation, le second membre étant simplement remplacé par δ.

Déformation. — Il n'y a rien de spécial à ajouter à la théorie générale. La ligne élastique, ou courbe représentative des déplacements verticaux v, s'obtiendra en construisant sur le réseau des

droites (ξ) un polygone funiculaire des charges fictives

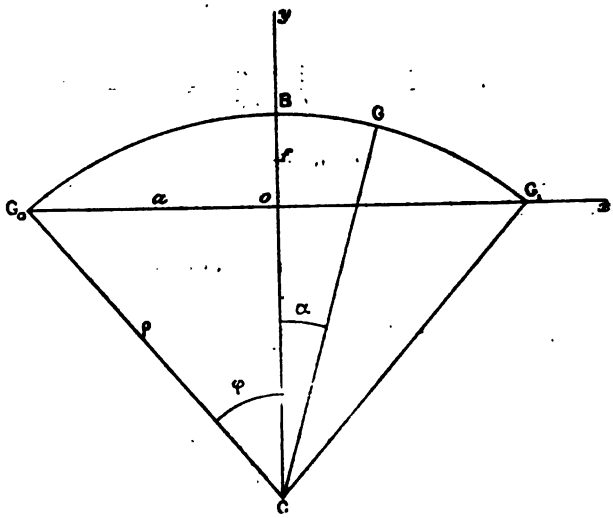
$$\frac{M\,d\xi}{EJ} = \frac{M\,d\sigma}{EI}.$$

Remarque générale sur les arcs à appuis de niveau. — Dans ce cas, il n'y a plus de distinction à faire entre les deux systèmes d'axes Oxy et OXY, ce qui procure quelques simplifications évidentes.

Cas particulier d'un arc a fibre moyenne circulaire, a appuis de niveau et a section constante. Résultats de Bresse. — On peut, dans ce cas, mettre $\frac{I}{EI}$ en facteur commun dans toutes les intégrales qui figurent dans les équations de déformation, sauf à multiplier par $r^2 = \frac{I}{S}$ celles de ces intégrales qui renferment S.

D'autre part, on peut trouver les expressions analytiques de

Fig. 104.



toutes ces intégrales. En prenant pour axes coordonnés la corde de l'arc et la perpendiculaire élevée en son milieu, et en désignant par ρ le rayon du cercle, a sa demi-corde, f sa flèche (ou montée), par φ le demi-angle au centre, et enfin par α l'angle au centre $\widehat{BCG}$, qui définit le point courant $G(\xi\eta\sigma)$, on a les formules sui-

vantes :

$$OG_1 = a = \rho \sin\varphi, \qquad \sigma = \rho\alpha, \qquad d\sigma = \rho\, d\alpha,$$
$$OB = f = \rho(1 - \cos\varphi), \qquad \xi = \rho \sin\alpha, \qquad d\xi = \rho \cos\alpha\, d\alpha,$$
$$\eta = \rho(\cos\alpha - \cos\varphi), \qquad d\eta = -\rho \sin\alpha\, d\alpha.$$

Toutes les quantités figurant dans les intégrales peuvent donc s'exprimer en fonction de la seule variable α. Bresse a effectué ces intégrations pour divers cas de surcharges et dressé des Tables qui ramènent les calculs à effectuer à leur plus simple expression.

Nous résumerons son analyse ainsi qu'il suit :

a) *Cas d'une charge isolée* $P = 1$ *agissant suivant la verticale d'abscisse* $u = ma = \rho \sin\theta$. — En désignant par C et c les deux termes du second membre de l'équation fournissant la poussée, et par D et d les deux termes du coefficient de la poussée, on obtient pour celle-ci une expression de la forme

$$Q = \frac{C - c}{D + d} = \frac{C}{D} \times \frac{1 - \frac{c}{C}}{1 + \frac{d}{D}}.$$

L'expression $\frac{C}{D}$ est ce que Bresse appelle la *partie principale de la poussée*. C'est le résultat que l'on obtiendrait si l'on négligeait les deux termes c et d, introduits par la considération de l'effort normal. Le multiplicateur

$$\frac{1 - \frac{c}{C}}{1 + \frac{d}{D}}$$

a le caractère d'un coefficient de correction toujours plus petit que l'unité.

Effectuons le calcul de ces différents termes. Nous trouvons d'abord

$$\begin{aligned} D &= \int_{-\varphi}^{+\varphi} \rho^3 (\cos\alpha - \cos\varphi)^2\, d\alpha \\ &= \rho^3 \left[\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} - 2\cos\varphi \sin\alpha + \alpha \cos^2\varphi\right]_{-\varphi}^{+\varphi} \\ &= \rho^3 [\varphi(1 + 2\cos^2\varphi) - 3 \sin\varphi \cos\varphi], \end{aligned}$$

$$d = r^2 \int_{-\varphi}^{+\varphi} \rho \cos^2\alpha\, d\alpha = r^2 \rho \left[\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}\right]_{-\varphi}^{+\varphi} = r^2 \rho [\varphi + \sin\varphi \cos\varphi].$$

Ensuite, en tenant compte de ce que l'on a, pour μ et $\frac{d\mu}{dx}$, les expressions

$$\mu = \frac{a-u}{2a}(a+x) = \rho\,\frac{\sin\varphi - \sin\theta}{2\sin\varphi}(\sin\varphi + \sin\alpha)$$

et

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\sin\varphi - \sin\theta}{2\sin\varphi} \qquad \text{entre } -\varphi \text{ et } \theta,$$

$$\mu = \frac{a+u}{2a}(a-x) = \rho\,\frac{\sin\varphi + \sin\theta}{2\sin\rho}(\sin\varphi - \sin\alpha)$$

et

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{\sin\varphi + \sin\theta}{2\sin\varphi} \qquad \text{entre } \theta \text{ et } \varphi,$$

on trouve

$$C = \rho^3\left[\frac{\sin^2\varphi - \sin^2\theta}{2} + \cos\varphi(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\right],$$

$$c = r^2\rho\left[\frac{\sin^2\varphi - \sin^2\theta}{2}\right].$$

En ce qui concerne la partie principale de la poussée $\frac{C}{D}$, on voit que c'est une fonction des deux angles φ et θ, seulement. Bresse en a donné une Table très complète en fonction de φ et du rapport $\frac{\theta}{\varphi}$. M. Résal a remanié ces Tables en prenant pour plus de commodité les deux arguments φ et $m = \frac{u}{a} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$.

On peut développer $\frac{D}{\rho^3}$ et $\frac{C}{\rho^3}$ [illegible] séries procédant suivant les puissances de $\sin\varphi$ et dont les coefficients soient exprimés en fonction du rapport m. Il suffit d'utiliser les développements de l'arc et du cosinus en fonction du sinus.

Ces développements sont

$$\cos z = 1 - \frac{\sin^2 z}{2} - \frac{\sin^4 z}{8} - \frac{\sin^6 z}{16}\ldots,$$

$$z = \sin z + \frac{\sin^3 z}{6} + \frac{3\sin^5 z}{40} - \frac{15}{336}\sin^7 z + \ldots.$$

Les premiers termes du développement de $\frac{D}{\rho^3}$ sont

$$\frac{D}{\rho^3} = \frac{4}{15}\sin^5\varphi + \frac{6}{35}\sin^7\varphi + \ldots.$$

Ceux du développement de $\frac{C}{\rho^3}$ sont

$$\frac{C}{\rho^3} = \sin^4\varphi\left[\frac{1-m^2}{4} - \frac{1-m^4}{24}\right] - \sin^6\varphi\left[\frac{1-m^2}{16} + \frac{1-m^4}{48} - \frac{3}{240}(1-m^6)\right] + \ldots.$$

On reconnaît ainsi que la partie principale de la poussée tend vers l'infini lorsque φ tend vers zéro, c'est-à-dire pour des arcs infiniment surbaissés, et qu'on peut la mettre sous la forme

$$\frac{C}{D} = \frac{q_0}{\sin\varphi},$$

q_0 étant une fonction de φ et de m, qui demeure finie pour $\varphi = 0$. On peut la mettre encore sous la forme équivalente

$$\frac{C}{D} = \frac{a}{f} \times q_0$$

en mettant en évidence non plus $\sin\varphi$, mais $\frac{f}{a} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, qui représente le rapport de la flèche à la demi-portée de l'arc. Dans ces conditions, q_0 est une fonction de φ et de m, qui est peu variable avec φ et dont on peut trouver facilement les limites pour $\varphi = 0$ et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Pour $\varphi = 0$, on a en effet à la limite $\sin\varphi = \frac{2f}{a}$, de sorte que l'on a

$$q_0 = \frac{15}{8}\left[\frac{1-m^2}{4} - \frac{1-m^4}{24}\right] = \frac{5}{64}(1-m^2)(5-m^2).$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on n'a qu'à se reporter aux expressions primitives de C et D, dans lesquelles on doit faire $\sin\varphi = 1$ et $\cos\varphi = 0$, et l'on trouve, en tenant compte d'ailleurs de $\frac{a}{f} = 1$,

$$q_0 = \frac{1-m^2}{\pi}.$$

La Table ci-après (Tableau n° 1) fournit les valeurs de q_0 pour une série de valeurs du surbaissement $\frac{f}{a}$. On y constate que cette

fonction est peu variable avec le surbaissement, et cela est de nature à faciliter les interpolations.

En ce qui concerne le coefficient de correction $1 - \frac{c}{C}$, Bresse a démontré que, dans les conditions ordinaires de la pratique, on pouvait se dispenser d'en tenir compte. Il est, en effet, de la forme

$$1 - \frac{r^2}{\rho^2} \frac{\sin^2\varphi \left(\frac{1-m^2}{2}\right)}{\sin^4\varphi \left[\frac{1-m^2}{4} - \frac{1-m^4}{24} + \ldots\right]} = 1 - \frac{r^2}{a^2}\lambda,$$

λ étant une fonction de m et de $\sin\varphi$, qui ne devient infinie pour aucune valeur de φ, pas même $\varphi = 0$.

Pour la valeur limite $\varphi = 0$, on a pour λ la valeur limite

$$\lambda = \frac{\frac{1-m^2}{2}}{\frac{1-m^2}{4} - \frac{1-m^4}{24}}$$

qui est égale à 2,4 pour $m = 0$ et à 3 pour $m = 1$.

Pour la valeur limite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a, en faisant $\cos\varphi = 0$ dans l'expression générale de C, la valeur $\lambda = 1$, quel que soit m.

D'autre part, $\frac{r^2}{a^2}$ n'atteint jamais 0,0025 et reste presque toujours inférieur à 0,001. L'erreur relative commise en remplaçant par l'unité le binome $1 - \frac{r^2}{a^2}\lambda$ n'atteint jamais 0,0075 et reste presque toujours inférieur à 0,003.

Dans le cas où l'on ne voudrait pas négliger complètement cette correction, Bresse a fait remarquer que, pour une valeur donnée de φ, la valeur de λ varie assez peu avec m, et qu'il est légitime d'adopter une valeur moyenne, dont il a calculé une Table.

En ce qui concerne enfin le coefficient de correction $1 + \frac{d}{D}$, il ne dépend que de φ et acquiert une certaine importance pour de faibles valeurs de φ. Si l'on prend les premiers termes des développements de d et D par rapport à $\sin\varphi$, on voit facilement que, pour la limite $\varphi = 0$, on a

$$\frac{d}{D} = \frac{r^2}{\rho^2} \frac{2\sin\varphi}{\frac{1}{15}\sin^3\varphi} = \frac{r^2}{a^2} \times \frac{15}{8}\frac{a^2}{f^2} = \frac{r^2}{f^2} \times \frac{15}{8}.$$

Quelle que soit la petitesse de $\frac{r^2}{a^2}$, cette expression tend donc vers l'infini pour $f = 0$, et l'expression du binome de correction est pour f très petit de la forme

$$1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon,$$

la fonction ε ayant une valeur voisine de $\frac{15}{8}$.

Pour la limite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, le binome de correction a d'ailleurs pour valeur exacte

$$1 + \frac{r^2}{\rho^2} = 1 + \frac{r^2}{f^2},$$

de sorte que, si l'on adopte pour ce binome la forme générale

$$1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon,$$

la fonction ε va en décroissant de $\frac{15}{8}$ pour $\varphi = 0$ à 1 pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

En résumé, et en rétablissant le facteur P, pour donner à la formule toute sa généralité, l'expression de la poussée est

$$Q = P \times \frac{a}{f} \times q_0 \times \frac{1}{1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon}.$$

Les valeurs de q_0 et de ε étant données par la Table n° 1 ci-après, en fonction de $\frac{f}{a}$ et de $m = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$.

Quel que soit r, pour f diminuant indéfiniment, on a $\lim Q = 0$, par suite de l'influence prépondérante du terme correctif.

b) *Cas d'une charge p uniformément répartie sur la corde de l'arc.* — On peut encore mettre Q sous la forme

$$Q = \frac{C}{D}\,\frac{1 - \frac{c}{C}}{1 + \frac{d}{D}}.$$

Le coefficient de correction conservera la même forme que précédemment. D'ailleurs ici $\frac{c}{C}$ ne dépend que de φ et, si l'on veut

en tenir compte, on aura à lui attribuer la valeur moyenne calculée par Bresse.

Quant à la partie principale de la poussée, on peut l'obtenir en intégrant la formule précédemment trouvée pour C. Mais on peut encore plus simplement recommencer le calcul de C, en tenant compte de ce que l'on a, cette fois, pour $p = 1$,

$$p = \frac{a^2 - x^2}{2} = \frac{\rho^2}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha).$$

On trouve facilement

$$C = \int_{-\varphi}^{+\varphi} \mu\eta\, d\sigma = \frac{\rho^4}{2}\left[\frac{4}{3}\sin^3\varphi + \varphi\cos\varphi(1 - 2\sin^2\varphi) - \sin\varphi\cos^2\varphi\right].$$

On peut adopter pour le rapport $\frac{C}{D}$ une expression de la forme

$$\frac{C}{D} = \frac{a^2}{2f} \times Q_0$$

et reconnaître l'étendue des variations de Q_0 entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Pour la limite $\varphi = 0$, on peut développer C et D en fonction de $\frac{f}{a} = \text{tang}\,\frac{\varphi}{2}$, et Bresse a trouvé ainsi un développement qui équivaut au suivant :

$$Q_0 = 1 - \frac{1}{7}\frac{f^2}{a^2} - \frac{2}{147}\frac{f^4}{a^4} + \frac{34}{377}\frac{f^6}{a^6}.$$

On a donc pour $\varphi = 0$ la valeur $Q_0 = 1$.

D'autre part, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{C}{D}$ se réduit à

$$p \times \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2f} \times \frac{8}{3\pi} = \frac{a^2}{2f} \times 0{,}849.$$

On a donc $Q_0 = 0{,}849$.

La fonction Q_0 est donc lentement variable avec φ, ou avec $\frac{f}{a}$. On peut d'ailleurs remarquer que le développement ci-dessus de Q_0 en fonction de $\frac{f}{a}$, en fournit toujours des valeurs très appro-

chées, même pour $\frac{f}{a} = 1$. En effet, en le réduisant à ses deux premiers termes, on trouve 0,857, et, en prenant les trois premiers termes, on trouve 0,844. L'erreur relative est très faible.

Quoi qu'il en soit, la Table n° 1 fournit les valeurs de Q_0 pour diverses valeurs de l'argument $\frac{f}{a}$, et la formule à employer pour le calcul de la poussée est, dans ces conditions,

$$Q = p\,\frac{a^2}{2f}\,Q_0\,\frac{1}{1+\frac{r^2}{f^2}\varepsilon}.$$

c. Cas d'une élévation de température ou de toute autre cause produisant un allongement τ par unité de longueur de la corde de l'arc. — On a, dans ce cas, l'équation

$$Q[D+d] = 2EI\tau \times a,$$

d'où

$$Q = EI\tau\,\frac{2a}{D} \times \frac{1}{1+\frac{d}{D}} = EI\tau \times \frac{2a}{D} \times \frac{1}{1+\frac{r^2}{f^2}\varepsilon}.$$

Si l'on compare l'expression $\frac{2a}{D}$ avec l'expression $\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{D} = \frac{\varepsilon}{f^2}$, on voit facilement qu'elles ont pour rapport $\frac{2\sin\varphi}{\varphi+\sin\varphi\cos\varphi}$. Ce rapport est égal à l'unité pour $\varphi = 0$ et égal à $\frac{4}{\pi} = 1,273$ pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

On aurait donc un résultat sensiblement exact pour de faibles valeurs de φ et un résultat un peu trop faible pour des valeurs plus grandes, en adoptant pour Q l'expression

$$Q = EI\tau \times \frac{\varepsilon}{f^2} \times \frac{1}{1+\frac{r^2}{f^2}\varepsilon} = EI\tau\,\frac{\varepsilon}{f^2+r^2\varepsilon}.$$

On aura une erreur en sens contraire si, à la place de ε, on substitue sa valeur limite supérieure, égale à $\frac{15}{8}$.

Finalement, Bresse a proposé la formule simplifiée

$$Q = EI\tau\,\frac{15}{8f^2+15r^2}.$$

Il a montré, par des exemples numériques, que cette formule simplifiée donnait toujours des résultats suffisamment exacts. Elle est très approchée lorsque $\frac{f}{a}$ est petit, et l'erreur qu'elle entraîne lorsque $\frac{f}{a}$ est grand devient sans importance, parce qu'alors Q devient petit par rapport aux poussées dues aux charges. Il n'y a, d'ailleurs, qu'un intérêt secondaire à avoir une formule rigoureuse, alors que τ a une valeur peu précisée en général.

La Table ci-dessous donne quelques valeurs de la fonction $\frac{2af^2}{D} = K$, qui permet d'écrire d'une manière générale

$$Q = EI\tau \frac{k}{f^2} \times \frac{1}{1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon}.$$

d. Déplacement vertical de la clef dans le cas d'une surcharge uniformément répartie p sur la corde de l'arc. — Bresse a donné une formule approximative qui peut s'écrire

$$-EI\nu = 1,56 p \rho^2 r^2 \left(1 + 0,0122 \frac{f^4}{a^2 r^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}}.$$

Cette formule est assez exacte jusqu'à $\varphi = 45°$. Pour $\varphi = 90°$, l'erreur relative par excès peut atteindre 40 pour 100.

Tableau *pour le calcul des poussées des arcs articulés, circulaires et à section constante.*

Valeurs de			Valeurs de q_0 pour										Valeurs de Q_0''
$\frac{f}{a}$	ε	K	$m=0,0$	$m=0,1$	$m=0,2$	$m=0,3$	$m=0,4$	$m=0,5$	$m=0,6$	$m=0,7$	$m=0,8$	$m=0,9$	
0,00	1,875	1,875	0,3906	0,3859	0,3720	0,3491	0,3176	0,2783	0,2320	0,1797	0,1226	0,0622	1,0000
0,10	»	»	0,3898	0,3851	0,3712	0,3484	0,3172	0,2780	0,2319	0,1796	0,1226	0,0622	0,9986
0,15	»	»	0,3888	0,3841	0,3703	0,3477	0,3166	0,2776	0,2317	0,1795	0,1226	0,0622	0,9968
0,20	1,733	1,778	0,3874	0,3828	0,3691	0,3466	0,3158	0,2770	0,2313	0,1794	0,1226	0,0622	0,9943
0,25	»	»	0,3856	0,3810	0,3675	0,3452	0,3147	0,2763	0,2309	0,1792	0,1225	0,0622	0,9910
0,30	»	»	0,3833	0,3788	0,3655	0,3435	0,3134	0,2753	0,2303	0,1789	0,1225	0,0622	0,9870
0,35	»	»	0,3807	0,3763	0,3632	0,3415	0,3118	0,2742	0,2297	0,1786	0,1224	0,0622	0,9823
0,40	1,533	1,677	0,3777	0,3734	0,3606	0,3393	0,3100	0,2729	0,2288	0,1782	0,1223	0,0622	0,9768
0,45	»	»	0,3744	0,3701	0,3576	0,3367	0,3079	0,2714	0,2278	0,1777	0,1222	0,0622	0,9705
0,50	»	»	0,3707	0,3665	0,3543	0,3338	0,3055	0,2697	0,2267	0,1772	0,1220	0,0622	0,9634
0,55	»	»	0,3667	0,3626	0,3505	0,3307	0,3029	0,2677	0,2254	0,1765	0,1218	0,0622	0,9557
0,60	1,336	1,583	0,3625	0,3585	0,3467	0,3272	0,3000	0,2655	0,2239	0,1757	0,1215	0,0622	0,9471
0,65	»	»	0,3578	0,3539	0,3425	0,3234	0,2968	0,2630	0,2222	0,1747	0,1211	0,0622	0,9376
0,70	»	»	0,3530	0,3492	0,3379	0,3193	0,2934	0,2604	0,2202	0,1735	0,1206	0,0622	0,9273
0,75	»	»	0,3478	0,3440	0,3331	0,3150	0,2897	0,2574	0,2181	0,1722	0,1200	0,0621	0,9162
0,80	1,138	1,420	0,3424	0,3388	0,3282	0,3105	0,2858	0,2542	0,2157	0,1707	0,1193	0,0620	0,9045
0,85	»	»	0,3368	0,3332	0,3229	0,3057	0,2816	0,2507	0,2130	0,1689	0,1184	0,0618	0,8917
0,90	»	»	0,3309	0,3274	0,3175	0,3006	0,2771	0,2469	0,2102	0,1669	0,1173	0,0614	0,8780
0,95	»	»	0,3248	0,3213	0,3118	0,2952	0,2723	0,2429	0,2070	0,1647	0,1160	0,0610	0,8637
1,00	1,000	1,273	0,3183	0,3151	0,3059	0,2897	0,2674	0,2387	0,2037	0,1623	0,1146	0,0605	0,8488

2° Cas particulier d'un arc articulé a fibre moyenne parabolique et a section réduite constante. — L'équation de la fibre moyenne, rapportée à la corde et à l'axe de symétrie, est

$$y = f\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

D'autre part, on suppose que l'on a

$$J = I\frac{d\xi}{d\sigma} = \text{const.}$$

et

$$S\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{J}{r^2} = \text{const.}$$

On peut alors, dans toutes les intégrales, remplacer $d\sigma$ par $d\xi$, et l'on obtient les résultats suivants :

En mettant encore l'équation donnant la poussée sous la forme

$$Q(D + d) = C,$$

d'où

$$Q = \frac{C}{D}\frac{1}{1 + \frac{d}{D}} = \frac{C}{D}\frac{1}{1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon},$$

on trouve,

$$D = \int_{-a}^{+a} \eta^2\, d\xi = \frac{16}{15} f^2 a,$$

$$\frac{1}{r^2} d = \int_{-a}^{+a} \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 d\xi = \int_{-a}^{+a} \frac{d\xi}{1 + \frac{4f^2\xi^2}{a^4}} = \frac{a^2}{f}\varphi,$$

en posant

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{2f}{a}.$$

On en déduit d'abord, pour la fonction $\varepsilon = \frac{f^2}{r^2}\frac{d}{D}$, la valeur assez simple $\varepsilon = \frac{15}{8} \times \frac{a\varphi}{2f}$, facile à calculer dans chaque cas, et remplaçable pour les arcs surbaissés par sa valeur limite $\frac{15}{8}$.

On trouve ensuite, dans le cas d'une charge isolée $P = 1$ agissant suivant la verticale d'abscisse $u = ma$, que le second membre C a la valeur

$$C = \int \mu\eta\, d\xi = \frac{fa^2}{12}(1 - m^2)(5 - m^2).$$

La valeur principale de la poussée est donc

$$\frac{C}{D} = \frac{a}{f} \times q_0,$$

en posant

$$q_0 = \frac{5}{64}(1 - m_2)(5 - m^2).$$

Autrement dit, q_0 ne dépend pas du surbaissement $\frac{f}{a}$ et garde la valeur limite trouvée pour les arcs circulaires.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie sur la corde de l'arc, la partie principale de la poussée $\frac{C}{D}$ sera simplement égale à la valeur limite $p\frac{a^2}{2f}$ trouvée précédemment, quel que soit le surbaissement.

Dans le cas d'un allongement τ dû à la température, on aura encore

$$Q = EI\tau\frac{k}{f^2} \times \frac{1}{1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon},$$

la fonction k ayant la valeur constante

$$k = \frac{2af^2}{D} = \frac{15}{8},$$

quel que soit le surbaissement.

III. — Arcs encastrés aux naissances.

Définition. — Par hypothèse, les appuis G_0 et G_1 sont de position invariable et de nature telle que les déformations angulaires ω_0 et ω_1 aux deux extrémités de l'arc sont nulles.

Dans ces conditions, les premiers membres des trois équations de déformation appliquées à l'arc entier sont nuls, *quels que soient d'ailleurs les axes coordonnés choisis.*

Ces équations se réduisent à

$$\int \frac{M\,d\sigma}{EI} = 0,$$

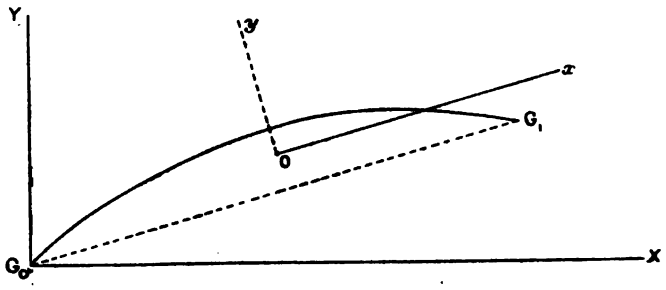
$$\int \frac{M}{EI}\xi\,d\sigma + \int \frac{N}{ES}\frac{d\eta}{d\sigma}\,d\sigma = 0,$$

$$\int \frac{M}{EI}\eta\,d\sigma - \int \frac{N}{ES}\frac{d\xi}{d\sigma}\,d\sigma = 0.$$

D'autre part, les réactions complémentaires d'appui, qui sont

toujours deux forces égales et directement opposées, ne passent plus nécessairement par les points d'appui. Il faut envisager, pour

Fig. 105.



définir la réaction complémentaire de l'appui de gauche, ses trois composantes A, B et Q, cette dernière composante portant encore le nom de poussée.

Équations générales fournissant les composantes A, B, Q de la réaction complémentaire d'appui. — Laissant indéterminés les axes coordonnés Oxy, on a d'une manière générale

$$M = \mu + A + Bx - Qy,$$
$$N = \frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{ds} + Q\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations de déformation écrites plus haut, on trouve, après groupement des termes

$$(1)\qquad A\int\frac{d\sigma}{EI} + B\int\frac{\xi\,d\sigma}{EI} - Q\int\frac{\eta\,d\sigma}{EI} = -\int\frac{\mu\,d\sigma}{EI},$$

$$(2)\qquad A\int\frac{\xi\,d\sigma}{EI} + B\left[\int\frac{\xi^2\,d\sigma}{EI} + \int\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2\frac{d\sigma}{ES}\right]$$
$$- Q\left[\int\frac{\xi\eta\,d\sigma}{EI} - \int\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ES}\right]$$
$$= -\int\frac{\mu\xi\,d\sigma}{EI} - \int\frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{d\sigma}\frac{d\eta}{ES},$$

$$(3)\qquad A\int\frac{\eta\,d\sigma}{EI} + B\left[\int\frac{\xi\eta\,d\sigma}{EI} - \int\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{dy}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ES}\right]$$
$$- Q\left[\int\frac{\eta^2\,d\sigma}{EI} - \int\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2\frac{d\sigma}{ES}\right]$$
$$= -\int\frac{\mu\eta\,d\sigma}{EI} + \int\frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{d\tau}\frac{d\xi}{ES}.$$

Ce sont trois équations du premier degré en ABQ, qui offrent cette particularité que le déterminant des coefficients des inconnues est symétrique et ne contient que six coefficients distincts.

Il est tout indiqué de profiter de l'indétermination des axes coordonnés pour annuler trois de ces coefficients, suivant une méthode indiquée par Maurice Lévy, et de parvenir par là à la séparation des inconnues.

Supposons que l'on attribue des masses fictives égales à $\frac{d\sigma}{EI}$, aux différents éléments $d\sigma$ de la fibre moyenne, on pourra tout d'abord rendre nulles les deux intégrales

$$\int \frac{\xi\, d\sigma}{EI} \quad \text{et} \quad \int \frac{\eta\, d\sigma}{EI}$$

en choisissant pour origine le centre de gravité de ce système de masses fictives, que pour abréger on appellera *le centre de gravité de la fibre moyenne.*

Supposons ensuite que l'on attribue des masses fictives $\frac{d\sigma}{2EI}$ aux points R et R′ des deux courbes parallèles à la fibre moyenne tracées à la distance r, on reconnaîtra facilement que les coefficients entre parenthèses, de B et de Q, dans les deux dernières équations, sont les moments et le produit de ce système total par rapport aux deux axes Ox et Oy. En calculant ces coefficients par rapport à un système d'axes provisoire quelconque, on pourra en déduire la direction des axes principaux d'inertie du système et prendre ces axes comme axes coordonnés définitifs. Le produit d'inertie

$$\int \frac{\xi\eta\, d\sigma}{EI} - \int \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ES}$$

deviendra nul et les équations se réduiront aux suivantes :

$$A\int \frac{d\sigma}{EI} = -\int \frac{\mu\, d\sigma}{EI},$$

$$B\left[\int \frac{\xi^2\, d\sigma}{EI} + \int \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 \frac{d\sigma}{ES}\right] = -\int \frac{\mu\xi\, d\sigma}{EI} - \int \frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{d\sigma}\frac{d\eta}{ES},$$

$$Q\left[\int \frac{\eta^2\, d\sigma}{EI} + \int \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 \frac{d\sigma}{ES}\right] = \int \frac{\mu\eta\, d\sigma}{EI} - \int \frac{d\mu}{dX}\frac{dY}{d\sigma}\frac{d\xi}{ES}.$$

Il est à remarquer que la troisième équation, déterminant la poussée, est identique comme forme à celle que nous avons ren-

contrée pour les arcs articulés aux naissances, mais les ordonnées η ne sont plus comptées à partir de la ligne des appuis, et le second terme de la parenthèse coefficient de Q doit avoir une importance relative plus considérable.

Quant à l'équation qui donne B, elle est d'une forme analogue, les axes Ox et Oy étant simplement intervertis. On peut assez clairement conjecturer que les intégrales qui renferment S, soit dans le coefficient de B, soit dans le second membre, n'auront qu'une importance relative tout à fait insignifiante. C'est en effet ce que l'on constate toujours dans les applications.

Nous conseillons donc de les négliger toujours, ainsi que le second terme du second membre de la troisième équation, et par conséquent d'envisager seulement le groupe d'équations simplifiées

$$A\int\frac{d\sigma}{EI}=-\int\frac{\mu\,d\sigma}{EI},$$

$$B\int\frac{\xi^2\,d\sigma}{EI}=-\int\frac{\mu\xi\,d\sigma}{EI},$$

$$Q\left[\int\frac{\eta^2\,d\sigma}{EI}+\int\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2\frac{d\sigma}{ES}\right]=\int\frac{\mu\eta\,d\sigma}{EI}.$$

La réduction des équations générales à laquelle nous avons procédé est particulièrement facile lorsqu'on a affaire à un arc qui est symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de sa corde. L'intégrale

$$\int\frac{\xi\eta\,d\sigma}{EI}-\int\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ES},$$

qui représente le produit d'inertie, est nulle dès que l'origine des coordonnées est placée sur la droite de symétrie et que l'un des axes coïncide avec celle-ci. Pour compléter la réduction, il suffit donc de déterminer le centre de gravité de la fibre moyenne en prenant des axes provisoires aussi simples que possible, l'axe de symétrie et la corde de l'arc par exemple.

Nous supposerons désormais, pour simplifier, qu'il s'agit d'un arc symétrique.

Coefficients des inconnues. — Dans les équations, soit complètes, soit simplifiées, les coefficients des inconnues ne dépendent

que des formes de l'arc et nullement des causes qui agissent sur lui. Ils peuvent être déterminés une fois pour toutes.

Le coefficient de Q se déterminera comme il a été dit plus haut pour les arcs articulés, à cette différence près que les ordonnées η sont rapportées cette fois à un axe Ox passant par le centre de gravité de la fibre moyenne et seront négatives pour certaines régions de l'arc, positives pour d'autres. Dans le cas d'un arc symétrique, le polygone funiculaire qui aura servi à la détermination du centre de gravité déterminera sur la corde de l'arc l'échelle intégrale des éléments $\frac{\eta' d\sigma}{EI}$, η' étant l'ordonnée rapportée à la corde et ne différant de η que par une constante c. Il détermine d'ailleurs sur Ox l'échelle intégrale des éléments $\frac{\eta d\sigma}{EI}$, Ox étant la droite parallèle à la corde pour laquelle on a $\int \frac{\eta d\sigma}{EI} = 0$, c'est-à-dire la droite passant par le point de rencontre des côtés extrêmes du polygone funiculaire tracé. Au lieu de tracer un second polygone funiculaire avec les éléments $\frac{\eta d\sigma}{EI}$, qui ne sont pas tous de même signe, il pourra être plus avantageux de tracer le polygone funiculaire de forces fictives $\frac{\eta' d\sigma}{EI} = \frac{(\eta + c) d\sigma}{EI}$. Ce polygone déterminera en effet sur Ox l'échelle intégrale des éléments $\frac{\eta(\eta + c) d\sigma}{EI}$ et le segment compris entre ses côtés extrêmes sera l'intégrale

$$\int \frac{\eta(\eta + c) d\sigma}{EI} = \int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI} + c \int \frac{\eta d\sigma}{EI} = \int \frac{\eta^2 d\sigma}{EI};$$

on voit donc qu'on aura dans ce cas à exécuter exactement les mêmes tracés que pour un arc articulé, la seule différence consistant à relever, non plus sur la corde de l'arc, mais sur sa parallèle menée par le centre de gravité, le segment compris entre les côtés extrêmes du second polygone funiculaire, construit sur le réseau des parallèles à la corde, passant par les milieux des éléments d'arcs $d\sigma$.

En ce qui concerne le coefficient de B, on voit qu'il est le moment d'inertie des masses fictives $\frac{d\sigma}{EI}$, pris par rapport à Oy. On l'obtiendra donc par des procédés analogues, en traçant succes-

sivement sur le réseau des droites (ξ), parallèles à Oy, deux polygones funiculaires : le premier correspondant aux éléments $\frac{d\sigma}{EI}$, avec une distance polaire unité, et le second correspondant aux éléments $\frac{\xi\, d\sigma}{EI}$, dont l'échelle intégrale est fournie par le polygone précédent sur Oy. Nous retrouverons plus loin ces deux polygones funiculaires.

Enfin, le coefficient de A est simplement la somme des masses fictives $\frac{d\sigma}{EI}$. Lorsque l'on a calculé ces masses fictives, leur somme est immédiatement connue par l'échelle intégrale construite pour tracer les premiers polygones funiculaires sur les réseaux des droites (ξ) ou (η).

Lignes d'influence de A, B *et* Q. — Aux coefficients près, dont nous venons de parler, les inconnues A, B, Q sont proportionnelles aux seconds membres des équations simplifiées. Ces seconds membres sont des intégrales dans lesquelles figure la fonction μ, qui, dans le cas d'une charge unique est la fonction particulière bien connue. Les lignes d'influence des trois inconnues s'obtiendront méthodiquement au moyen de trois polygones funiculaires *tracés sur le réseau des verticales passant par les milieux des éléments d'arc* $d\sigma$.

La ligne d'influence de A, ou plus exactement celle de l'intégrale $\int \frac{\mu\, d\sigma}{EI}$, sera le polygone funiculaire des forces fictives $\frac{d\sigma}{EI}$, avec distance polaire unité.

La ligne d'influence de B, ou plus exactement celle de l'intégrale $\int \mu \frac{\xi\, d\xi}{EI}$, sera le polygone funiculaire correspondant aux forces fictives $\frac{\xi\, d\sigma}{EI}$, dont l'échelle intégrale a déjà été tracée sur Oy pour déterminer le coefficient de B.

Enfin la ligne d'influence de Q, ou plus exactement celle de l'intégrale $\int \mu \frac{\eta\, d\xi}{EI}$, sera le polygone funiculaire correspondant aux forces fictives $\frac{\eta\, d\sigma}{EI}$, dont l'échelle intégrale a déjà été tracée sur Ox par le premier polygone funiculaire employé à la détermination du coefficient de Q.

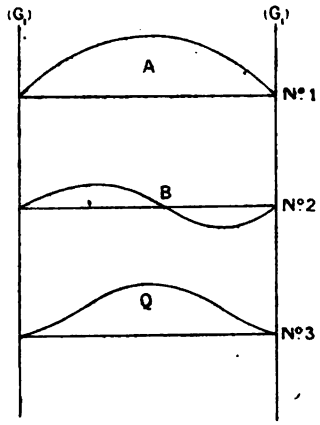
Lorsque l'arc a ses appuis de niveau et est d'ailleurs symétrique, ce qui est le cas usuel, les deux premiers de ces polygones funiculaires sont confondus avec ceux qu'on a supposés tracés pour déterminer le coefficient de B, le réseau des verticales étant dans ce cas confondu avec le réseau des droites (ξ) perpendiculaires à la corde de l'arc. Le nombre total des polygones funiculaires à construire se réduit à cinq, savoir : deux sur le réseau des droites (η) [ou (η')], pour déterminer le centre de gravité de la fibre moyenne et le coefficient de Q, deux sur le réseau des droites (ξ) pour déterminer le coefficient de B et donnant par surcroît les lignes d'influence de A et de B et enfin un cinquième, construit sur le réseau des droites (ξ) avec les forces fictives $\eta \frac{d\sigma}{EI}$, pour avoir la ligne d'influence de Q. Bien entendu, il faut encore calculer à part le second terme, ou terme correctif du coefficient de Q.

L'allure générale des lignes d'influence est facile à reconnaître à vue, d'après la forme des échelles intégrales des éléments

$$\frac{d\sigma}{EI}, \frac{\xi d\sigma}{EI}, \frac{\eta d\sigma}{EI}.$$

Sans entrer dans de longs développements à ce sujet, nous indi-

Fig. 106.



querons simplement que la ligne d'influence de A a une allure parabolique (*fig.* 106, n° 1) ci-dessus. Celle de B est une courbe en S

(*fig.* 106, n° 2) ayant une zone positive et une zone négative. Sa tangente d'inflexion correspond au point sur Oy, pour lequel on a $\xi = 0$. Celle de Q a une forme en chapeau de gendarme, ses tangentes d'inflexion correspondant aux points situés sur l'axe Ox, où l'on a $\eta = 0$.

Autres lignes d'influence. — Courbe des intersections et courbes enveloppes des réactions d'appui. — Une fois en possession des lignes d'influence des réactions complémentaires d'appui, on pourra les utiliser pour obtenir les valeurs de A, B, Q correspondant à un système de charges quelconques et pour en déduire la courbe des pressions relatives à ce système de charges.

La réaction de l'appui de gauche G_0 a pour composante horizontale Q et pour composante verticale $\frac{d\mu}{dX} + B$. Son moment par rapport à G_0 est $M_0 = A + Bx_0 - Qy_0$. Le point où elle rencontre la verticale (G_0) a pour ordonnée $\frac{M_0}{Q}$.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il sera avantageux de tracer les courbes des pressions pour un certain nombre de positions attribuées à une charge mobile unité. On parviendra ainsi à la détermination par points de toutes les lignes d'influence que l'on a intérêt à envisager, notamment celles des fatigues dans les fibres extrêmes des sections étudiées. Les courbes de pression sont naturellement toujours composées de deux portions de droites se coupant sur la verticale de la charge.

Pour résumer et conserver les résultats, et aussi pour faciliter les interpolations ultérieures, on pourra, comme dans le cas des arcs articulés, tracer à l'aide des résultats obtenus la courbe lieu des points où la verticale de la charge mobile est rencontrée par les droites constituant la courbe des pressions. C'est la courbe **dite des intersections**. On pourra aussi, dans le même ordre d'idées, tracer les courbes enveloppes des droites qui constituent les courbes de pressions, droites qui ne sont autres d'ailleurs que les lignes d'action des réactions totales d'appui. Ces courbes valables, l'une pour les réactions de gauche, l'autre pour les réactions de droite, s'appellent *lignes enveloppes* des réactions d'appui. Quand on a tracé ces trois courbes, à l'aide d'un certain nombre de courbes de pressions, elles fournissent facilement tous

les résultats intermédiaires désirables. Pour une position intermédiaire de la charge, on obtient la courbe des pressions, ou les lignes d'action des réactions totales des appuis, en prenant sur la verticale de la charge le point de la courbe des intersections et en menant par ce point des tangentes aux deux courbes enveloppes. La valeur des réactions d'appui s'en déduit ensuite facilement au moyen d'un parallélogramme des forces.

Mais ces constructions font un peu double emploi avec celles des lignes d'influence de A, B et Q, qui à elles seules sont suffisantes.

Effet de la température. — Supposons, pour préciser, qu'il s'agisse d'une élévation de température provoquant dans le métal un allongement τ par unité de longueur. Les équations de déformation n^{os} (2) et (3) devront être complétées par l'addition des termes $\tau(y_1 - y_0)$ et $\tau(x_1 - x_0)$ respectivement.

D'autre part, en appelant A, B, Q les composantes de la réaction d'appui, on doit faire

$$M = A + Bx - Qy,$$
$$N = Q\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds},$$

et l'on parvient évidemment au système d'équations suivant sous la forme simplifiée :

$$A\int\frac{d\sigma}{EI} = 0,$$
$$B\int\frac{\xi^2\,d\sigma}{EI} = \tau(y_1 - y_0),$$
$$Q\left[\int\frac{\eta^2\,d\sigma}{EI} + \int\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2\frac{d\sigma}{ES}\right] = \tau(x_1 - x_0).$$

La première équation fournit toujours $A = 0$, ce qui signifie que la *réaction d'appui correspondante passe toujours par le centre de gravité de la fibre moyenne de l'arc*, pris comme origine des coordonnées.

Dans le cas d'un arc symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée sur le milieu de sa corde, et plus généralement toutes les fois que la corde est parallèle à une direction principale de l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne, on a d'autre

part $y_1 - y_0 = 0$, de sorte qu'on a $B = 0$. Quand B n'est pas nul, il est très petit et négligeable la plupart du temps.

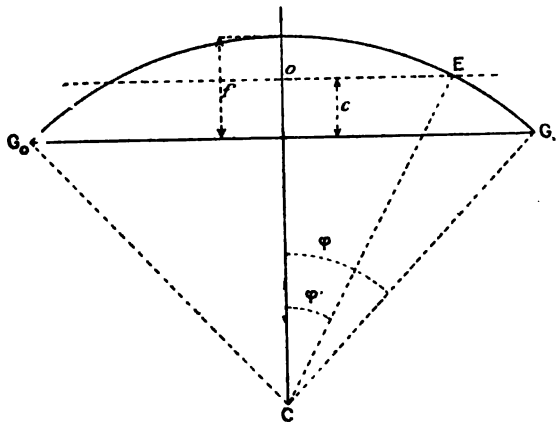
Il reste donc à déterminer la poussée Q, par une équation toute semblable de forme à celle rencontrée pour les arcs articulés. La ligne d'action de la poussée est confondue avec Ox, parallèle à la corde de l'arc passant par le centre de gravité de la fibre moyenne, au lieu d'être confondue avec cette corde comme dans le cas des arcs articulés.

Effet d'un rapprochement ou d'une dénivellation des appuis. — On opérera de même, à la seule condition de remplacer dans les seconds membres des équations (2) et (3) les termes en τ, par les variations données de $v_0 - v_1$, ou de $u_0 - u_1$.

1° Cas particulier d'un arc encastré a fibre moyenne circulaire, a appuis de niveau et a section constante. — Les calculs à faire sont plus longs que ceux relatifs à l'arc articulé aux naissances, car il y a trois inconnues A, B, Q à déterminer, mais ils restent de même nature que ceux exécutés par Bresse.

Déterminons d'abord l'ordonnée c du centre de gravité de la fibre moyenne, rapportée à la corde de l'arc. Ce centre de gravité

Fig. 107.



est, bien entendu, sur l'axe de symétrie. On a

$$c\int d\sigma = \int \eta\, d\sigma = \rho^2 \int (\cos\alpha - \cos\varphi)\, d\alpha = 2\rho^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi),$$

d'où

$$c = \rho\left[\frac{\sin\varphi}{\varphi} - \cos\varphi\right].$$

Quand φ est petit, la valeur de c tend vers la limite $c = \frac{2}{3}f$. En effet en développant son expression par rapport à φ, on trouve $c = \rho\frac{\varphi^2}{3}$, tandis que l'on a

$$f = \rho\sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2} = 2\rho\sin^2\frac{\varphi}{2} = \rho\frac{\varphi^2}{2}.$$

Si l'on veut déterminer le point E où l'axe Ox rencontre l'arc, et qui est défini par l'angle $\varphi' = \widehat{OCE}$, on trouve la relation

$$c = \rho(\cos\varphi' - \cos\varphi) = \rho\left[\frac{\sin\varphi}{\varphi} - \cos\varphi\right],$$

d'où l'on déduit

$$\cos\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Pour φ très petit, on a approximativement $\varphi' = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}$. On a évidemment $\eta = \rho(\cos\alpha - \cos\varphi')$.

a. Cas d'une charge isolée P agissant suivant la verticale d'abscisse $u = ma = \rho\sin\theta$:

Calcul de A. — Le coefficient de A est $\int d\sigma = 2\rho\varphi$.

Le second membre est

$$-\int\mu\,d\sigma = -\rho^2\frac{\sin\varphi - \sin\theta}{2\sin\varphi}\int_{-\varphi}^{\theta}(\sin\varphi + \sin\alpha)\,d\alpha$$
$$-\rho^2\frac{\sin\varphi + \sin\theta}{2\sin\varphi}\int_{\theta}^{\varphi}(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha.$$

Il a pour valeur

$$-\rho^2[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - \theta\sin\theta - \cos\theta].$$

On a donc

$$A = -\frac{a}{2\varphi\sin\varphi}[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - \theta\sin\theta - \cos\theta].$$

A s'annule pour $A = \pm\varphi$ et prend des valeurs égales pour θ et $-\theta$.

Si l'on développe la parenthèse en fonction de $\sin\varphi$ et de $\sin\theta$,

et si l'on met en évidence le rapport $m = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$, on trouve facilement, pour les premiers termes,

$$\sin^2\varphi\,\frac{(1-m^2)}{2} + \sin^4\varphi\,\frac{(1-m^4)}{24} + \sin^6\varphi\,\frac{(1-m^6)}{80} + \ldots;$$

on peut donc écrire

$$A = -\frac{a(1-m^2)}{4}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}\left[1 + \sin^2\varphi\,\frac{(1+m^2)}{12} + \sin^4\varphi\,\frac{(1+m^2+m^4)}{40} + \ldots\right],$$

ou encore

$$A = -\frac{a(1-m^2)}{4}\,\alpha_0,$$

α_0 étant une fonction de φ et de m qui est égale à l'unité pour $\varphi = 0$ et qui est lentement variable avec ces deux quantités. Le Tableau ci-dessous la définit en fonction de $\frac{f}{a} = \tang\frac{\varphi}{2}$ et de m. On voit que tant que $\frac{f}{a}$ reste inférieur à 0,40, ce qui est le cas ordinaire pour les arcs de ponts, on ne commettrait qu'une erreur insignifiante en remplaçant α_0 par l'unité.

Calcul de B. — Le coefficient de B est

$$\int \xi^2\,d\sigma = \rho^3[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi].$$

Le second membre de l'équation qui fournit B est

$$-\int \mu\xi\,d\sigma = -\rho^3\,\frac{\sin\varphi - \sin\theta}{2\sin\varphi}\int_{-\varphi}^{0}(\sin\varphi + \sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha$$
$$-\rho^3\,\frac{\sin\varphi + \sin\theta}{2\sin\varphi}\int_{0}^{\varphi}(\sin\varphi - \sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha.$$

En effectuant le calcul et après réduction, on trouve

$$\frac{\rho^3}{2\sin\varphi}[\sin\theta(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \sin\varphi(\theta + \sin\theta\cos\theta)].$$

On a donc facilement

$$B = \frac{1}{2\sin\varphi(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)}[\sin\theta(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \sin\varphi(\theta + \sin\theta\cos\theta)].$$

B s'annule pour $\theta = \pm \varphi$ et pour $\theta = 0$. Il prend des valeurs égales et de signe contraire pour θ et $-\theta$.

Si l'on développe la parenthèse en fonction de $\sin\varphi$ et $\sin\theta$, on trouve, pour les premiers termes,

$$-\frac{\sin\theta\sin^3\varphi - \sin\varphi\sin^3\theta}{3} + \frac{\sin\varphi\sin^5\varphi - \sin\varphi\sin^5\theta}{80} + \ldots,$$

ce qu'on peut écrire, en mettant $m(1-m^2)$ en facteur,

$$-\sin^4\varphi\frac{m(1-m^2)}{3}\left[1 - \frac{3}{80}\sin^2\varphi(1+m^2) + \ldots\right].$$

D'autre part, le dénominateur, développé par rapport à $\sin\varphi$, a pour premiers termes

$$\frac{4}{3}\sin^4\varphi\left(1 + \frac{33}{160}\sin^2\varphi\right),$$

de sorte que l'on peut mettre B sous la forme

$$B = -\frac{m(1-m)^2}{4}b_0,$$

b_0 étant une fonction de φ et de m qui est égale à l'unité pour $\varphi = 0$ et qui est lentement variable avec ces quantités. Un Tableau ci-dessous les définit en fonction de $\frac{f}{a}$ et de m. On voit que pour $\frac{f}{a} < 0,40$, on commettrait une erreur peu considérable en remplaçant b_0 par l'unité.

Calcul de Q. — En appelant respectivement D et d, les deux termes de la parenthèse coefficient de Q, et c le second membre de l'équation, on a

$$D = \rho^3[\varphi(1 + 2\cos\varphi\cos\varphi') - \sin\varphi(\cos\varphi + 2\cos\varphi')],$$
$$d = r^2\rho(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi),$$
$$C = \rho^2\left[\frac{\sin^2\varphi - \sin^2\theta}{2} + \cos\varphi'(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\right].$$

En faisant $\varphi' = \varphi$, on retombe sur les formules correspondantes relatives aux arcs articulés.

On peut développer la *partie principale* de la poussée, $\frac{C}{D}$, en

fonction de $\sin\varphi$ et de $m = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$. On trouve d'abord

$$\cos\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 - \frac{\sin^2\varphi}{6} - \frac{17}{360}\sin^4\varphi + \ldots,$$

$$\frac{D}{\rho^3} = \frac{2}{45}\sin^5\varphi + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\frac{C}{\rho^3} &= \sin^4\varphi\left[\frac{1-m^2}{12} - \frac{1-m^4}{24}\right] \\ &\quad + \sin^6\varphi\left[\frac{17}{720}(1-m^2) + \frac{1-m^4}{144} - \frac{1-m^6}{80}\right] + \ldots \\ &= \sin^4\varphi\,\frac{(1-m^2)^2}{24} + \sin^6\varphi\,\frac{(1-m^2)^2(13+9m^2)}{720} + \ldots\end{aligned}$$

Il en résulte que pour φ petit, on a approximativement

$$\frac{C}{D} = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{45}{48}(1-m^2)^2 = \frac{a}{f}\,\frac{15}{32}(1-m^2)^2.$$

Si l'on pose d'une manière générale

$$\frac{C}{D} = \frac{a}{f}q_0,$$

q_0 sera une fonction de φ et de m, qui variera assez lentement avec φ, ou avec $\frac{f}{a}$, et qui variera avec m à peu près comme $(1-m^2)^2$.

Un tableau ci-après en fournit quelques valeurs.

Cette partie principale de la poussée est à multiplier par le coefficient correctif $\frac{1}{1+\frac{d}{D}} = \frac{1}{1+\frac{\rho^2}{f^2}\varepsilon}$, et il est facile de voir que pour $\varphi = 0$ on a pour valeur limite de ε le nombre $\frac{45}{4}$, et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ la valeur $\varepsilon = \frac{\pi^2}{\pi^2-8} = 5,279$.

b. Cas d'une charge p uniformément répartie sur la corde de l'arc. — Dans ce cas on a $B = 0$.

Calcul de A. — Le coefficient de A est toujours $2\rho\varphi$. Pour calculer le second membre il faut faire $\mu = \frac{p\rho^2}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)$,

de sorte qu'on trouve

$$-\int_{-\varphi}^{+\varphi} \mu\, d\sigma = -p\frac{\rho^3}{2}\int_{-\varphi}^{+\varphi}(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)\, d\alpha = p\frac{\rho^3}{2}\left[\varphi\cos 2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right].$$

L'expression de A est donc

$$A = \frac{p\rho^2}{4}\left[\cos 2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right] = \frac{pa^2}{4\sin^2\varphi}\left[\cos 2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right].$$

Si on la met sous la forme

$$A = -pa^2 A_0,$$

A_0 est une fonction de φ, dont la limite pour $\varphi = 0$ est égale à $\frac{1}{3}$ et qui pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ est égale à $\frac{1}{4}$. Nous en donnons ci-dessous quelques valeurs en fonction de l'argument $\frac{f}{a} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$.

Calcul de Q. — Les fonctions D et d demeurent les mêmes que précédemment, il suffit de calculer la fonction $C = \int \mu\eta\, d\sigma$.

On trouvera facilement

$$C = \frac{p\rho^4}{2}\int_{-\varphi}^{+\varphi}(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi')\, d\alpha$$
$$= \frac{p\rho^4}{2}\left[\frac{4}{3}\sin^3\varphi + \sin\varphi\left(\cos 2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right)\right].$$

On peut mettre par suite l'expression de Q sous la forme

$$Q = \frac{pa^2}{2f}\,\frac{Q_0}{1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon},$$

ε étant la fonction de φ déjà calculée et Q_0 étant une nouvelle fonction de φ, dont nous donnons ci-dessous quelques valeurs en fonction de l'argument $\frac{f}{a} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$.

Pour $\varphi = 0$, on trouve $Q_0 = 1$ et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on trouve 1,1202 directement.

c. *Cas d'une élévation de température produisant un allongement τ par unité de longueur.* — En se reportant aux for-

mules générales, on voit que l'on a

$$A = B = 0$$

et

$$Q = EI\tau \frac{2a}{D+d} = EI\tau \frac{2a}{D} \frac{1}{1+\frac{r^2}{f^2}\varepsilon}.$$

La fonction de φ et de ρ représentée par $\frac{2a}{D}$ a, pour $\varphi = 0$, la même limite que $\frac{d}{r^2 D}$, c'est-à-dire $\frac{\varepsilon}{f^2}$. Si on lui attribue une expression de la forme $\frac{k}{f^2}$, on pourra écrire

$$Q = EI\tau \frac{k}{f^2 + r^2\varepsilon},$$

et l'on voit facilement que

$$k = \frac{2\sin\varphi}{\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}\varepsilon.$$

Une série de valeurs de k est donnée dans un des Tableaux ci-dessous.

N° 1. — TABLEAU DES VALEURS DE a_0 ET A_0.

Valeurs de $\frac{f}{a}$.	Valeurs de a_0 pour $m = 0$.	$m = 0,2$.	$m = 0,4$.	$m = 0,6$.	$m = 0,8$.	A_0.
0.....	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,3333
0,20.....	0,9868	0,9878	0,9889	0,9913	0,9951	0,3304
0,40.....	0,9488	0,9505	0,9558	0,9650	0,9792	0,3193
0,60.....	0,8897	0,8927	0,9020	0,9193	0,9481	0,3022
0,80.....	0,8144	0,8181	0,8299	0,8527	0,8947	0,2790
1,00.....	0,7267	0,7304	0,7422	0,7653	0,8097	0,2500

N° 2. — TABLEAU DES VALEURS DE b_0.

Valeurs de $\frac{f}{a}$.	Valeurs de b_0 pour $m = 0,2$.	$m = 0,4$.	$m = 0,6$.	$m = 0,8$.
0.....	1,000	1,000	1,000	1,000
0,20.....	0,9740	0,9802	0,9829	0,9887
0,40.....	0,9119	0,9210	0,9372	0,9622
0,60.....	0,8120	0,8273	0,8561	0,9057
0,80.....	0,6883	0,7064	0,7420	0,8103
1,00.....	0,5515	0,5677	0,6002	0,6660

N° 3. — TABLEAU DES VALEURS DE q_0, Q_0 ε ET k.

$\frac{f}{a}$	Valeurs de ε.	Valeurs de k.	Valeurs de q_0 pour $m = 0,0$.	$m = 0,2$.	$m = 0,4$.	$m = 0,6$.	$m = 0,8$.	Valeurs de Q_0.
0.....	11,25	11,25	0,4688	0,4320	0,3307	0,1920	0,0607	1,000
0,20....	10,56	10,84	0,4680	0,4322	0,3325	0,1970	0,0620	1,003
0,40....	9,19	10,05	0,4667	0,4325	0,3385	0,2040	0,0683	1,022
0,60....	7,56	8,92	0,4645	0,4340	0,3467	0,2177	0,0786	1,048
0,80....	6,22	7,77	0,4619	0,4346	0,3555	0,2345	0,0943	1,081
1,00....	5,28	6,72	0,4591	0,4349	0,3638	0,2524	0,1151	1,120

2° CAS PARTICULIER D'UN ARC ENCASTRÉ A FIBRE MOYENNE CIRCULAIRE, A APPUIS DE NIVEAU ET A SECTION RÉDUITE CONSTANTE. — Dans les arcs encastrés la section, ou tout au moins le moment d'inertie, a presque toujours une plus grande valeur aux naissances qu'à la clef. On se rapproche de la réalité, ainsi que l'a fait observer Maurice Lévy, en faisant l'hypothèse $\frac{I\,d\xi}{d\sigma} = J = \text{const.}$ plutôt que l'hypothèse $I = \text{const.}$ On peut supposer en même temps

$$S\frac{d\xi}{d\sigma} = \text{const.} = \frac{J}{r^2}.$$

Dans ces conditions certaines des formules se simplifient, car on peut dans toutes les intégrales remplacer $d\sigma$ par $d\xi$.

En premier lieu, pour déterminer l'ordonnée c du centre de gravité de la fibre moyenne rapportée à la corde de l'arc, on a cette fois la condition

$$c\int d\xi = \int \eta\, d\xi = \rho^2 \int (\cos\alpha - \cos\varphi)\cos\alpha\, d\alpha = \rho^2(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi),$$

d'où

$$c = \frac{\rho}{2\sin\varphi}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \cos\varphi\right).$$

Si l'on veut déterminer le point E où l'horizontale du centre de gravité rencontre l'arc, ou bien l'angle φ' tel que

$$c = \rho(\cos\varphi' - \cos\varphi),$$

on trouve

$$\rho(\cos\varphi' - \cos\varphi) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \cos\varphi\right),$$

d'où

$$2\cos\varphi' = \frac{\varphi}{\sin\varphi} + \cos\varphi.$$

Pour φ très petit, on a encore approximativement $c = \frac{2}{3}f$ et $\varphi' = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}$.

Dans le système d'axes passant par le centre de gravité, on a encore

$$\eta = \rho(\cos\alpha - \cos\varphi').$$

a. Cas d'une charge isolée $P = 1$ *agissant suivant la verticale d'abscisse* $u = ma = \rho \sin\theta$:

Calcul de A. — Le coefficient de A est $\int d\xi = 2a$.

Le second membre de l'équation donnant A est $-\int \mu d\xi$ et l'on prendra μ sous la forme suivante :

$$\mu = \frac{a-u}{2a}(a+\xi) \quad \text{entre} \quad \xi = -a \text{ et } \xi = u,$$

$$\mu = \frac{a+u}{2a}(a-\xi) \quad \text{entre} \quad \xi = u \text{ et } \xi = +a.$$

On trouve alors facilement

$$\int \mu\, d\xi = \frac{a^2 - u^2}{2} = \frac{a^2}{2}(1 - m^2)$$

et par suite

$$A = -\frac{a}{4}(1 - m^2).$$

C'est la même formule que précédemment à cela près que a_0 devient constant et égal à l'unité.

Calcul de B. — Le coefficient de B est

$$\int \xi^2\, d\xi = \frac{2a^3}{3}.$$

Le second membre de l'équation donnant B est

$$-\int \mu\xi\, d\xi = \frac{a-u}{2a}\int_{-a}^{a}(a+\xi)\xi\, d\xi$$
$$+ \frac{a+u}{2a}\int_{u}^{a}(a-\xi)\xi\, d\xi = -\frac{u(a^2-u^2)}{6}.$$

On en déduit

$$B = -\frac{u(a^2-u^2)}{4a^3} = -\frac{m(1-m^2)}{4}.$$

C'est encore le même résultat que précédemment, la fonction b_0 devenant constante et égale à l'unité.

Calcul de Q. — En appelant encore D et d respectivement les deux termes de la parenthèse coefficient de Q, et C le second membre de l'équation correspondante, on trouve

$$\frac{D}{\rho^3} = \int (\cos\alpha - \cos\varphi')^2 \cos\alpha \, d\alpha$$

$$= 2\sin\varphi\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{3}\right) - 2\cos\varphi'(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + 2\cos^2\varphi'\sin\varphi$$

$$= 2\sin\varphi\left[1 - \frac{\sin^2\varphi}{3} - \cos^2\varphi'\right],$$

$$\frac{d}{r^2\rho} = \int \cos^3\alpha \, d\alpha = 2\sin\varphi\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{3}\right).$$

On trouve ensuite (¹)

$$\frac{C}{\rho^3} = \frac{\sin\varphi - \sin\theta}{2\sin\varphi}\int_{-\varphi}^{0}(\sin\varphi + \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi')\cos\alpha \, d\alpha$$
$$+ \frac{\sin\varphi + \sin\theta}{2\sin\varphi}\int_{0}^{\varphi}(\sin\varphi - \sin\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi')\cos\alpha \, d\alpha.$$

(¹) Voici, à titre d'exemple pour les calculs de ce genre, comment on peut opérer.

Désignons par U et V respectivement les intégrales suivantes :

$$U = \int \sin\varphi(\cos\alpha - \cos\varphi')\cos\alpha \, d\alpha = \sin\varphi\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} - \cos\varphi'\sin\alpha\right),$$
$$V = \int \sin\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi')\cos\alpha \, d\alpha = \cos\varphi'\frac{\cos^2\alpha}{2} - \frac{\cos^3\alpha}{3}.$$

La fonction U est impaire et l'on a

$$U(-\varphi) = -U(\varphi).$$

La fonction V est paire et l'on a

$$V(-\varphi) = V($$

Cela posé on a

$$\frac{C}{\rho^3} = \frac{\sin\varphi - \sin\theta}{2\sin\varphi}[U(\theta) + U(\varphi) + V(\theta) - V(\varphi)]$$
$$+ \frac{\sin\varphi + \sin\theta}{2\sin\varphi}[U(\varphi) - U(\theta) - V(\varphi) + V(\theta)]$$
$$= U(\varphi) - U(\theta)\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + V(\theta) - V(\varphi).$$

On trouve, après quelques réductions faciles,

$$\frac{C}{\rho^3} = \frac{\sin\varphi}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$$
$$- \frac{\sin\theta}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + \frac{\cos^3\varphi - \cos^3\theta}{3} - \cos\varphi'\frac{\sin^2\varphi - \sin^2\theta}{2}.$$

En mettant, comme précédemment, l'expression de Q sous la forme

$$Q = \frac{a}{f} q_0 \frac{1}{1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon},$$

on constaterait, en développant les expressions précédentes en séries ordonnées par rapport à $\sin\varphi$ et $\sin\theta$, que pour la limite $\varphi = 0$ on a

$$q_0 = \frac{15}{32}(1 - m^2)^2,$$
$$\varepsilon = \frac{45}{4} = 11,25.$$

La Table ci-après donne une série de valeurs de ces fonctions. Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on trouve directement $\varepsilon = 13,382$.

b. Cas d'une charge p uniformément répartie sur la corde de l'arc. — Dans ce cas on a $B = 0$.

Calcul de A. — Le second membre de l'équation donnant A est

$$-\int \mu\, d\xi = -\int_{-a}^{+a} (a^2 - \xi^2)\, d\xi = -\frac{2pa^3}{3}.$$

On trouve donc

$$A = -\frac{pa^2}{3}.$$

Calcul de Q. — On trouve

$$C = \frac{p\rho^4}{2}\int_{-\varphi}^{+\varphi} (\sin^2\varphi - \sin^2\alpha)(\cos\alpha - \cos\varphi')\cos\alpha\, d\alpha$$
$$= \left[\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \frac{\varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi\cos 2\varphi}{8} - \frac{4}{3}\cos\varphi'\sin^3\varphi\right]\frac{p\rho^4}{2}.$$

En tenant compte de la valeur de $\cos\varphi'$ on peut simplifier un

peu cette expression et lui donner la forme

$$C = \frac{p\rho^4}{2}\left[\frac{\sin^2\varphi}{3}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + \frac{\sin 2\varphi\cos 2\varphi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right].$$

En conséquence, l'expression de la poussée pourra se mettre sous la forme

$$Q = \frac{C}{D}\frac{1}{1+\frac{d}{D}} = p\frac{a^2}{2f}\frac{Q_0}{1+\frac{r^2}{f^2}\varepsilon},$$

ε étant la fonction de φ déjà calculée, et Q_0 étant une nouvelle fonction de φ, ou de $\frac{f}{a}$. On peut s'assurer facilement que pour la limite $\varphi = 0$ on a $Q_0 = 1$ et que pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on a $Q_0 = 1,3143$. La Table ci-après en donne quelques valeurs.

c. Cas d'une élévation de température produisant un allongement τ par unité de longueur. — On a

$$A = B = 0$$

et

$$Q = EI\tau\frac{2a}{D+d} = EI\tau\frac{2a}{D}\frac{1}{1+\frac{r^2}{f^2}\varepsilon}.$$

La fonction $\frac{2a}{D}$ a la même limite pour $\varphi = 0$ que $\frac{d}{r^2 D} = \frac{\varepsilon}{f^2}$. On peut lui attribuer une expression de la forme $\frac{k}{f^2}$, de sorte que l'on ait

$$Q = EI\tau\frac{k}{f^2 + r^2\varepsilon}.$$

On reconnaît d'ailleurs que l'on a

$$k = \frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{3}\right)}.$$

Les valeurs de k et de ε sont données par le Tableau ci-après :

Tableau *pour le calcul des poussées des arcs encastrés, circulaires et à section réduite constante.*

Valeurs de			Valeurs de q_0 pour										Valeurs de Q_0''
$\frac{f}{a}$	ε	K	m=0,0	m=0,1	m=0,2	m=0,3	m=0,4	m=0,5	m=0,6	m=0,7	m=0,8	m=0,9	
0,00	11,25	11,25	0,4687	0,4594	0,4320	0,3882	0,3307	0,2637	0,1920	0,1223	0,0607	0,0169	1,000
0,10	»	»	0,4690	0,4596	0,4323	0,3886	0,3312	0,2641	0,1923	0,1225	0,0610	0,0169	1,001
0,15	»	»	0,4694	0,4601	0,4329	0,3891	0,3317	0,2646	0,1928	0,1228	0,0613	0,0170	1,002
0,20	10,81	11,37	0,4701	0,4608	0,4336	0,3899	0,3326	0,2655	0,1935	0,1233	0,0616	0,0170	1,004
0,25	»	»	0,4712	0,4621	0,4348	0,3911	0,3339	0,2667	0,1946	0,1241	0,0621	0,0172	1,008
0,30	»	»	0,4726	0,4634	0,4362	0,3926	0,3335	0,2681	0,1958	0,1251	0,0627	0,0175	1,012
0,35	»	»	0,4744	0,4652	0,4380	0,3944	0,3374	0,2700	0,1974	0,1262	0,0635	0,0178	1,018
0,40	9,97	11,85	0,4766	0,4674	0,4402	0,3967	0,3397	0,2721	0,1993	0,1277	0,0643	0,0181	1,025
0,45	»	»	0,4794	0,4701	0,4430	0,3995	0,3424	0,2746	0,2016	0,1294	0,0653	0,0185	1,034
0,50	»	»	0,4825	0,4732	0,4462	0,4027	0,3453	0,2774	0,2041	0,1313	0,0665	0,0189	1,043
0,55	»	»	0,4861	0,4768	0,4498	0,4062	0,3487	0,2806	0,2069	0,1335	0,0678	0,0194	1,053
0,60	9,51	12,86	0,4907	0,4814	0,4543	0,4106	0,3528	0,2844	0,2102	0,1359	0,0693	0,0199	1,066
0,65	»	»	0,4968	0,4872	0,4602	0,4162	0,3580	0,2891	0,2142	0,1388	0,0711	0,0206	1,082
0,70	»	»	0,5034	0,4938	0,4666	0,4224	0,3636	0,2941	0,2183	0,1420	0,0730	0,0214	1,099
0,75	»	»	0,5114	0,5017	0,4743	0,4295	0,3703	0,2999	0,2231	0,1456	0,0752	0,0223	1,119
0,80	10,26	15,02	0,5216	0,5120	0,4839	0,4386	0,3785	0,3070	0,2287	0,1497	0,0777	0,0230	1,144
0,85	»	»	0,5362	0,5263	0,4978	0,4512	0,3897	0,3167	0,2361	0,1549	0,0807	0,0241	1,178
0,90	»	»	0,5535	0,5432	0,5137	0,4660	0,4026	0,3279	0,2445	0,1608	0,0839	0,0252	1,218
0,95	»	»	0,5733	0,5629	0,5324	0,4831	0,4177	0,3407	0,2540	0,1673	0,0875	0,0264	1,263
1,00	13,38	20,07	0,5959	0,5851	0,5534	0,5023	0,4342	0,3550	0,2645	0,1743	0,0913	0,0276	1,314

3° Cas particulier d'un arc encastré a fibre moyenne parabolique et a section réduite constante. — Les deux constantes A et B, données par des formules où n'entre pas l'ordonnée y de la fibre moyenne, ont les valeurs simples écrites plus haut pour les arcs circulaires à section réduite constante.

En ce qui concerne la poussée, l'équation de la fibre moyenne rapportée à sa corde et à son arc de symétrie étant

$$y' = f\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

on trouve facilement que l'ordonnée c du centre de gravité est

$$c = \frac{2}{3} f,$$

de sorte que l'équation rapportée à ce centre de gravité est

$$y = f\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

On trouve alors

$$D = \int \eta^2 \, d\xi = \frac{8}{45} f^2 a,$$

$$d = \frac{a^2}{f} \varphi = \frac{a}{f} \operatorname{arc\,tang} \frac{2f}{a},$$

$$\varepsilon = \frac{f^2}{r^2} \frac{d}{D} = \frac{45}{4} \frac{a\varphi}{2f}.$$

On trouve ensuite que dans le cas d'une charge isolée $P = 1$, agissant suivant la verticale d'abscisse $u = ma$, le second membre C de l'équation relative à la poussée est

$$C = \int \mu \eta \, d\xi = \frac{a^2 f}{12} (1 - m^2)^2.$$

La valeur principale de la poussée est

$$\frac{C}{D} = \frac{a}{f} q_0 = \frac{a}{f} \frac{15}{32} (1 - m^2)^2.$$

Autrement dit q_0 ne dépend pas du surbaissement, et a la valeur limite trouvée pour les arcs circulaires.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, la partie principale de la poussée est $\frac{pa^2}{2f}$.

Dans le cas d'un allongement τ dû à la température, on a

$$Q = EI\tau \frac{k}{f^2} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{f^2}\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{45}{4},$$

quel que soit le surbaissement.

Arcs semi-encastrés. — On appelle ainsi des arcs qui, au moment de leur décintrement, sont posés sur des cales ayant des dimensions très faibles en projection sur le plan moyen et assimilables à des rotules ou à des articulations. Ensuite, soit avant, soit après la construction des tympans et du reste de la superstructure, on complète le calage de manière à obtenir des arcs encastrés. Il est bien évident que dans ce cas toutes les charges qui sont appelées à intervenir avant que le calage soit complet produisent les mêmes effets que si l'on avait affaire à un arc articulé aux naissances. On aura donc à faire des déterminations distinctes pour ces charges-là et pour les charges agissant ultérieurement. Pour les premières on emploiera les formules et méthodes des arcs articulés; pour les autres seulement on emploiera les formules et méthodes des arcs encastrés.

Cette façon d'opérer procure certains avantages, que M. Résal notamment à mis en évidence. On peut ainsi réduire très souvent, d'une manière appréciable, les fatigues maxima dans les sections les plus fatiguées et économiser ainsi une certaine quantité de matière.

On va même quelquefois plus loin, et au lieu de placer les calages primitifs, ou articulations provisoires, au centre de gravité des sections extrêmes de l'arc, on recherche la position optima à donner à ces calages, pour obtenir le maximum d'économie. Les constructeurs des grandes voûtes en maçonnerie ou en béton de ciment arrivent ainsi à modifier dans un sens favorable leurs conditions de résistance, en obligeant la courbe des pressions, relative à une fraction plus ou moins importante de la charge totale, à passer aux naissances en des points déterminés. Il faut alors, dans ces cas, modifier légèrement le calcul de la poussée.

Si la ligne des calages, ou articulations provisoires, se trouve par exemple à une distance d en dessous de la ligne des centres de gravité des sections extrêmes, il est bien évident que l'expression

générale du moment fléchissant dans l'arc articulé deviendra

$$M = \mu - Q(y + d),$$

au lieu de

$$M = \mu - Qy.$$

En conséquence, dans la formule fournissant la poussée, le coefficient de Q devra s'écrire

$$\int \frac{(\eta + d)^2\, d\sigma}{EI} + \int \frac{1}{ES}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right) d\sigma.$$

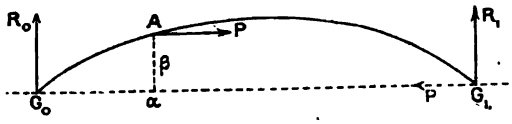
Nous nous bornons à cette indication.

Remarque sur le cas particulier d'un arc soumis à une force unique parallèle à la corde. — Une force appliquée à l'arc parallèlement à sa corde peut d'une infinité de manières être remplacée par deux forces de directions arbitraires faisant avec la corde un angle fini, aussi voisin que l'on veut d'un angle droit. Par ce procédé indirect, on rentre donc dans le cas habituel.

Mais on peut trouver avantage à ne pas dédoubler ainsi le problème.

Pour obtenir une solution directe, il suffit d'envisager un système

Fig. 108.



d'appuis statiques un peu différent de celui que nous avons constamment envisagé.

Supposons la force P appliquée au point A de l'arc, de coordonnées $(\alpha\beta)$. Les réactions provisoires des appuis G_0 et G_1 ne peuvent plus satisfaire aux conditions d'être toutes les deux parallèles à P et de passer par G_0 et G_1 respectivement. Mais on obtient un autre système simple d'appuis statiques, en supposant que G_0 ne peut développer qu'une réaction R_0 perpendiculaire à la corde, G_1 développant une réaction oblique, dont la composante parallèle à la corde est P.

Il est facile de calculer R_0. En prenant les moments par rapport

à G, on obtient

$$R_0 = -\frac{P\beta}{l}.$$

On a d'ailleurs pour μ les expressions suivantes :

$$\text{Pour} \quad o < \xi < \alpha, \qquad \mu = R_0 \xi,$$
$$\text{Pour} \quad \alpha < \xi < l, \qquad \mu = R_0 \xi - P(\gamma - \beta).$$

On en déduira comme toujours

$$M = \mu + A + B\xi - C\eta,$$

de sorte que toutes les intégrales contenant M conserveront la même forme, μ ayant simplement une valeur différente.

Pour un arc articulé on aurait encore $A = B = o$.

Quant aux intégrales dépendant de N, on en calculera les valeurs approchées en supposant que de G_0 à A on a, approximativement, $N = C$, et que de A à G_1 on a $N = C + P$.

L'intégrale $\int \frac{N}{ES} d\eta$ ne cessera pas d'être en général négligeable, du moins pour les arcs suffisamment surbaissés.

Quant à l'intégrale $\int \frac{N}{ES} d\xi$ elle comprendra, outre le terme habituel $C \int \frac{d\xi}{ES}$, le terme complémentaire $P \int_\alpha^l \frac{d\xi}{ES}$, qui s'ajoutera aux termes dépendant de μ.

Nous nous bornons à ces indications, le problème dont il s'agit n'étant pas usuel et ne se présentant guère qu'à titre accessoire (arcs principaux supportant la retombée d'arcs secondaires).

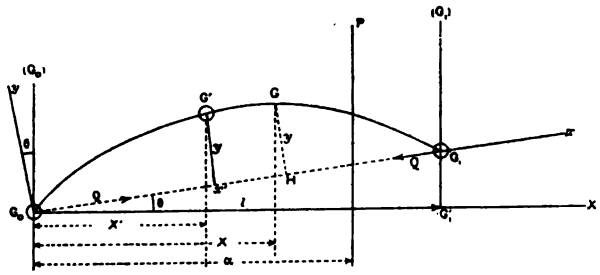
CHAPITRE XIII.

ARCS DIVERS. ASSEMBLAGES DIVERS DE POUTRES ET D'ARCS.

I. — Arcs a triple articulation.

Les arcs à triple articulation sont en réalité composés de deux poutres courbes G_0G' et G_1G' articulées l'une en G_0, l'autre en G_1, et s'appuyant l'une contre l'autre au point G', où elles sont

Fig. 109.



réunies par une troisième articulation permettant à l'une d'elles de prendre un déplacement angulaire fini par rapport à l'autre. Cette articulation équivaut à l'introduction d'une section dont le moment d'inertie serait nul.

Tout ce qui a été dit sur la force extérieure et sur ses composantes à propos des poutres prismatiques est par suite applicable à un pareil système. Seulement, quand il s'agira de la déformation, il faudra prendre en compte le déplacement angulaire relatif des deux parties de la poutre.

Sous cette seule réserve la théorie générale des arcs demeure applicable, et elle devient même particulièrement simple, les réactions d'appui étant toujours déterminables par la statique et étant, dans le cas d'une charge unique, *des fonctions linéaires de l'abscisse de la charge*. Les lignes d'influence des moments fléchissants, effort normal, effort tranchant, ainsi que celles de la

fatigue dans les différentes sections, sont uniquement composées de lignes droites.

Nous supposons que les articulations extrêmes G_0 et G_1 ne sont pas de niveau et nous prenons pour axes des x la corde G_0G_1, et pour axe des y la perpendiculaire G_0y passant par G_0.

Les charges étant verticales, la poutre reposant sur appuis simples sera néanmoins rapportée à l'horizontale G_0X et à la verticale (G_0), les réactions d'appui étant dans cette hypothèse dirigées suivant la verticale.

Réactions complémentaires d'appui. Poussée. — Supposons d'abord un système de charges quelconque, et soit μ le moment fléchissant que ce système de charge produirait dans la poutre posée sur appuis simples.

Les réactions complémentaires d'appui sont deux forces égales et directement opposées Q, dont la ligne d'action doit passer par les deux points d'articulation G_0 et G_1, puisque en ces points, le moment fléchissant total doit être nul, et que d'autre part le moment fléchissant provisoire μ y est nul déjà.

Dans ces conditions, le moment fléchissant au point G a pour expression générale

$$M = \mu - Qy.$$

Au point G', où nous supposons l'articulation centrale, nous devons avoir $M = 0$, car les deux sections situées de part et d'autre de l'articulation ne sont pas solidaires. Ou, si l'on veut, on peut dire encore que la courbe des pressions doit passer par l'articulation G'. Si l'on désigne par y' l'ordonnée de G', et par μ' la valeur particulière prise en ce point par la fonction μ, on doit avoir

$$\mu' - Qy' = 0.$$

Cette condition fournit immédiatement pour la réaction Q la valeur

$$Q = \frac{\mu'}{y'}.$$

Ce résultat est valable, quel que soit le système de charges, et il est remarquable par sa simplicité.

Ligne d'influence de la poussée. — Supposons maintenant qu'il

s'agisse d'une charge isolée P, agissant suivant la verticale située à la distance α de (G_0). Le moment μ', au point G', dont la distance à (G_0) est représentée par X', a pour valeur

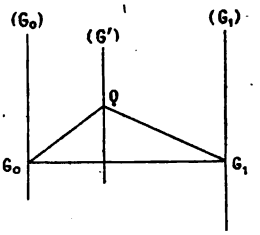
$$\mu' = P\frac{\alpha(l - X')}{l} \qquad \text{si} \qquad \alpha < X',$$

et

$$\mu' = P\frac{X'(l - \alpha)}{l} \qquad \text{si} \qquad X' < \alpha.$$

Il en résulte que la ligne d'influence de Q, qui est une simple réduction de celle de μ', est composée de deux portions de ligne droite. Si l'on prend une ligne de référence quelconque G_0G_1

Fig. 110.



comprise entre les verticales (G_0) et (G_1), l'une des droites passe en G_0, l'autre en G_1, et elles se coupent sur la verticale de G', au point Q qui aurait pour ordonnée

$$P\frac{X'(l - X')}{l}\frac{1}{y'}.$$

Ligne d'influence du moment fléchissant au point G. — On a

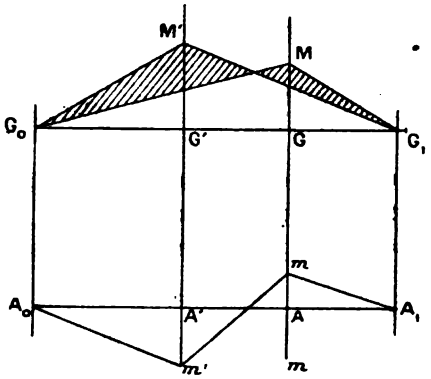
$$M = \mu - Qy = \mu - \mu'\frac{y}{y'}.$$

La ligne d'influence de μ est donc une combinaison linéaire de la ligne d'influence de μ, laquelle se compose de deux droites se coupant au point M sur la verticale de G, et de la ligne d'influence de $\mu'\frac{y}{y'}$, qui, comme celle de Q, se compose de deux droites analogues se coupant en M' sur la verticale de G'.

C'est, si l'on veut, la ligne brisée G_0MG_1 rapportée à la ligne de référence également brisée $G_0M'G_1$. Rapportée à une horizontale

telle que A_0A_1, son allure serait celle de la ligne brisée à trois côtés $A_0m'mA_1$. Pour la définir, il suffit de connaître les deux

Fig. 111.



ordonnées $A'm'$ et Am qu'on peut obtenir directement en plaçant la charge d'abord en G', puis en G.

Cette ligne d'influence a une zone négative et une zone positive.

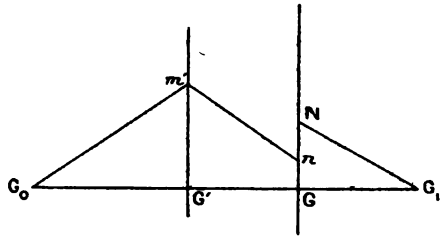
Ligne d'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant. — Pour une section G, la force extérieure résulte de la composition de la poussée Q et de la force extérieure qui correspond à l'hypothèse des appuis simples. Cette dernière est du reste verticale, et se confond avec $\frac{d\mu}{dX}$. Sa ligne d'influence est composée de deux droites parallèles passant par les points d'appui et présente une discontinuité égale à l'unité au droit de la section G.

D'autre part, Q est une force de direction fixe dont l'intensité a pour ligne d'influence deux droites passant par les appuis et se coupant sur la verticale de l'articulation centrale. Les lignes d'influence de ses composantes horizontale et verticale jouissent des mêmes propriétés.

Il en résulte que la composante horizontale de la force extérieure a une ligne d'influence de même forme que celle de Q et que sa composante verticale a une ligne d'influence composée uniquement de lignes droites. Elle possède nécessairement un point de brisure sur la verticale de l'articulation centrale et une discontinuité sur la verticale de la section G.

Il en résulte encore que les lignes d'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant sont composées uniquement de lignes

Fig. 112.



droites et que, comme la ligne précédente, elles partent de G_0, aboutissent en G_1, présentent un point de brisure sur la verticale de l'articulation centrale et une discontinuité sur la verticale de la section G.

Pour les définir, il suffit de connaître l'ordonnée $G'm'$ et l'une des ordonnées GN ou Gn.

Ligne d'influence de la fatigue dans une section. — En vertu de la formule

$$R = \frac{N}{S} + \frac{Mh}{I},$$

la fatigue à la flexion R est elle-même pour la fibre extrême d'une section G une combinaison linéaire de N et de M. Sa ligne d'influence sera donc encore une ligne brisée présentant une discontinuité sur la verticale de la section.

Il en est de même de la fatigue à l'effort tranchant qui est proportionnelle à ce dernier.

Déterminations graphiques. — Les formules précédemment données permettraient de calculer les ordonnées des lignes d'influence si on le désirait. Mais on peut avec avantage recourir à des procédés graphiques très simples.

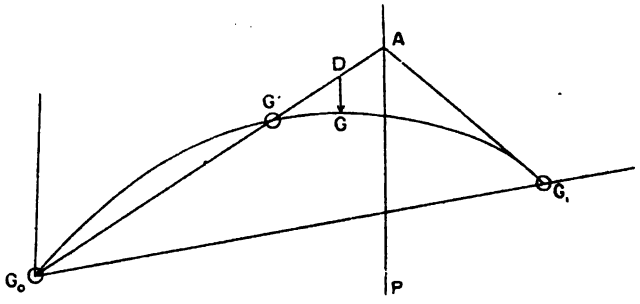
En réalité tout revient à déterminer les points des lignes d'influence situés d'une part sur une verticale fixe, celle de l'articulation centrale, et d'autre part sur la verticale de la section considérée.

Pour les premiers, on les aura tous à la fois en étudiant l'effet

produit dans la poutre par une charge unité P placée au droit de l'articulation centrale. Quant aux autres, on les obtiendra en étudiant pour chaque section l'effet produit dans cette section par une charge placée à son aplomb.

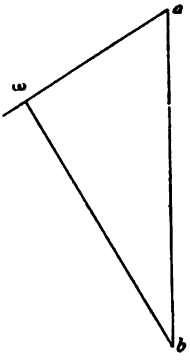
Soit une charge P agissant suivant la verticale (α) que, pour fixer les idées, nous supposerons à droite de l'articulation G'. La courbe des pressions est composée de deux droites, valables l'une à gauche, l'autre à droite de la verticale (α). La droite de gauche, ligne d'action de R_0, doit passer par les deux points G_0 et G', où

Fig. 113.



les moments fléchissants sont nuls. La seconde droite doit passer par le point A déterminé par la première sur la verticale (α) et

Fig. 114.



passer par le point G_1 où le moment fléchissant est nul. Le polygone des forces se réduit à la seule force $ab = P$, et les valeurs des

réactions R_0 et R_1 s'obtiendront en menant par a et b respectivement des parallèles $a\omega$ et $b\omega$ à AG_0 et AG_1.

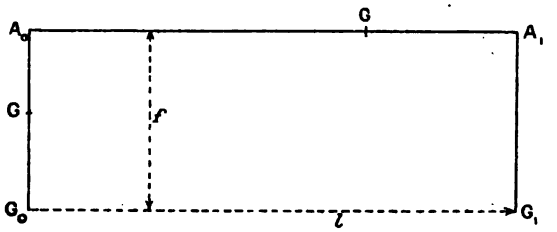
Par cette simple construction, on a donc le moyen de trouver la force extérieure dans une section quelconque G. Si G est à gauche de la verticale (α), la force extérieure est $R_0 = \overline{\omega a}$; si G est à droite, la force extérieure est $R_0 - P = - R_1 = \overline{\omega b}$. Si G est sur la verticale (α), on aura à prendre en considération $\overline{\omega a}$ pour le point infiniment voisin à sa gauche et $\overline{\omega b}$ pour le point infiniment voisin à sa droite, ce qui fournira une discontinuité dans certaines des lignes d'influence.

On déduira de là M, N, T par les procédés déjà indiqués, et l'on calculera immédiatement la fatigue à la flexion ou à l'effort tranchant dans la section G, comme dans le cas général.

II. — Poutres a béquilles.

On a donné ce nom à l'ensemble de trois poutres droites, l'une horizontale A_0A_1 et les deux autres A_0G_0 et A_1G_1 lui servant de

Fig. 115.



piles et reliées avec elles en A_0 et A_1 au moyen d'assemblages rigides, tels que les angles mutuels soient conservés. Les points G_0 et G_1 sont généralement des articulations.

Un pareil système peut être assimilé à un arc. Il n'en diffère essentiellement qu'en ce que la fibre moyenne présente des points anguleux, et en ce qu'une portion de l'arc, la poutre A_0A_1, est seule susceptible d'être surchargée. On peut aussi le regarder comme un cas limite des poutres continues.

Si nous appelons toujours μ le moment qui se produirait, dans l'hypothèse d'appuis statiques, en un point quelconque G de la

poutre horizontale ou des béquilles, on aura toujours

$$M = \mu - Qy,$$

en prenant l'origine des coordonnées sur la corde G_0G_1, la réaction complémentaire d'appui devant agir suivant la ligne des articulations G_0G_1.

Négligeons les termes correctifs dus à l'effort normal; la poussée Q sera donnée par l'équation

$$Q\int \frac{\eta_1^2}{EI}\,d\sigma = \int \frac{\mu\eta_1}{EI}\,d\sigma,$$

les interjections s'étendant de G_0 à G_1.

Supposons I constant dans les poutres horizontales et soit ρI le moment d'inertie dans les deux béquilles.

Le coefficient de Q deviendra

$$\frac{1}{EI\rho}\int_0^l \eta_1^2\,d\eta_1 + \frac{1}{EI}\int_0^l f^2\,d\xi - \frac{1}{EI\rho}\int_f^0 \eta^2\,d\eta_1$$
$$= \frac{lf^2}{EI}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f}{\rho l}\right) = \frac{lf^2}{EI}\left(1 + \frac{2}{3}k\right),$$

en posant $K = \frac{f}{\rho l}$.

a. Supposons maintenant que la charge se réduise à une charge isolée P agissant à l'abscisse $u = ma$. On aura évidemment $\mu = 0$ dans les béquilles, et l'intégrale du second membre ne portera que sur la poutre droite horizontale. On trouvera facilement

$$\int \frac{\mu\eta_1}{EI}\,d\sigma = \frac{Pf}{EI}\,\frac{l^2}{8}(1 - m^2).$$

Par suite

$$Q = \frac{Pl}{8f}\,\frac{(1 - m^2)}{1 + \frac{2}{3}k}.$$

b. Supposons ensuite une charge uniformément répartie. Le second membre devient

$$\frac{1}{24}\,\frac{pl^3 f}{EI},$$

et l'on a pour la poussée

$$Q = \frac{pl^2}{12f}\,\frac{1}{1 + \frac{2}{3}k}.$$

La poussée est notablement moindre que dans un arc circulaire (ou parabolique) de même portée et de même flèche. Le coefficient de réduction est sensiblement

$$\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}k},$$

d'autant plus petit que $K = \frac{f}{\rho l}$ est plus grand.

Si les béquilles ont une faible rigidité (ρ petit), ou sont très hautes $\left(\frac{f}{l}\text{ étant grand}\right)$, la poussée pourra devenir très faible.

Si elles sont courtes et rigides, K devenant très petit, la poussée ne peut dépasser les $\frac{2}{3}$ de celle qui serait produite dans un arc circulaire (ou parabolique).

c. Examinons enfin l'effet produit dans le système par un couple de moment M_0 appliqué au point G_0 et par un couple de moment M_1 appliqué en G_1, dans l'hypothèse où les points G_0 et G_1 sont astreints à conserver leur niveau et leur écartement.

On posera

$$M = M_0 + Bx - Qy$$

tout le long de la fibre moyenne, la quantité μ étant nulle puisqu'il n'y a pas de charges. Il s'agit de déterminer les inconnues B et Q.

La première se déterminera par la condition statique, obtenue en appliquant la formule au point G_1 où $y = 0$,

$$M_1 = M_0 + Bl,$$

d'où

$$B = \frac{M_1 - M_0}{l},$$

de sorte que M peut s'écrire

$$M = M_0\frac{l-x}{l} + M_1\frac{x}{l} - Qy.$$

Tout le long de la première béquille, on aura $M = M_0 - Q_y$; tout le long de la seconde, on aura $M = M_1 - Q_y$. Enfin, tout le long de la poutre horizontale, on aura la formule complète, mais avec $y = f$. En introduisant cette valeur dans l'équation générale

$$\int \frac{M}{EI}\eta\, d\sigma = 0,$$

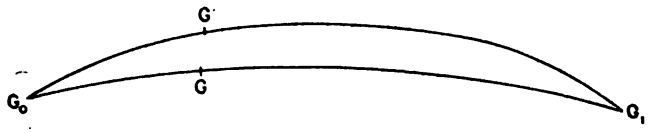
applicable aux arcs articulés quand on néglige l'effort normal, on aura une équation déterminant la poussée cherchée.

Cela permettra ensuite d'obtenir la valeur du moment fléchissant en tout point du système.

III. — Poutres droites ou courbes réunies a leurs abouts par des assemblages rigides.

Soient les deux poutres G_0GG_1 et $G_0G'G_1$, de même portée. Nous les supposons réunies en G_0 et G_1 par des assemblages

Fig. 116.



rigides, tels que leurs fibres moyennes en G_0 et G_1 conservent leurs angles mutuels, quelles que soient les déformations subies par les deux poutres.

Bien entendu, les déplacements relatifs de G_0 et G_1 dans les deux poutres sont les mêmes.

Supposons que la poutre G soit seule surchargée, et soit μ le moment fléchissant qui s'y produirait si elle reposait sur appuis statiques. En un point quelconque G, on aura pour le moment fléchissant réel M une expression de la forme

$$M = \mu + A + Bx - Qy.$$

Au point correspondant G', sur la verticale de G on aura de même pour le moment fléchissant réel M' une expression de la forme

$$M' = A' + B'x - Q'y'.$$

Or, si l'on suppose que pour l'ensemble du système les appuis G_0 et G_1 sont des appuis simples, les réactions complémentaires pour chacune des poutres sont égales et directement opposées aux réactions complémentaires afférentes à l'autre poutre. Cela donne les conditions

$$A' = -A, \qquad B' = -B, \qquad Q' = -Q,$$

et, par suite,

$$-M' = A + Bx - Qy'.$$

D'autre part, si l'on suppose négligeables les termes dépendant de l'effort normal N, les équations générales de déformation donnent

$$\omega_1 - \omega_0 = \int \frac{M}{EI}\, d\sigma = \int \frac{M'}{EI'}\, d\sigma',$$

$$v_1 - v_0 - \omega_1 x_1 + \omega_0 x_0 = -\int \frac{M\xi}{EI}\, d\sigma = -\int \frac{M'}{EI'}\, d\sigma',$$

$$u_1 - u_0 + \omega_1 y_1 - \omega_0 y_0 = \int \frac{M\eta}{EI}\, d\sigma = \int \frac{M'\eta'}{EI}\, d\sigma'.$$

On en déduit trois équations de condition permettant de déterminer les inconnues A, B et Q, en remplacant dans les seconds et troisièmes membres de ces égalités M et M′ par leurs valeurs respectives.

La première de ces équations, mise sous forme explicite, est

$$A\left[\int \frac{d\sigma}{EI} + \int \frac{d\sigma'}{EI'}\right] + B\left[\int \frac{\xi\, d\sigma}{EI} + \int \frac{\xi'\, d\sigma'}{EI'}\right]$$
$$- Q\left[\int \frac{\eta\, d\sigma}{EI} + \int \frac{\eta'\, d\sigma'}{EI'}\right] = -\int \frac{\mu\, d\sigma}{EI},$$

et les deux autres équations sont analogues. Elles sont de même forme que celles rencontrées dans la théorie des arcs encastrés.

Bien entendu, si I et I′ sont constants, et si les deux poutres ont des fibres moyennes symétriques par rapport à la verticale de leurs milieux, on aura diverses simplifications. Il suffit notamment de prendre l'axe de symétrie comme axe des y pour que les intégrales suivantes soient nulles :

$$\int \frac{\xi\, d\sigma}{EI} = \int \frac{\xi'\, d\sigma'}{EI'} = \int \frac{\xi\eta\, d\sigma}{EI} = \int \frac{\xi'\eta'\, d\sigma'}{EI'} = 0.$$

Si, en outre, on s'arrange pour que

$$\int \frac{\eta\, d\sigma}{EI} + \int \frac{\eta'\, d\sigma'}{EI'} = 0,$$

ce qui revient à prendre pour origine des coordonnées le centre de gravité de tout le système, les inconnues seront séparées et seront données chacune par une équation distincte.

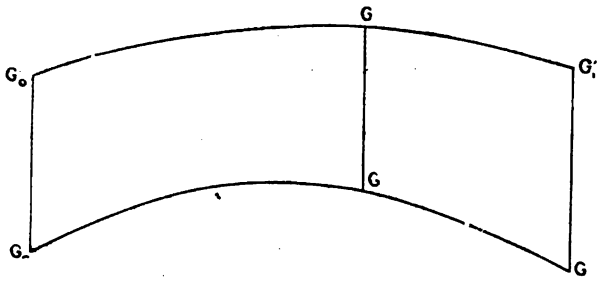
Cette étude trouve une application dans ce que l'on appelle les *arcs à tirants*, et dans l'examen des conditions de résistance des pièces de pont, lorsque celles-ci font partie intégrante d'un

cadre rigide constitué par des montants verticaux et une entretoise de contreventement.

IV. — Arcs et poutres solidarisés par les montants verticaux.

Nous supposons cette fois deux poutres de même portée, dont l'une $G_0 G G_1$ reçoit les charges, et est reliée avec la seconde poutre $G'_0 G' G'_1$ au moyen de montants verticaux. Ceux-ci sont

Fig. 117.



supposés articulés à leurs deux bouts et incapables d'introduire autre chose que des réactions verticales. Ils sont supposés indéformables, et enfin ils sont supposés suffisamment rapprochés pour que l'on puisse admettre que deux points G et G', se correspondant sur la même verticale, ont mêmes déplacements verticaux.

Appelons : M le moment fléchissant réel au point G de la première poutre; μ le moment fléchissant qui s'y produirait sous l'action des surcharges dans l'hypothèse d'appuis statiques; ν le moment fléchissant qui s'y produirait, dans la même hypothèse d'appuis statiques, sous l'action des réactions verticales produites par les montants G, G'.

On aura au point G

$$M = \mu + \nu + A + Bx - Qy.$$

Pour la deuxième poutre, les réactions verticales dues aux montants sont égales et de signe contraire à celles qui s'exercent sur la première poutre. On aura donc pour M', moment fléchissant réel au point G', l'expression

$$M' = -\nu + A' + B'x - Q'y'.$$

On en déduit

$$M + M' = \mu + (A + A') + (B + B')x - Qy - Q'y'.$$

D'autre part, puisque les déplacements verticaux v en deux points correspondants G, G' sont représentés par deux fonctions identiques, il doit en être de même de leurs dérivées secondes. Or, pour la première poutre, on a

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EJ},$$

J étant le moment d'inertie réduit. Pour la seconde, on a de même

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M'}{EJ'}.$$

On en déduit, pour tout groupe de points correspondants,

$$\frac{M}{J} = \frac{M'}{J'} = \frac{M + M'}{J + J'},$$

de sorte que l'on peut exprimer les moments M et M' en fonction de μ et de quatre constantes seulement $(A + A')$, $(B + B')$, Q et Q'.

Ceci posé, on écrira les équations générales de déformation applicables aux deux poutres entières; on y remplacera d'abord $\frac{M}{J}$ et $\frac{M'}{J'}$ par leur expression en fonction de $\frac{M + M'}{J + J'}$. Puis, dans les équations de conditions distinctes qui en résulteront, et qui seront au nombre de quatre seulement dans le cas le plus général, on remplacera $M + M'$ par son expression générale en fonction de μ, de $A + A'$, $B + B'$, Q et Q', et l'on parviendra ainsi à la détermination de toutes les inconnues figurant dans les expressions de M, M' et $M + M'$.

Il est surtout intéressant d'examiner les cas particuliers suivants :

1° *Arc articulé aux naissances associé à un longeron rectiligne, posé sur appuis simples.* — Dans ce cas, on a

$$A = A' = B = B' = 0.$$

On a aussi $Q' = 0$, de sorte qu'il ne reste comme inconnue que la poussée Q de l'arc.

Les appuis étant supposés invariables, la troisième équation de déformation appliquée à l'arc entier donne

$$\int \frac{M}{EJ}\eta\, d\xi - \int \frac{N}{ES}\, d\xi = 0;$$

or, on a

$$\frac{M}{J} = \frac{M'}{I'} = \frac{M+M'}{J+I'},$$

et d'autre part

$$M + M' = \mu - Qy,$$

de sorte que l'équation devient, en prenant $N = Q$, à titre de valeur approchée,

$$\int \frac{\mu\, d\xi}{E(J+I')} - Q\int \frac{\eta^2\, d\xi}{E(J+I')} - Q\int \frac{d\xi}{ES} = 0.$$

Elle est identique à celle que l'on *obtiendrait pour calculer la poussée d'un arc fictif articulé aux naissances de même fibre moyenne que l'arc proposé et ayant en chaque point un moment d'inertie réduit* $J+I'$, *et enfin soumis aux charges directement appliqués à l'ouvrage.*

2° *Arc encastré aux naissances associé à un longeron rectiligne encastré.* — On a cette fois les trois équations distinctes

$$\int \frac{M}{EJ}\, d\xi = \int \frac{M'}{EI'}\, d\xi = \int \frac{M+M'}{E(J+I')}\, d\xi = 0,$$

$$\int \frac{M}{EJ}\xi\, d\xi = \int \frac{M'}{EI'}\xi\, d\xi = \int \frac{M+M'}{E(J+I')}\xi\, d\xi = 0,$$

$$\int \frac{M}{EJ}\eta\, d\xi - \int \frac{N}{ES}\, d\xi = \int \frac{M+M'}{E(J+I')}\eta\, d\xi - \int \frac{N}{ES}\, d\xi = 0.$$

D'autre part, on a cette fois

$$M + M' = \mu + (A + A') + (B + B')x - Qy.$$

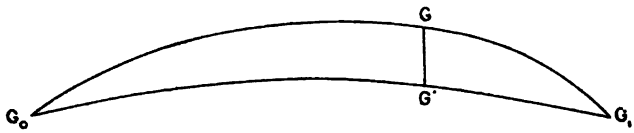
Il est évident qu'en substituant dans les trois équations précédentes cette valeur à $M+M'$, on obtiendra pour déterminer $(A+A')$ $(B+B')$ et Q identiquement les mêmes équations qui s'appliqueraient *à la détermination des trois constantes d'un arc fictif, encastré aux naissances, ayant même fibre moyenne que l'arc proposé et ayant en chaque point un moment d'inertie réduit* $J+I'$, *et enfin soumis aux charges directement appliquées à l'ouvrage.*

Les trois quantités $(A + A')$, $(B + B')$ et Q étant déterminées, le problème est résolu en vertu de ce qui a été dit plus haut.

V. — Poutres a semelles indépendantes.

Nous examinerons enfin une catégorie assez répandue d'ouvrages composés de deux poutres ou membrures courbes

Fig. 118.



réunies à leurs abouts par des articulations et solidarisées par des montants verticaux ou tiges de suspension destinées à leur transmettre les charges portées par un tablier. C'est le type connu sous le nom générique de *bow-string*.

La théorie précédente est encore applicable, sous réserve bien entendu que les montants verticaux soient suffisamment rapprochés.

Ici, on n'a pas $u_1 - u_0 = 0$; mais on a $u_1 - u_0 = u'_1 - u'_0$, les abouts des deux poutres étant solidaires.

D'autre part, on a pour les poussées Q et Q' des deux poutres des valeurs égales et de signe contraire $Q' = -Q$.

Quant à AA', BB', ils sont nuls.

Dans ces conditions, l'expression de $M + M'$ est

$$M + M' = \mu - Q(y - y').$$

L'équation qui exprime l'égalité

$$u_1 - u_0 = u'_1 - u'_0$$

peut s'écrire

$$\int \frac{M\eta\, d\xi}{EJ} - \int \frac{N}{ES}\, d\xi = \int \frac{M'\eta'\, d\xi}{EJ'} - \int \frac{N'}{ES'}\, d\xi,$$

ou encore

$$\int \frac{(M + M')}{E(J + J')}(\eta - \eta')\, d\xi - \int \frac{N}{ES}\, d\xi + \int \frac{N'}{ES'}\, d\xi = 0,$$

ou enfin, en remplaçant N et N′ par Q et (— Q) et M + M′ par sa valeur,

$$\int \frac{\mu(\eta - \eta')}{E(J + J')} d\xi - Q \int \frac{(\eta - \eta')^2}{E(J + J')} d\xi - Q \int \left(\frac{1}{ES} + \frac{1}{ES'}\right) d\xi = 0.$$

Cette équation est identique à celle qu'on obtiendrait pour calculer la poussée d'un *arc fictif articulé aux naissances dont la fibre moyenne aurait en chaque point l'ordonnée* $y - y'$, *dont le moment d'inertie réduit serait* $J + J'$, *dont la section aurait pour valeur* S'' *donnée par l'équation* $\frac{1}{S''} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S'}$, *et qui enfin serait soumis aux charges directement appliquées à l'ouvrage.*

Bien entendu, y' sera généralement de signe contraire à y, de sorte que la différence $y - y'$ sera en réalité la somme des ordonnées des deux courbes, c'est-à-dire en tout cas la distance verticale qui les sépare et qu'on peut appeler la *hauteur du bow-string.*

CHAPITRE XIV.

QUELQUES RÈGLES SPÉCIALES DE CALCUL.

I. — Flexion des pièces a forte courbure.

Quand nous avons donné la définition des pièces prismatiques, nous avons fait cette restriction que le rayon de courbure de l'axe longitudinal devait être grand comparativement aux dimensions transversales de la pièce, mais nous ne l'avons alors justifiée que par cette considération que les plans de deux sections normales successives devaient se couper suivant une droite extérieure à la poutre, afin qu'on puisse considérer la poutre entière comme formée de la réunion de tous les prismes élémentaires, et cela impliquait seulement que le rayon de courbure fût plus grand que la plus grande dimension de la pièce.

En étudiant la déformation d'un prisme élémentaire, nous avons été amené, pour établir ou pour justifier les formules simples usuelles,

$$\varphi - \varphi' = \frac{M}{EI} d\sigma$$

ou

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{M}{EI},$$

à supposer plus explicitement que le rayon de courbure était relativement grand.

A vrai dire, cela n'a aucunement influé sur l'hypothèse d'après laquelle s'est édifiée toute la théorie des efforts dus à la flexion, et qui consiste à supposer que les actions normales s'exerçant dans une section transversale sont proportionnelles en chaque point à la distance de ce point à un certain axe neutre. Mais cette hypothèse elle-même, comme d'ailleurs toute autre hypothèse de même nature, part de ce principe que la loi de répartition des efforts normaux ne dépend pas de la courbure de la pièce au voisinage de la section considérée et demeure la même que si la pièce y était

localement remplacée par un élément droit. Ce principe peut être exact quand la courbure est faible et même quand la courbure varie dans de larges limites, mais il n'y a aucune raison de le considérer comme un principe nécessaire. Il est assez vraisemblable, au contraire, que la courbure de la pièce joue un rôle plus ou moins important et que, pour des courbures très fortes, la loi de répartition linéaire, comme tout autre d'ailleurs qui ne tiendrait pas compte de la courbure, peut cesser d'être suffisante.

Il est difficile de s'en remettre à l'expérience du soin de décider à partir de quel moment une hypothèse quelconque cesse d'être exacte. Il est impossible, en effet, de saisir expérimentalement, avec une précision suffisante, la loi de répartition des efforts moléculaires dans l'intérieur du solide. On en est réduit à l'étude de conséquences plus ou moins indirectes, sur l'interprétation desquelles il faut souvent faire des réserves.

Ainsi, quand on s'est adressé à des expériences de rupture de pièces à forte courbure, telles que des ruptures de crochets d'attelage, on n'a pas toujours trouvé des résultats expérimentaux concordant avec certaines déductions tirées des formules de la Résistance des Matériaux. Mais ces discordances ne prouvent rien, attendu qu'à la base de la Résistance des Matériaux, comme à la base de la théorie de l'Élasticité elle-même, on suppose *a priori* que l'on ne s'occupe que de phénomènes élastiques. Une fois la limite d'élasticité dépassée, et à plus forte raison lorsque l'on atteint la limite de rupture du métal, on ne peut plus tirer valablement aucune déduction de formules qui toutes supposent l'élasticité parfaite de la matière.

Toutefois certains faits d'expérience, assez mal expliqués encore, s'accommodent mal de l'hypothèse de la répartition linéaire des efforts dans une section transversale.

On sait que, quand une pièce de métal présente un coude brusque, elle se brise sous des efforts qui parfois sont très faibles et qui, d'après les formules ordinaires, ne devraient amener qu'une fatigue locale inférieure à la limite d'élasticité. Ce phénomène est surtout frappant quand la pièce présente un angle rentrant à arêtes vives. Si, pour une cause quelconque, une fissure imperceptible s'est produite le long de cette arête vive, elle se propage dans toute la pièce sous l'influence d'efforts tout à fait minimes. On est

donc conduit pratiquement à prohiber les angles rentrants à arêtes vives, et même les coudes brusques. Quand une pièce doit nécessairement présenter un coude, on raccorde les faces en regard par un *congé* plus ou moins important.

Au point de vue théorique, il est assez *curieux* de constater que l'explication de ces faits peut être trouvée dans une application rigoureuse et mathématique de *l'hypothèse de Bernoulli d'après laquelle les sections transversales doivent demeurer planes.*

Il n'est pas inutile de s'arrêter un peu, à cette occasion, sur cette hypothèse, qui est souvent prise comme base de la Résistance des Matériaux, et sur sa véritable signification.

Prise à la lettre, elle est évidemment inexacte, au moins dans le cas général de la flexion dite *composée*, c'est-à-dire lorsque le moment fléchissant n'est pas constant et qu'il y a par suite un effort tranchant $T = \frac{dM}{ds}$. Les sections transversales se déforment par suite des glissements relatifs des différentes fibres d'un même prisme élémentaire. On a d'ailleurs pu observer expérimentalement des déformations du contour des sections intermédiaires ainsi que des déformations dans l'étendue des sections extrêmes de barreaux prismatiques fléchis. Quand nous étudierons les phénomènes de torsion, nous verrons également que les sections transversales doivent subir des déformations.

Mais cela ne fait nullement obstacle à ce que l'on tire parti de l'hypothèse de Bernoulli, en ce qui concerne les effets propres dus à la flexion, considérée comme si elle était seule, et en faisant abstraction de ceux qui proviennent de l'effort tranchant et éventuellement de la torsion. Il y a indépendance de ces différents effets, si l'on admet la loi de Hooke généralisée, et il serait bien difficile de ne pas l'admettre.

A un autre point de vue, on peut observer que les déformations qui ont été constatées pour des sections primitivement planes demeurent toujours petites, et assimilables à des infiniment petits par rapport aux dimensions de la section transversale, et cela quelle que soit la longueur des barreaux observés. Il est légitime d'en conclure que les *variations* de ces déformations sur une longueur *ds*, assimilable à un infiniment petit du premier ordre, sont

des quantités infiniment petites du second ordre, c'est-à-dire peuvent être considérées comme négligeables par rapport à ds et par rapport aux dimensions transversales de la section. Dès lors, si l'on ne s'occupe que des déformations relatives de deux sections infiniment voisines, c'est-à-dire si l'on suppose ramenés dans un plan les différents points de l'une d'elles, les points de l'autre seront également ramenés dans un plan, en négligeant seulement des infiniment petits du second ordre. Telle paraît être la signification qu'il faut attribuer au principe de Bernoulli, sans s'attacher aux termes trop absolus dans lesquels on l'énonce.

Lorsque la courbure de la pièce est faible, nous avons vu au Chapitre VI que l'hypothèse de la répartition linéaire des tensions dans la section conduit à admettre (tant pour l'effort normal que pour le moment fléchissant) que le déplacement relatif de deux sections infiniment voisines peut être assimilé à un mouvement d'ensemble résultant de deux rotations, l'une autour du centre de courbure, l'autre autour du centre de gravité. Dans ce cas, les deux hypothèses se trouvent équivalentes.

Mais nous ne sommes parvenus à ce résultat qu'à condition de négliger le facteur $\frac{v+\rho}{\rho}$, que nous avons supposé voisin de l'unité, parce que ρ était supposé grand par rapport à v. Pour trouver des résultats conformes à l'hypothèse de Bernoulli lorsque $\frac{v+\rho}{\rho}$ s'écarte de l'unité, il aurait fallu multiplier par $\frac{\rho}{v+\rho}$ la valeur des efforts. Au lieu d'une loi linéaire de la forme

$$n = k(e+v),$$

e étant la distance de l'axe neutre au centre de gravité, il eût fallu supposer

$$n = k(e+v)\frac{\rho}{\rho+v}.$$

Ce résultat peut du reste s'établir directement comme conséquence de l'hypothèse de Bernoulli. Considérons en effet le prisme élémentaire ABA'B' projeté sur le plan moyen. Soit $OG = \rho$ le rayon de courbure, et soit $A'_1B'_1$ la nouvelle position relative prise par A'B' après déformation, de sorte que la fibre EE' à la distance e de la fibre moyenne ne comporte aucun allongement ni raccourcissement.

Le raccourcissement de la fibre MM'_1 à la distance v de la fibre moyenne sera

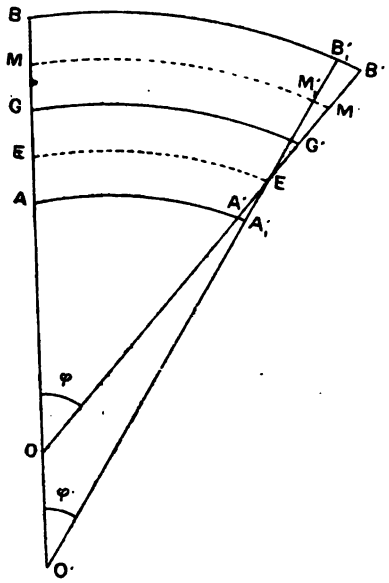
$$M'M'_1 = (e + v)(\varphi - \varphi'),$$

et son raccourcissement proportionnel sera

$$\frac{M'M'_1}{MM'} = \frac{(e + v)(\varphi - \varphi')}{(\rho + v)\varphi} = k\rho\frac{e + v}{\rho + v},$$

en désignant par K un coefficient convenable. Il en sera de même

Fig. 119.



de la tension élémentaire n qu'on lui suppose toujours proportionnelle.

La forme ainsi attribuée *a priori* à n, savoir

$$n = k(e + v)\frac{\rho}{\rho + v},$$

montre que l'on aurait $n = \infty$ si l'on pouvait avoir $v = -\rho$. Cela pourra arriver précisément pour une pièce présentant un angle rentrant, le point O de la figure venant alors se confondre avec le point A. En ce point, n sera infini, quel que soit d'ailleurs le coefficient K.

On pourrait recommencer la théorie de la flexion en partant de cette nouvelle expression de n. Les deux constantes K et e, ou bien K et Ke, se détermineraient toujours par les deux conditions

$$N = \Sigma n \, dS,$$
$$M = \Sigma n v \, dS.$$

Si l'on pose

$$S' = \int \frac{\rho}{\rho + v} dS, \qquad H' = \int \frac{\rho}{\rho + v} v \, dS, \qquad I' = \int \frac{\rho}{\rho + v} v^2 \, dS,$$

ces deux conditions s'écriront :

$$S' ke + H' k = N,$$
$$H' ke + I' k = M.$$

Tout se passera comme si aux éléments dS de la surface on substituait des éléments fictifs $dS' = dS \times \frac{\rho}{\rho + v}$. On a évidemment

$$S' < S, \qquad H' < 0, \qquad I' < I.$$

On retrouverait des formules de la forme habituelle, à condition de considérer, à la place de la fibre moyenne, une fibre moyenne fictive lieu des centres de gravité des éléments fictifs dS'.

On peut d'ailleurs trouver pour Ke une expression qui ne fait intervenir que les éléments réels de la section. En effet, si l'on prend l'équation des moments, non plus par rapport au centre de gravité de la section, mais par rapport au point qui correspond au centre de courbure, on obtient

$$M + N\rho = \Sigma n (v + \rho) \, dS,$$

ou, en développant,

$$M + N\rho = \Sigma k \rho (e + v) \, dS = k e \rho S,$$

d'où

$$ke = \frac{M + N\rho}{\rho S}.$$

Dans le cas particulier où l'effort normal serait nul, cette formule se réduit à

$$ke = \frac{M}{\rho S}.$$

Dans ce même cas, la première équation de condition écrite plus

haut se réduit de son côté à

$$S'e + H' = 0,$$

d'où

$$e = -\frac{H'}{S'} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{M}{\rho S e}.$$

Pour préciser, supposons que la section se réduise à un rectangle de largeur b et de hauteur h et calculons S′ et H′. On a $dS = b\,dv$ et les limites d'intégration sont $v = \pm\frac{h}{2}$.

$$S' = \int \frac{b\rho\,dv}{\rho + v} = b\rho\left[\log(\rho + v)\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b\rho \log\frac{2\rho + h}{2\rho - h},$$

$$H' = \int \frac{b\rho v\,dv}{\rho + v} = b\rho\int\frac{(v + \rho - \rho)\,dv}{v + \rho} = b\rho h - \rho S'.$$

On en déduit

$$e = -\frac{H'}{S'} = \rho - \frac{h}{\log\frac{2\rho + h}{2\rho - h}}.$$

Prenons un exemple numérique et supposons que ρ ait la valeur assez faible $\rho = 3\,h$. Le calcul donne $e = 0{,}029\,h$ environ. On en déduit

$$k = \frac{M}{\rho S e} = \frac{M}{bh^2 \times 0{,}087} = \frac{M}{bh^2} \times 11{,}49.$$

Au point extrême de la section situé du côté convexe, on a

$$v + e = 0{,}529\,h \qquad \text{et} \qquad \frac{\rho}{\rho + v} = \frac{3}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{6}{7},$$

d'où

$$n = \frac{6M}{bh^2} \times 0{,}868.$$

Au point extrême de la section situé du côté concave, on a

$$v + e = -0{,}471\,h \qquad \text{et} \qquad \frac{\rho}{\rho + v} = \frac{6}{5},$$

d'où

$$n = \frac{6M}{bh^2} \times 1{,}082 \text{ (en valeur absolue)}.$$

Si l'on compare ces résultats à celui que l'on trouverait par la formule ordinaire : $n = \frac{Mh}{2I} = \frac{6M}{bh^2}$, on voit qu'il y a une petite

atténuation du côté convexe et une aggravation plus faible du côté concave.

Cela précise d'une manière assez nette les limites dans lesquelles l'hypothèse de la répartition linéaire des efforts et l'hypothèse de Bernoulli, d'après laquelle la répartition se ferait suivant la loi hyperbolique

$$n = k(e + v)\frac{\rho}{\rho + v},$$

sont concordantes. Les résultats sont pratiquement les mêmes dès que le rayon de courbure est trois ou quatre fois plus grand que la hauteur de la poutre.

Lorsque la courbure sera plus accentuée, ce qui n'arrive que pour des pièces exceptionnelles, crochets d'attelage, anneaux, coudes de tuyaux, etc., il pourra être opportun de substituer à la règle ordinaire, un calcul basé sur l'hypothèse de Bernoulli, qui donnera en tout cas un surcroît de sécurité.

II. — Poutres de hauteur rapidement variable.

La définition que nous avons donnée des poutres prismatiques supposait que la section transversale de la poutre demeurait constante en se déplaçant normalement à l'axe longitudinal, ou fibre moyenne.

Il arrive bien souvent que la section ne demeure pas constante, mais varie progressivement d'un bout à l'autre. Si ces variations sont lentes et au total peu considérables, le mieux que l'on ait à faire est d'appliquer les résultats relatifs aux poutres de section constante sans se dissimuler qu'il s'agit là d'une approximation. Nous avons toujours opéré ainsi en parlant de poutres à section variable. Les efforts intérieurs ont été supposés les mêmes que si la poutre avait eu au droit de la section transversale considérée une section S et un moment d'inertie I constants.

Cette approximation est-elle suffisante lorsque la section est très rapidement variable? Il est permis d'en douter et conforme à la prudence de rechercher un moyen d'effectuer, le cas échéant, une correction conduisant à des efforts intérieurs majorés.

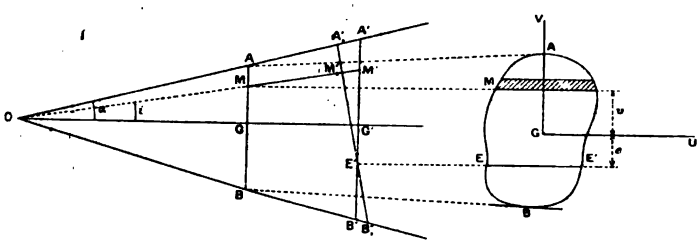
Le problème serait assez complexe et probablement même insoluble si l'on voulait le traiter avec rigueur et dans toute sa généra-

lité. Mais on peut trouver quelques indications assez rationnelles dans certains cas simples.

Bornons-nous au cas d'une poutre dont l'axe longitudinal oG serait rectiligne et où sa section transversale, d'ailleurs symétrique par rapport à un plan moyen, serait telle que chaque fibre élémentaire y découpe un rectangle dS de largeur invariable et de hauteur proportionnelle à la distance oG. Chaque fibre a ainsi son axe incliné d'un certain angle i par rapport à l'axe longitudinal de la poutre.

Considérons un prisme élémentaire de longueur GG′ $= ds$ et compris entre les deux sections transversales AB et A′B′. Puis envisageons spécialement la fibre élémentaire dont l'axe serait

Fig. 120.



projeté en MM′ et qui découperait sur le plan AB un rectangle $d\mathrm{S} = u\,dv$. La section normale de cette fibre serait $d\mathrm{S} \times \cos i$.

On peut se proposer de rechercher l'intensité n de l'effort de traction, ou de compression, auquel se trouve soumise la fibre dont il s'agit dans le sens de sa longueur, et admettre que c'est cette intensité n qui définit en somme la fatigue propre à cette fibre. L'effort total auquel elle se trouve soumise est

$$n\,d\mathrm{S}\cos i$$

et sa composante horizontale est

$$n\,d\mathrm{S}\cos^2 i.$$

D'un autre côté, quelle loi de répartition peut-on raisonnablement supposer pour n, autrement dit comment n varie-t-il avec $v = \mathrm{GM}$? On peut *a priori* supposer une loi linéaire de la forme

$$n = k(e + v).$$

Cela se trouve, du reste, conforme au principe de Bernoulli sur la conservation des sections planes, interprété comme nous l'avons fait précédemment. Si l'on suppose, en effet, que le déplacement relatif de la section A′B′ par rapport à la section AB consiste en une rotation φ autour d'un axe EE′, projeté en E′, le raccourcissement d'un élément de fibre $MM' = \frac{ds}{\cos i}$ sera

$$M'M'_1 = (e + v)\frac{\sin\varphi}{\cos(i - \varphi)}$$

ou approximativement

$$M'M'_1 = (e + v)\frac{\sin\varphi}{\cos i},$$

en considérant φ comme un infiniment petit par rapport à l'angle fini i. Le raccourcissement proportionnel sera donc bien de la forme $k(e + v)$ et il est naturel d'attribuer la même forme à l'effort longitudinal n qui lui est proportionnel.

Cela posé, pour déterminer les constantes k et e, il faut écrire les deux équations qui expriment l'égalité, dans la section transversale AB, de la force extérieure et de la résultante des efforts intérieurs, savoir :

$$N = \Sigma n \cos^2 i \, dS,$$
$$M = \Sigma n v \cos^2 i \, dS.$$

Ce sont les équations habituelles, avec cette seule différence que les éléments de surface dS de la section transversale sont affectés d'un coefficient de réduction égal à $\cos^2 i$.

On aura donc, au fond, à calculer une aire réduite S′ et un moment d'inertie réduit I′ par les formules

$$S' = \Sigma \cos^2 i \, dS,$$
$$I' = \Sigma v^2 \cos^2 i \, dS,$$

et l'on trouvera pour n l'expression

$$n = \frac{N}{S'} + \frac{Mv}{I'}.$$

Lorsqu'on peut négliger les angles tels que i, on retombe sur les formules ordinaires et, dans le cas contraire, on trouve des résultats majorés, puisque l'on a en définitive réduit l'importance de tous les éléments de la section transversale.

Cette théorie ne donne rien et ne peut rien donner en ce qui concerne la répartition des efforts tangentiels dans la section transversale. Tout ce que l'on sait *a priori*, c'est que la résultante de ces efforts tangentiels doit être nulle si l'effort tranchant est nul, et plus généralement doit être égale à l'effort tranchant T.

Il nous paraît inutile de pousser plus loin des considérations générales de cet ordre. La règle qui se dégage de l'exemple simple choisi peut rendre des services, en tant qu'elle constitue une mesure de prudence, et il conviendra d'ailleurs de la modifier en tant que de besoin d'après les circonstances.

Nous nous bornerons à en faire l'application à un exemple simple envisagé par M. Résal. C'est celui d'une section rectangulaire, de largeur constante b et de hauteur variable h.

Soit α l'angle $\widehat{AOG}$ et de la distance OG. On a

$$\frac{h}{2} = d \operatorname{tang} \alpha \qquad \text{et} \qquad v = d \operatorname{tang} i,$$

d'où

$$dv = d \frac{di}{\cos^2 i}.$$

Calculons S′ et I′, nous aurons :

$$S' = \int \cos^2 i \, dS = bd \int_{-\alpha}^{+\alpha} di = bd \times 2\alpha = bh \frac{\alpha}{\operatorname{tang} \alpha},$$

$$I' = \int v^2 \cos^2 i \, dS = bd^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \operatorname{tang}^2 i$$

$$= 2bd^3 (\operatorname{tang} \alpha - \alpha) = \frac{bh^3}{4 \operatorname{tang}^3 \alpha} (\operatorname{tang} \alpha - \alpha).$$

Telles seront donc les formules qu'il convient d'adopter pour le calcul de la fatigue à la flexion, lorsque l'angle α est un peu grand.

M. Résal a calculé que pour $\alpha = 30°$ on a

$$S' = 0{,}90 S \qquad \text{et} \qquad I' = 0{,}83 I.$$

Pour $\alpha = 45°$ on aurait

$$S' = 0{,}78 S \qquad \text{et} \qquad I' = 0{,}64 I.$$

Dans ce dernier cas, on peut donc s'attendre à des majorations de fatigue assez importantes.

III. — Pièces chargées de bout.

En résistance des matériaux, on suppose que la déformation subie par le corps est suffisamment faible pour qu'on puisse la négliger lorsqu'on écrit les équations d'équilibre des forces extérieures. Quand il n'en est plus ainsi, les équations d'équilibre contiennent des termes qui dépendent des déformations et ne sont plus linéaires par rapport aux forces extérieures. Le principe de la superposition des forces n'est plus applicable.

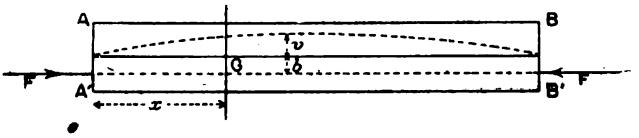
Il en est ainsi, par exemple, pour les ressorts, pour les câbles de ponts suspendus, etc. Nous traiterons ici un autre cas qui a beaucoup d'importance, celui des pièces comprimées dans le sens de leur longueur, que l'on appelle pièces chargées *de bout*, ou *par bout*.

Quand nous avons eu à parler de pièces comprimées, nous les avons jusqu'ici assimilées à des pièces tendues, le phénomène de la compression étant considéré comme l'inverse du phénomène de la traction. Il en est bien ainsi quand on a affaire à des prismes relativement courts par rapport à leurs dimensions transversales, et pour lesquels l'axe longitudinal est exactement une ligne droite, suivant laquelle passent exactement les résultantes des forces appliquées aux bases. Mais en pratique ces deux dernières conditions ne peuvent être remplies avec une exactitude absolue et, alors qu'elles sont indifférentes dans le cas de la traction, elles ont une grande importance dans le cas de la compression, qui peut devenir en quelque sorte un phénomène d'équilibre instable. Pour certaines valeurs de la force de compression, une déformation, si minime soit-elle, qui commence à se produire dans le sens transversal, peut aller en s'amplifiant indéfiniment sans augmentation de cette force de compression. La pièce comprimée *flambe*, suivant l'expression consacrée, ou périt par *flambement*.

Euler a donné jadis l'explication de ce fait, un peu surprenant au premier abord, en montrant qu'il est dû à l'influence dans les équations d'équilibre de termes dus à la déformation. Soit une pièce dont l'axe AB est supposé rigoureusement rectiligne. Supposons qu'on la comprime en lui appliquant deux forces F agissant suivant une parallèle A′B′ à l'axe longitudinal et à une distance b de celui-ci. En chaque section, telle que G, la force extérieure

passera à la distance b du centre de gravité et il y aura, non pas compression simple, mais flexion et compression à la fois. L'axe de la poutre va prendre une certaine courbure, de sorte que le point G, d'abscisse x, va se déplacer vers le haut d'une certaine

Fig. 121.



quantité v. Dans la situation d'équilibre, le moment fléchissant, qui était primitivement $-Fb$, sera $-F(b+v)$.

Si l'on tient compte du terme complémentaire Fv dû à la déformation, l'équation de déformation élastique qui nous a conduit, pour les poutres droites, à la relation générale

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

nous donnera ici

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(v+b)$$

ou, en posant $\frac{F}{EI} = \alpha^2$,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = -\alpha^2 b.$$

Cette équation différentielle s'intègre facilement. Une intégrale particulière est

$$v = -b,$$

et l'intégrale générale de l'équation sans second membre est

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x,$$

A et B étant deux constantes.

L'intégrale générale de l'équation complète est donc de la forme

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - b.$$

Les constantes A et B se détermineront par les conditions aux extrémités. Pour $x = 0$ et pour $x = l$, on doit avoir $v = 0$, d'où les deux conditions

$$B - b = 0.$$

$$A \sin \alpha l + B \cos \alpha l - b = 0;$$

on en déduit

$$B = b,$$
$$A = \frac{b(1-\cos\alpha l)}{\sin\alpha l}.$$

L'expression définitive de v est donc donnée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{v+b}{b} = \frac{1-\cos\alpha l}{\sin\alpha l}\sin\alpha x + \cos\alpha x.$$

Quand α est très petit, et par suite aussi F, le rapport $\frac{v+b}{b}$ demeure fini en tous les points de la poutre. Il en est de même quand α augmente tout en restant inférienr à la valeur correspondant à $\alpha l = \pi$. Mais si α atteint cette valeur $\frac{\pi}{l}$, $\sin\alpha l$ devient égal à zéro et en tous les points pour lesquels x est différent de zéro et de l, $\sin\alpha x$ est fini. Il en résulte que le rapport $\frac{v+b}{b}$ tend vers l'infini en tous les points de la poutre quand α tend vers cette limite $\frac{\pi}{l}$. La déformation de la poutre ira donc en s'exagérant de plus en plus jusqu'à rupture complète.

La valeur critique de F est donc donnée par la formule

$$\alpha l = \pi \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2 l^2 = \pi^2,$$

d'où

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Tant que F demeure en dessous de cette valeur critique, le phénomène de la compression du prisme, même sous l'action de forces désaxées, demeure un phénomène conduisant à un état d'équilibre stable. Mais quand il atteint la valeur critique, la pièce comprimée se trouve dans un état d'équilibre instable et doit *flamber*.

Cette valeur critique ne dépend d'ailleurs aucunement de l'écart initial b existant entre l'axe de la poutre et la ligne d'action des forces. Elle serait la même, si minime que soit l'erreur d'implantation ou bien l'erreur de construction qui aurait rendu l'axe de la pièce un peu courbe. Or, de telles erreurs sont inévitables en pratique.

Par suite, si la valeur critique $F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ est inférieure à la valeur

$$F = NS$$

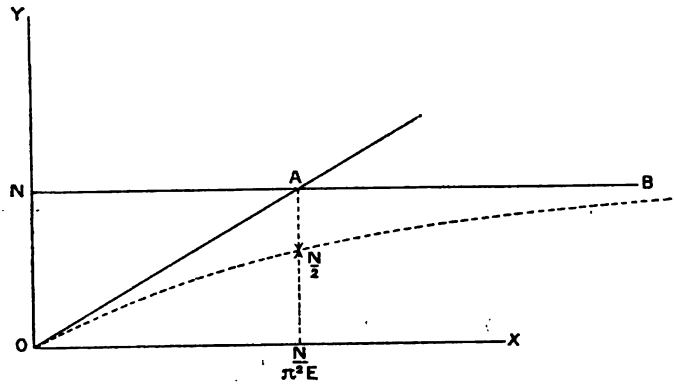
que l'on pourrait se permettre d'atteindre, d'après la surface S de la section, et d'après la limite d'élasticité N de la matière, il faut considérer cette valeur critique comme fournissant une nouvelle limite à substituer à la limite d'élasticité, et déterminer la limite de sécurité en conséquence, au quart ou au cinquième de cette nouvelle limite qui est

$$\frac{F}{S} = \frac{\pi^2 EI}{S l^2} = \pi^2 E \frac{r^2}{l^2}.$$

La limite ainsi obtenue, que nous appellerons la limite d'Euler, ne dépend que du carré du rapport du rayon de gyration de la section à la longueur de la pièce. On peut la représenter graphiquement de la manière suivante :

Si l'on désigne par X le rapport $\frac{r^2}{l^2}$ et par Y la limite d'Euler, on a $Y = \pi^2 EX$, si bien que la courbe représentative de Y est une

Fig. 122.



droite OE partant de l'origine avec un coefficient angulaire $\pi^2 E$.

Si l'on trace la droite NA parallèle à OX et telle que son ordonnée $ON = N$, limite d'élasticité, cette droite coupera OE en un point A, dont l'abscisse sera telle que

$$N = \pi^2 EX \qquad \text{ou} \qquad X = \frac{r^2}{l^2} = \frac{N}{\pi^2 E}.$$

Pour l'acier, on a environ

$$N = 24 \times 10^6 \qquad \text{et} \qquad E = 20 \times 10^9 ;$$

on trouve pour le point d'intersection environ

$$X = 0,00012, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{l}{r} = 90 \text{ environ.}$$

C'est donc seulement pour les pièces dont la longueur dépasse 80 à 90 fois le rayon de gyration de la section transversale qu'il y aurait lieu de se préoccuper du flambement et de prendre la limite d'Euler. Pour les autres, on pourrait prendre la limite d'élasticité N.

Il y a un certain nombre d'expériences de M. Considère qui sont d'accord avec cette indication.

La conclusion qui résulterait de ce que nous venons de dire, c'est que la courbe complète qui représenterait la limite admissible pour $\frac{F}{S}$ serait constituée par la portion OA de la droite OE et par la portion AB de l'horizontale NAB.

A certains points de vue, il peut paraître gênant d'avoir à se préoccuper de savoir, pour une valeur de $\frac{r^2}{l^2}$, si l'on doit prendre telle ou telle branche de courbe, et c'est là, sans doute, une des raisons à donner de l'adoption par beaucoup d'ingénieurs d'une formule qui porte en France le nom de Rankine, et qu'à l'étranger on appelle aussi formule de Navier. Cette formule fournit pour la limite à substituer à la limite d'élasticité dans les pièces comprimées l'expression suivante :

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{N l^2}{\pi^2 E r^2}}.$$

Continuons à poser $\frac{r^2}{l^2} = X$, et construisons la courbe représentative de N'.

On a

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{N}{\pi^2 E X}} = \frac{NX}{X + \frac{N}{\pi^2 E}}.$$

La courbe représentant N' est donc une hyperbole ayant pour asymptote horizontale la droite $y = N$ (puisque pour $X = \infty$ le rapport $\frac{NX}{X+K}$ tend vers N). Elle passe par l'origine où son coefficient angulaire est $\pi^2 E$ et où, par suite, elle est tangente à la

droite OE. C'est donc une courbe de raccordement des deux portions utiles de la courbe OAB, et qui a le mérite pratique d'être la plus simple de toutes les courbes du raccordement et de fournir toujours des résultats inférieurs aux limites théoriques. C'est une des meilleures justifications qu'on en puisse donner.

Certains ingénieurs font remarquer, il est vrai, que peut-être la formule de Rankine exagère la prudence. Pour la valeur $X = \frac{N}{\pi^2 E}$, par exemple, elle fournit la valeur $N' = \frac{N}{2}$, tandis que la valeur critique d'Euler serait égale à N. Diverses expériences de laboratoire sur des pièces comprimées jusqu'à flambement semblent d'ailleurs leur donner raison. Mais on peut répondre qu'une prudence, même excessive, n'est jamais très dommageable.

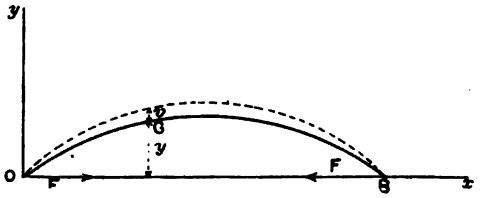
Quand on fait usage de la formule de Rankine, au lieu de calculer la nouvelle limite N' à substituer à la limite d'élasticité N et d'en déduire une nouvelle limite de sécurité R' à comparer à la fatigue $R = \frac{F}{S}$ de la pièce, on procède ordinairement d'une manière différente qui revient d'ailleurs absolument au même. On suppose que la fatigue R de la pièce est majorée et devient égale à $\frac{F}{S}\left(1 + \frac{N l^2}{\pi^2 E r^2}\right)$. Cette fatigue majorée est alors comparée à la limite de sécurité ordinaire. C'est là évidemment un pur artifice de calcul, qui ne permet nullement de conclure que dans la réalité la fatigue de la pièce comprimée soit nécessairement majorée et atteigne la valeur ci-dessus.

Dans toutes les formules que nous avons établies, le rayon de gyration r est celui qui correspond à la direction dans laquelle est compté l'écart initial b. Quand cette direction n'est pas précisée par les données du problème, il faut évidemment la faire coïncider avec celle qui conduit au rayon de gyration minimum.

Pièces courbes comprimées et fléchies. — La théorie qui précède n'est pas absolument particulière aux pièces de forme rectiligne, ni aux pièces qui supportent exclusivement des compressions F à leurs deux bouts. Elle s'applique même à des pièces courbes, soumises à des efforts transversaux, ou à des couples, indépendamment des compressions F s'exerçant à leurs extrémités. On trouve toujours pour F la même valeur critique donnée par la formule d'Euler.

Supposons que la fibre neutre soit la courbe OB, dont l'ordonnée y est une fonction connue de x, et soit v le déplacement vertical

Fig. 123.



du point G (xy), soit aussi $\mu(x)$ le moment fléchissant au point G, qui serait dû à toutes les forces appliquées autres que F. Le moment total sera, en prenant en compte le petit déplacement v,

$$M = \mu(x) - F(y + v).$$

D'autre part, on a l'équation différentielle

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = \mu(x) - F(y + v).$$

Posant encore $\frac{F}{EI} = \alpha^2$, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = f(x).$$

Quelle que soit la fonction $f(x)$, l'intégrale complète se composera d'une solution particulière $\varphi(x)$ de cette équation et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, qui est

$$A \sin\alpha x + B \cos\alpha x.$$

On aura donc

$$v = \varphi(x) + A \sin\alpha x + B \cos\alpha x \quad (^1).$$

Les constantes A et B se détermineront encore en écrivant que pour $x = 0$ et pour $x = l$ on a $v = 0$, ce qui donne les conditions

$$\varphi(0) + B = 0,$$
$$\varphi(l) + A \sin\alpha l + B \cos\alpha l = 0.$$

---

(1) Cela suppose, il est vrai, que $f(x)$ conserve la même définition analytique d'un bout à l'autre de la poutre. Mais il serait facile de lever cette restriction, à laquelle nous ne nous arrêterons pas.

On aura donc pour A une valeur de la forme

$$A = \frac{\varphi(0)\cos\alpha l - \varphi(l)}{\sin\alpha l}.$$

Il en résulte que, quand F atteint la valeur qui conduit à $\alpha l = \Pi$, c'est-à-dire la valeur $F = \frac{\Pi^2 EI}{l^2}$, la constante A devient infinie et qu'il en est de même pour v.

Indépendamment de toute autre considération sur la fatigue maxima aux différents points de la pièce envisagée, il faut donc que la force de compression F ne dépasse pas cette valeur critique, et même se tienne au-dessous avec un coefficient de sécurité convenable. Une fois les calculs de résistance effectués à la façon ordinaire, il y a donc lieu, pour cet objet, à une vérification spéciale. On comparera F à la valeur critique $\frac{\Pi^2 EI}{l^2}$, ou bien $\frac{F}{S}$ à $\Pi^2 E \frac{r^2}{l^2}$, limite d'Euler.

On se plaeera encore dans des conditions plus sévères au point de vue de la sécurité si l'on substitue à la limite d'Euler la limite de Rankine, et si l'on compare $\frac{F}{S}$ à

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{N l^2}{\pi^2 E r^2}},$$

ou, ce qui revient au même, si l'on compare à la limite d'élasticité N l'expression $\frac{F}{S}\left(1 + \frac{N l^2}{\Pi^2 E r^2}\right)$.

Désignons par ε le coefficient de sécurité $\left(\frac{1}{4}\text{ ou }\frac{1}{5}\right)$ qu'on croira devoir s'imposer, la condition précédente reviendra à l'inégalité

$$\frac{F}{S}\left(1 + \frac{N l^2}{\pi^2 E r^2}\right) < \varepsilon N.$$

D'autre part, en évaluant pour une section quelconque de la pièce la fatigue à la façon ordinaire, on aura déjà été amené à satisfaire à une condition telle que

$$\frac{F}{S} + \frac{M h}{I} < \varepsilon N,$$

le terme $\frac{Mh}{I}$ représentant la fatigue due à la flexion, au point con-

sidéré, du côté de la fibre la plus comprimée, de sorte qu'il ait une valeur positive.

Dans ces conditions, il est bien évident qu'on se placera encore dans des conditions plus sévères au point de vue de la sécurité, si l'on remplace les deux inégalités précédentes, qui sont en réalité indépendantes, par l'inégalité unique

$$\frac{F}{S}\left(1+\frac{Nl^2}{\pi^2 E r^2}\right)+\frac{Mh}{I}<\varepsilon N.$$

Beaucoup d'ingénieurs acceptent ce résultat au nom de la sécurité. On le traduit d'une façon simple en disant *que l'on doit majorer les efforts* $\frac{F}{S}$ *dus à la compression, en les multipliant par le coefficient de Rankine*. D'autres ingénieurs trouvent cette règle un peu excessive.

Il est à remarquer que, dans les pièces à la fois comprimées et fléchies, si le terme $\frac{Mh}{I}$, fatigue due à la flexion, est prépondérant par rapport au terme $\frac{F}{S}$, fatigue due à la compression, la majoration due à l'intervention du coefficient de Rankine est peu considérable et devient sans intérêt.

Quand on a affaire à un arc, par exemple, le flambement dans le plan moyen de la poutre est peu à craindre. C'est surtout dans le sens transversal qu'il y a lieu de s'en préoccuper, et cela d'autant plus que les moments d'inertie des poutres sont faibles dans ce sens transversal.

Poutres encastrées à leurs deux extrémités. — Nous avons supposé jusqu'ici que les poutres n'étaient soumises à leurs extrémités qu'à la condition $v=0$, autrement dit qu'elles étaient articulées, le coefficient angulaire $\frac{dv}{dx}$ pouvant devenir quelconque pour $x=0$ et $x=l$. Nous supposerons ici que $\frac{dv}{dx}$ demeure nul aux deux extrémités, autrement dit que celles-ci sont encastrées. Dans ces conditions, on doit supposer que les appuis sont capables de développer des réactions complémentaires. Celles-ci sont des inconnues du problème, et ont pour effet d'introduire dans le moment fléchissant des termes de la forme $c+dx$.

L'équation différentielle du paragraphe précédent devra donc être remplacée par une équation de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha^2 v = f(x) + c + dx,$$

dont l'intégrale sera elle-même de la forme

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C + Dx + \varphi(x).$$

Pour déterminer les quatre constantes A, B, C, D, nous aurons à écrire que $v = 0$ et $\frac{dv}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$, ce qui fournit les quatre équations

$$\begin{aligned}
B + C + \varphi(0) &= 0,\\
A\alpha + D + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 &= 0,\\
A \sin \alpha l + B \cos \alpha l + C + Dl + \varphi(l) &= 0,\\
A\alpha \cos \alpha l - B\alpha \sin \alpha l + D + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_l &= 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant de ces équations est différent de zéro dans le cas général, mais si l'effort de compression F devient tel que l'on ait à la fois $\sin \alpha l = 0$ et $\cos \alpha l = 1$, on voit facilement que ce déterminant devient nul, car il a deux colonnes identiques, celles de B et de C. Dans ces conditions, les constantes deviennent infinies. Il y a donc là un cas critique, qui se produit pour $\alpha l = 2\pi$. ou $\alpha^2 = \frac{4\pi^2}{l^2}$.

La valeur correspondante de F est donc

$$F = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

Elle est quatre fois plus grande que celle qui correspondait au cas des poutres articulées aux deux bouts.

A cette différence près, la théorie demeure la même. Indépendamment des vérifications portant sur la fatigue aux différents points de la poutre, il faudra vérifier que

$$F < \varepsilon \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

ou que

$$\frac{F}{S} < \varepsilon \frac{4\pi^2 E r^2}{l^2}.$$

Comme précédemment, on pourra substituer à l'ensemble des deux droites représentant la limite d'élasticité N et la valeur critique $\frac{F}{S} = \frac{4\Pi^2 E r_2}{l^2}$ une courbe continue représentant une limite d'élasticité fictive :

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{N}{4\pi^2 E}\frac{l^2}{r^2}},$$

valable quelle que soit la valeur de $\frac{r^2}{l^2}$, ou bien encore conserver la limite d'élasticité N en convenant de multiplier les efforts de compression $\frac{F}{S}$ par le coefficient de Rankine, qui est, dans ce cas,

$$1 + \frac{N l^2}{4\pi^2 E r^2}.$$

Nous n'aurions qu'à répéter ce qui a été dit.

Poutres encastrées à un bout et munies à l'autre bout d'une glissière ne permettant que des déplacements longitudinaux. — En procédant toujours de la même façon, on trouverait cette fois que la force de compression passe par une valeur critique lorsque l'on a la relation

$$\operatorname{tang} \alpha l = \alpha l,$$

d'où

$$\alpha = 1,433\pi \qquad \text{et} \qquad \alpha^2 = 2,057\pi^2,$$

soit approximativement $\alpha^2 = 2\pi^2$.

On a déduit pour F la valeur critique

$$F = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{F}{S} = \frac{2\pi^2 E r^2}{l^2}$$

C'est donc un cas intermédiaire entre les deux précédents.

En résumé, dans tous ces cas, ou dans d'autres analogues, la valeur critique de F et la limite d'Euler se trouveront toujours de la forme

$$F = \frac{k\pi^2 EI}{l^2}$$

ou

$$\frac{F}{S} = \frac{k\pi^2 E r^2}{l^2},$$

le coefficient étant égal à 1 pour la pièce articulée aux deux bouts,

égal à 4 pour la pièce encastrée aux deux bouts, et égal à 2 pour la pièce encastrée à un bout et simplement fixée à l'autre bout.

Si, pour des raisons de commodité ou de plus grande sécurité, on adopte la limite de Rankine, cette limite sera toujours donnée par la formule

$$N' = \frac{N}{1 + \frac{N l^4}{k \pi^2 E r^2}}.$$

Le dénominateur de l'expression précédente formera le coefficient dit de Rankine, au moyen duquel on majorera systématiquement les efforts de compression, si l'on veut encore augmenter la prudence.

IV. — Systèmes instables.

Application du travail de déformation à la recherche des valeurs critiques des charges appliquées. — Les pièces chargées de bout rentrent dans la catégorie très étendue des systèmes instables, ou pour mieux dire des systèmes qui cessent à un moment donné d'être stables lorsque les charges appliquées vont en croissant.

Bornons-nous au cas où les charges appliquées se réduisent à une force unique, dont le point d'application sur le système et dont la direction restent invariables. Il peut arriver que la forme d'équilibre du système soit telle qu'elle tende toujours à se rétablir lorsqu'elle est modifiée par une cause accidentelle quelconque, supposée d'ailleurs infiniment petite, et cela quelle que soit la grandeur de la charge considérée. Le système est alors complètement stable et la grandeur de la charge n'est limitée que par la valeur qui amènerait la rupture de la matière en quelque point. Mais il peut arriver aussi que le système soit stable pour de faibles valeurs de la charge et qu'il cesse de l'être pour une certaine valeur de celle-ci, et cela indépendamment de la considération de la rupture. La valeur dont il s'agit, et qu'on peut appeler *charge critique*, peut être inférieure ou supérieure à la valeur qui amènerait la rupture. Dans le premier cas, c'est elle qui doit déterminer évidemment la limitation de la charge.

Lorsqu'il est possible, comme dans les cas simples précédents, d'établir l'équation différentielle d'équilibre du système déformé, et qu'il est possible de l'intégrer, on parvient directement à la

détermination de la valeur critique. Mais on est vite arrêté dans cette voie par des difficultés d'analyse, inacceptables dans la pratique courante. Il est donc intéressant d'indiquer une autre méthode de recherches qui, bien qu'indirecte, est de nature à fournir rapidement des valeurs approchées de la charge critique.

Supposons qu'on fasse subir au système pris dans sa situation d'équilibre une déformation infiniment petite par l'application d'un système additionnel de forces. Connaissant la déformation subie, on pourra calculer le travail de déformation W correspondant. C'est de l'énergie sous forme potentielle. D'autre part, on pourra évaluer, connaissant le déplacement du point d'application de la charge initiale F, le travail produit par cette force, lequel sera de la forme FT.

Si l'on a $FT < W$, le système sera stable; si, au contraire, on a $FT > W$, le système sera instable, et la déformation, commencée sous l'action des forces additionnelles infiniment petites, ira en augmentant indéfiniment, grâce au travail produit par F.

La valeur critique sera donnée par l'égalité $F = \frac{W}{T}$. Il faut bien remarquer que cette valeur critique se rapporte exclusivement au mode de déformation qu'on a envisagé, ou au système des forces additionnelles qu'on a fait intervenir, et qu'elle est toujours supérieure à la valeur critique absolue. L'intervention de forces additionnelles d'une espèce donnée, ou bien l'attribution *a priori* d'un mode de déformation déterminé, équivaut à une limitation arbitraire des modes de déformation possibles, autrement dit à l'introduction de liaisons supplémentaires dans le système, et cela ne peut qu'accroître la stabilité de celui-ci.

Pratiquement, cela conduit à envisager les systèmes de forces additionnelles les plus simples de préférence aux autres.

Quand on a envisagé successivement plusieurs systèmes simples distincts, on est déjà un peu renseigné sur le degré d'approximation obtenu. Si l'on désire pousser plus loin les recherches, on peut alors faire intervenir simultanément deux des systèmes simples et introduire ainsi un coefficient variable dans la valeur de la charge critique. On disposera de ce coefficient pour rechercher le minimum correspondant de cette charge critique, minimum qui sera forcément inférieur aux valeurs précédemment obtenues.

Pour les développements de ces principes, nous renvoyons à un article de M. Timochenko, professeur à Saint-Pétersbourg, publié dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, en 1913. Nous nous bornerons à en faire quelques applications simples.

Application aux pièces chargées de bout simplement appuyées. — Supposons que, sous l'action de charges additionnelles, la forme prise par la poutre AB soit celle qui est représentée en pointillé, et soit y le déplacement du point G d'abscisse x. Soit M le moment fléchissant en ce même point et I le moment d'inertie.

Le travail de déformation W a pour expressions

$$W = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx.$$

D'un autre côté, la différence de longueur entre une courbe aplatie et sa corde a sensiblement pour valeur l'expression

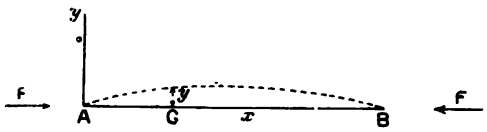
$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Par suite, le travail de la force F sera

$$\frac{F}{2}\int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{F}{2}\int \omega^2\,dx,$$

ces intégrales s'appliquant à la longueur entière de la poutre. Si la déformation est symétrique par rapport au milieu, on pourra se

Fig. 124.



contenter de les prendre pour la moitié de la longueur seulement.

L'expression de la valeur critique sera donc mise sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$F = \frac{\int \frac{M^2}{EI}\,dx}{\int \omega^2\,dx} = \frac{\int EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}.$$

A. *Cas de la section constante.* — Supposons qu'on prenne comme système additionnel une force unique appliquée au milieu, ou que l'équation de la ligne élastique soit de la forme

$$y = k\left(\frac{3}{4}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right)$$

pour la demi-poutre de gauche, qu'il suffit d'envisager.

Le facteur k, et tout autre coefficient constant, pouvant être supprimé, puisqu'il disparaîtra dans le quotient, nous prendrons

$$y = 3l^2x - 4x^3.$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = 3l^2 - 12x^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -24x.$$

En développant le calcul, on trouve

$$F = \frac{EI}{l^2} \times 10.$$

Supposons en second lieu qu'on prenne comme système additionnel une force uniformément répartie, ou que l'équation de la ligne élastique soit de la forme

$$y = l^3x - 2lx^3 + x^4.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = l^3 - 6lx^2 + 4x^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(lx - x^2).$$

En développant le calcul, on trouve

$$F = \frac{EI}{l^2} \quad 9,88.$$

On voit combien ces deux valeurs sont déjà rapprochées de la valeur théorique de la charge critique, qui est

$$F = \frac{EI}{l^2} \times \pi^2 = \frac{EI}{l^2} \times 9,869.$$

On obtiendrait une approximation encore plus grande en com-

binant les deux systèmes additionnels et en attribuant à la ligne élastique une valeur de la forme

$$y = 3l^2x - 4x^3 + Z(l^3x - 2lx^2 + x^4).$$

On arriverait à une expression de la forme

$$F = \frac{EI}{l^2} \times \frac{a + bZ + cZ^2}{a' + b'Z + c'Z^2}$$

et l'on déterminerait Z de manière à rendre minimum le facteur de $\frac{EI}{l^2}$. M. Timochenko a fait le calcul et trouvé pour ce facteur la valeur 9,872, dont le degré d'exactitude dépasse les besoins réels.

Pour faire ressortir l'intérêt qu'il peut y avoir à prendre de préférence les systèmes additionnels les plus simples, et l'on peut dire les plus probables, nous ferons encore le calcul en supposant pour la ligne élastique une équation de la forme

$$y = x(l - x).$$

On trouve

$$\frac{dy}{dx} = l - 2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2$$

et

$$F = \frac{EI}{l^2} \times 12.$$

La valeur 12 est beaucoup moins approchée que les précédentes, et cela tient sans doute à ce que le système additionnel correspondant à la ligne élastique en forme de parabole est un système assez particulier, composé de deux couples égaux appliqués aux extrémités de la pièce, et que cela diminue sensiblement le degré de liberté de cette pièce.

B. *Cas d'une section variable.* — Faute de mieux, on se contente souvent dans les applications du résultat applicable à une pièce dont la section constante serait la moyenne des sections, cette moyenne s'appliquant aux moments d'inertie

$$I_{moy} = \frac{1}{l}\int I\,dx.$$

La théorie précédente permet d'obtenir sans trop de peine

d'autres valeurs approchées de la charge critique, au moyen de simples quadratures.

On supposera un système additionnel simple, notamment celui qui serait constitué par une force uniformément répartie. On calculera, pour un aussi grand nombre de section que l'on voudra, les valeurs du moment fléchissant M et les valeurs de ω. Ce sont des calculs numériquement simples et, si la pièce est symétrique par rapport à son milieu, on fera les quadratures sur sa moitié seulement. Dans ce cas, on a d'ailleurs

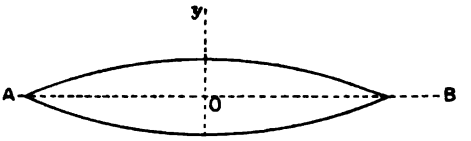
$$\omega = \int_0^x \frac{M\,d\xi}{EI}$$

en prenant l'origine des abscisses au milieu de la pièce.

A titre d'exemple, on peut citer quelques cas où le résultat peut s'obtenir sous forme algébrique.

Supposons d'abord une pièce en forme de bielle, le moment d'inertie étant au milieu, nul aux deux bouts et variable dans

Fig. 125.



l'intervalle, suivant la loi parabolique

$$I' = I\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right),$$

a étant la demi-longueur.

En prenant comme ligne élastique celle qui correspondrait à une charge uniformément répartie, on aura pour M une expression de la forme

$$M = 1 - \frac{\xi^2}{a^2}.$$

Par suite, on aura

$$\omega = \int_0^x \frac{M\,d\xi}{EI'} = \frac{1}{EI}x,$$

d'où

$$\int \omega^2\,dx = \frac{1}{E^2I^2}\frac{a^3}{3}$$

D'autre part,

$$\int \frac{M^2}{EI'} dx = \frac{1}{EI} \int \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right) d\xi = \frac{2a}{3} \frac{1}{EI}.$$

Finalement, on obtient pour F la valeur

$$F = \frac{EI}{a^2} \times 2 = \frac{EI}{l^2} \times 8.$$

Si l'on avait appliqué la règle de la section moyenne, on aurait été conduit à prendre un moment d'inertie moyen $I_{moy} = \frac{2}{3} I$ et la valeur évaluée aurait été

$$F = \frac{EI}{l^2} \times 9{,}87 \times \frac{2}{3} = \frac{EI}{l^2} \times 6{,}58$$

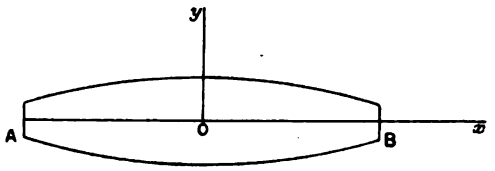
seulement. La forme de bielle à profil parabolique est vraisemblablement plus avantageuse que cette règle ne l'indiquerait.

Supposons enfin une bielle dont le moment d'inertie suive la loi

$$I' = \frac{I}{1 + \frac{\xi^2}{a^2}},$$

laquelle conduit aux extrémités à un moment d'inertie égal à la

Fig. 126.



moitié de la valeur qu'il atteint au milieu. En adoptant le même système additionnel que précédemment, on trouvera facilement

$$\int \frac{M^2}{EI'} dx = \frac{1}{EI} \int \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right)^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{a^2}\right) d\xi = \frac{a}{EI} \times \frac{64}{105},$$

$$\omega = \frac{1}{EI}\left(x - \frac{x^5}{5}\right),$$

$$\int \omega^2 dx = \frac{a^3}{E^2 I^2} \frac{5775}{1616},$$

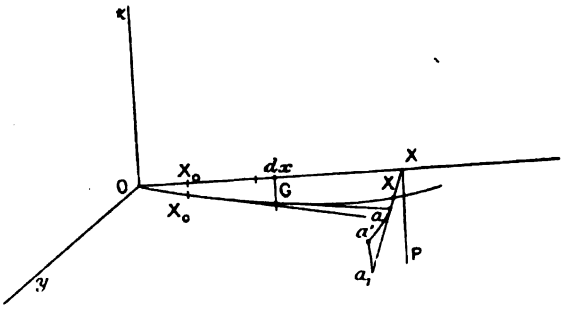
et par suite la valeur critique est approximativement

$$F = \frac{EI}{a^2} \times 2,178 = \frac{EI}{l^2} \times 8,71.$$

Étude de la stabilité des poutres droites soumises à une flexion dans leur plan moyen. — Supposons que la section de la poutre soit telle que ses deux moments d'inertie soient très inégaux. Il peut arriver, lorsqu'on la soumet à la flexion, dans le sens de sa plus grande raideur, sous des charges croissantes, que son équilibre devienne instable. L'introduction d'un couple de torsion, même très petit, entraîne une flexion dans le sens de la moindre raideur, et si cette dernière est insuffisante la déformation peut aller en s'aggravant indéfiniment. Une poutre peut ainsi flamber avant que les charges aient atteint la valeur pour laquelle la fatigue atteindrait aux points les plus chargés la limite d'élasticité.

Soient Ox l'axe longitudinal de la poutre, zOx son plan moyen, I son plus grand moment d'inertie, pris par rapport à une parallèle à Oy, i son plus petit moment d'inertie, pris par rapport à une

Fig. 127.



parallèle à Oz. Soit, de plus, J son coefficient d'inertie de torsion, défini de telle sorte que sous l'action d'un moment de torsion M_x la torsion élémentaire soit $\theta = \frac{M_x}{EJ}$. [En se reportant à ce que nous dirons plus tard à propos de la torsion, on aura approximativement pour J, d'après Saint-Venant, la valeur

$$J = \frac{S^4}{40(I + i)} \frac{\mu}{E}.$$

μ désignant ici un coefficient constant.] L'angle φ dont une section aura tourné par rapport à une section origine fixe est tel que $\frac{d\varphi}{dx} = \theta$, et tel par suite que

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{EJ} \tag{1}$$

Désignons par M le moment fléchissant au point G, d'abscisse x. Si la section G a tourné d'un angle φ, ce moment fléchissant a pour composantes $M \cos \varphi$ et $M \sin \varphi$ par rapport aux deux axes de l'ellipse centrale d'inertie. La première composante est sensiblement égale à M, de sorte que la flexion autour du petit axe de l'ellipse d'inertie n'est pas sensiblement modifiée. Mais autour du grand axe la composante $M \sin \varphi$ produit une flexion secondaire, entraînant un déplacement du point G dans un plan faisant avec Oxy l'angle φ. Ce déplacement est donc $\frac{y}{\cos \varphi}$, si y est le déplacement projeté sur Oxy ou le déplacement parallèle à Oy. On doit avoir

$$\frac{M}{Ei} \sin \varphi = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d^2 y}{dx^2},$$

ou approximativement

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M\varphi}{Ei}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) résolvent théoriquement le problème toutes les fois que l'on peut obtenir, outre la valeur de M, supposée connue, une expression explicite de M_x en fonction des charges appliquées et des déplacements. En intégrant ces équations différentielles, on a obtenu dans certains cas des séries plus ou moins compliquées sur lesquelles on peut reconnaître les valeurs critiques des charges qui ont été envisagées comme données du problème. On arrive à des solutions approximatives en comparant l'énergie potentielle, correspondant à une déformation plus ou moins exacte, au travail produit au cours de cette déformation par les charges appliquées.

Supposons qu'on se donne φ, non pas tout à fait arbitrairement, mais en tenant compte des conditions à remplir (principalement aux limites) en vertu de l'équation (1). L'équation (2) fournira

$\frac{d^2y}{dx^2}$, qui suffit pour évaluer l'énergie correspondant à la flexion latérale.

L'énergie due à la torsion est

$$\int \frac{M_x^2}{2EJ}\,dx = \int \frac{EJ}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx.$$

L'énergie due à la flexion est

$$\int \frac{M^2\varphi^2}{2Ei}\,dx = \int \frac{Ei}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Enfin, le travail produit par une charge verticale telle que P, d'abscisse X, est égal au produit de P par le déplacement vertical que subit son point d'application lorsque les différents éléments de la poutre sont déformés par flexion et par torsion. Or la différence de niveau qui s'établit entre deux points X_0 et X peut s'évaluer assez simplement toutes les fois que l'un des points, X_0 par exemple, est tel que la tangente correspondant à la fibre moyenne demeure horizontale.

Considérons, en effet, un élément dx de la poutrecomprise entre les abscisses X_0 et X. A cet élément correspond une flexion élémentaire

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \frac{M\varphi}{Ei}\,dx$$

dans un plan qui fait un angle φ avec l'horizontale. Le déplacement qui en résulte, pour le point X suivant la ligne de pente de ce plan, est

$$\overline{aa_1} = \frac{d^2y}{dx^2}(X - x)\,dx = \frac{M\varphi}{Ei}(X - x)\,dx$$

et sa composante verticale $\overline{a_1a'}$ est

$$\overline{aa_1}\sin\varphi = \overline{aa_1}\,\varphi = \frac{M\varphi^2}{Ei}(X - x)\,dx.$$

Le déplacement vertical total est

$$\int_{X_0}^{X} \frac{M\varphi^2}{Ei}(X - x)\,dx.$$

Si donc on cherche la valeur critique de la force verticale P,

appliquée en X, celle-ci sera donnée par l'équation

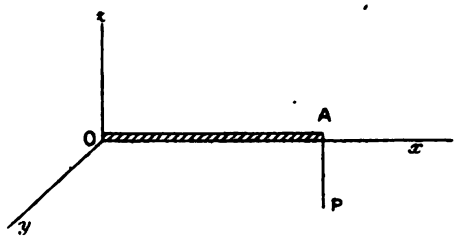
$$(3) \qquad P\int_{X_0}^{X} \frac{M\varphi^2}{Ei}(X-x)\,dx = \int \frac{M^2\varphi^2}{2Ei}\,dx + \int \frac{EJ}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx,$$

étant entendu que la première intégrale représente la différence de niveau des points X et X_0, ce dernier étant supposé fixe avec une tangente horizontale.

Quand la poutre est de section constante, les quantités J et i sortent des signes d'intégration. Dans ce qui suit, nous supposerons la section constante, mais on reconnaîtra facilement que, comme pour les pièces chargées de bout, la méthode permettrait d'aborder numériquement le cas de poutres à section variable.

Premier cas. — *Console de section constante chargée à son extrémité.* — Dans ce cas, le point d'encastrement conserve sa tangente horizontale et l'on prendra $X_0 = 0$ et $X = l$ dans l'évaluation de la différence de niveau des points A et O.

Fig. 128.



Les intégrales du second membre de l'équation (3) doivent d'ailleurs s'étendre à toute la poutre, entre les limites O et l.

D'autre part, on a $M = P(l-x)$ en valeur absolue, de sorte que l'équation (3) se réduit à

$$\frac{P^2}{Ei}\int \varphi^2(l-x)^2\,dx = \frac{P^2}{2Ei}\int \varphi^2(l-x)^2\,dx + \frac{EJ}{2}\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$$

ou

$$P^2\int \varphi^2(l-x)^2\,dx = E^2 J i \int\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 dx.$$

Il suffira donc d'introduire dans cette équation des valeurs de φ satisfaisant approximativement aux conditions du problème. Les

plus importantes de ces conditions sont évidemment :

$$\varphi = 0 \qquad \text{pour } x = 0$$

et

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = l,$$

car, à l'extrémité libre, on doit avoir $M_x = 0$.

On y satisfait en prenant

$$\frac{d\varphi}{dx} = (l - x \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{(l-x)^2}{2} - \frac{l^2}{2} = lx - \frac{x^2}{2}.$$

En faisant les intégrations dans ces conditions, on trouve

$$P^2 = \frac{E^2 J i}{l^4} \times \frac{35}{2}$$

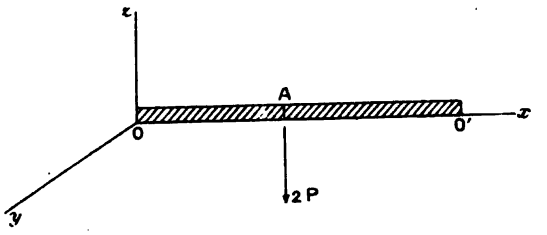
ou

$$P = \frac{E\sqrt{J i}}{l^2} \times 4,18$$

La valeur exacte du coefficient numérique serait 4,01. L'approximation est donc satisfaisante. On pourrait l'augmenter encore en prenant d'autres valeurs de $\frac{d\varphi}{dx}$; par exemple $\frac{d\varphi}{dx} = (l-x)^2$. On trouverait alors 4,02, valeur très voisine de la valeur exacte.

Deuxième cas. — *Poutre appuyée à ses deux extrémités, de façon à ne pouvoir y tourner autour de son axe longitudinal, et chargée d'un poids en son milieu.* — Dans ce cas, les deux moitiés de la poutre devant demeurer symétriques l'une de l'autre, c'est

Fig. 128 *bis*.



le milieu A, point d'application de la charge, qui conserve sa tangente horizontale.

Appelons $2l$ la longueur de la poutre et $2P$ la charge en son milieu. On aura dans l'intégrale du premier membre de l'équation (3) à faire $X_0 = l$ et $X = 0$, et l'on pourra n'envisager qu'une des deux charges P, à condition de n'appliquer les intégrales du second membre qu'à la première moitié de la poutre.

On a d'ailleurs $M = Px$ en valeur absolue, de sorte que l'équation (3) s'écrit

$$\frac{P^2}{Ei}\int_0^l \varphi^2 x^2\,dx = \frac{P^2}{2Ei}\int_0^l \varphi^2 x^2\,dx + \frac{EJ}{2}\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$$

ou

$$P^2\int_0^l \varphi^2 x^2\,dx = E^2 J i \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx.$$

Les conditions imposées à φ sont les mêmes que dans le cas précédent, savoir $\varphi = 0$ pour $x = 0$; $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ pour $x = l$. On prendra donc encore comme première approximation :

$$\varphi = lx - \frac{x^2}{2}.$$

En faisant les intégrations, on trouve

$$P = \frac{E\sqrt{Ji}}{l^2} \times 2,2.$$

La valeur exacte du coefficient numérique serait 2,11.

Si l'on veut avoir la valeur critique de la charge totale $2P$ et la rapporter à la longueur totale $2l$, il faut multiplier le coefficient trouvé par 2^3. On trouve donc finalement, comme coefficient de $E\frac{\sqrt{Ji}}{l^2}$, le nombre 16,88, qui est à comparer au coefficient 4,01 applicable à la console. Il est un peu plus de quatre fois plus grand. On aurait trouvé un rapport de 4 exactement, au lieu du rapport 4,2, en se bornant à traiter chaque moitié de la poutre appuyée comme *une* console, sans tenir compte de l'obstacle opposé à la rotation de son extrémité.

Troisième cas. — *Poutre encastrée à ses deux extrémités et chargée d'un poids en son milieu.* — Dans ce cas, le point A, aussi bien que le point O, conserve sa tangente horizontale. On

peut donc faire le calcul comme dans le dernier cas, en tenant compte seulement de ce que l'expression de M est

$$P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2}(2x - l)$$

dans la première moitié de la poutre. L'équation (3) s'écrit alors

$$\frac{P^2}{2Ei}\int_0^l \varphi^2(2x - l)x\,dx = \frac{P^2}{4Ei}\int_0^l \varphi^2(2x - l)^2\,dx + \frac{EJ}{2}\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$$

ou

$$P^2\int_0^l \varphi^2(2lx - l^2)\,dx = 2E^2Ji\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx.$$

En faisant encore $\alpha = lx - \frac{x^2}{2}$ et intégrant, on trouve

$$P^2 = \frac{E^2Ji}{l^3} \times 13.333$$

ou

$$P = \frac{E\sqrt{Ji}}{l^2} \times 3{,}65 \text{ environ.}$$

Une valeur plus exacte du coefficient serait de 3,33 environ, ce qui conduirait pour la charge critique totale, rapportée à la longueur totale, à la valeur

$$P = 26{,}66\frac{E\sqrt{Ji}}{l^2}.$$

Si l'on compare la poutre encastrée à la poutre simplement appuyée, on voit que l'encastrement augmente la stabilité de 1 fois et demie environ, le rapport des coefficients exacts étant 1,55. Le rapport des coefficients approchés est 1,65 et il en est très voisin.

SECONDE MÉTHODE GÉNÉRALE PERMETTANT D'OBTENIR DES VALEURS APPROCHÉES DES CHARGES CRITIQUES.

Supposons que les charges appliquées forment un système défini et soient proportionnelles à l'une d'elles P. Pour de faibles valeurs de P, le système est stable; il revient à sa position d'équilibre si on l'en écarte infiniment peu, d'une manière d'ailleurs arbitraire. Pour de grandes valeurs de P le système peut être instable, une déformation commencée pouvant s'accentuer indéfiniment.

Si l'on se borne à des déformations d'une certaine espèce, espèce

correspondant à une même famille de courbes, la valeur critique relative à cette espèce serait la valeur de P pour laquelle la situation déformée initiale pourrait, tout en se modifiant, conduire à une nouvelle situation d'équilibre.

La valeur critique *absolue* serait la plus petite de toutes les valeurs critiques *relatives*.

Une valeur critique relative peut être un renseignement précieux et très voisin de la valeur critique absolue, pourvu que l'on sache d'avance que la déformation de l'espèce supposée présente une allure générale conforme à celle de la déformation réelle lors du flambement. On peut l'obtenir approximativement comme il suit :

On supposera la pièce déformée suivant une courbe d'une certaine famille, définie à un coefficient de proportionnalité près. Dans cet état déformé, on pourra évaluer les moments fléchissants, ou les moments de torsion, qui seraient dus aux charges appliquées, et même ceux qui pourraient provenir des réactions dues aux liaisons établies en certains points. Partant de là, on pourra déterminer la forme que la poutre devrait prendre si elle se trouvait en état d'équilibre, et l'on pourra comparer cette forme à celle qui constituait l'hypothèse initiale.

Si ces deux formes étaient identiques à un coefficient de proportionnalité près, elles correspondraient à un état d'équilibre possible et la charge critique serait celle qui assurerait leur identité absolue. Il suffirait pour l'obtenir d'écrire que les déformations moyennes, ou maxima, sont les mêmes.

Si ces deux formes ne sont pas de même famille, mais de familles voisines, on aura cependant une valeur approchée de la charge critique en écrivant encore que les déformations moyennes, ou maxima, sont les mêmes.

On peut, en outre, observer que les courbes de la seconde famille sont celles qui tendent, en fait, à se substituer aux courbes de la famille initialement envisagée, par l'effet des réactions intérieures, jointes aux réactions extérieures dues aux liaisons, s'il y a lieu. Ce sont donc des courbes de déformation plus vraisemblables, plus rapprochées de la déformation réelle de flambement. En les envisageant à leur tour, elles conduiront donc à une nouvelle valeur critique relative plus approchée que la première de la valeur critique absolue, et ainsi de suite.

La rapidité de l'approximation peut devenir très grande et le procédé est, dans son ensemble, à comparer à celui qui permet d'intégrer, par approximations successives, une équation différentielle de la forme

$$y^{\alpha} = F(x, y, y', \ldots, y^{\alpha-1}).$$

On sait que si, dans le second membre, on substitue à y une fonction $z(x)$, qui en forme une première approximation, on obtient une seconde approximation meilleure en prenant la fonction $y(x)$ telle que

$$y^{\alpha} = F(x, z, z', \ldots, z^{\alpha-1}),$$

les conditions initiales demeurant les mêmes.

Quelques exemples simples feront saisir l'esprit et la portée de la méthode.

Reprenons d'abord le cas d'une pièce chargée debout et simplement appuyée. Supposons-la déformée accidentellement suivant une courbe parabolique de la forme

$$z = x(l - x).$$

Le moment fléchissant produit par la force F agissant à ses extrémités sera, au point d'abscisse x,

$$M = Fz.$$

Sous l'action de ce moment, la ligne élastique devrait avoir pour équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Fz}{EI} = -\alpha^2 (lx - x^2).$$

En intégrant, on trouve

$$y = -\frac{\alpha^2}{12}(2lx^3 - x^4) + A + Bx,$$

ou, en tenant compte des conditions $y = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$,

$$y = \frac{\alpha^2}{12}[l^3 x - 2lx^3 + x^4].$$

La déformation maxima de la courbe z au milieu est $\frac{l^2}{4}$; celle de la courbe y est $\frac{\alpha^2}{12} \times \frac{5l^4}{16}$.

En les égalant on trouve, pour définir la valeur critique, l'équation

$$\alpha^2 l^2 = \frac{48}{5} = 9,5.$$

Si l'on égalait les déformations moyennes, on trouverait

$$\alpha^2 l^2 = 10,0.$$

Ces deux valeurs sont déjà bien voisines de la valeur exacte qui correspondrait, comme on sait, à l'équation

$$\alpha^2 l^2 = \pi^2 = 9,869.$$

Recommençons en partant de l'hypothèse

$$z = l^3 x - 2 l x^3 + x^4.$$

Nous trouverons en intégrant l'équation différentielle, et tenant compte des mêmes conditions aux extrémités,

$$y = \frac{\alpha^2}{30}\left[3 l^5 x - 5 l^3 x^3 + 3 l x^5 - x^6\right].$$

En égalant encore les ordonnées maxima, qui sont respectivement

$$\frac{5 l^5}{16} \quad \text{et} \quad \alpha^2 l^6 \times \frac{61}{30 \times 64},$$

nous trouverons, pour définir la valeur critique, l'équation

$$\alpha^2 l^2 = \frac{600}{61} = 9,84$$

avec une approximation très grande.

Prenons maintenant le cas d'une console de section constante, chargée à son extrémité d'un poids P.

Supposons qu'on la déforme transversalement, suivant une courbe $z = f(x)$. Le moment de torsion M_x dû au poids P, placé à l'extrémité l de la console, serait au point G, d'abscisse x, donné par la formule

$$M_x = P\left[z_l - z - (l - x)\frac{dz}{dx}\right].$$

L'angle de torsion φ sera, comme nous l'avons vu, donné par

l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{EJ}$$

avec la condition $\varphi = 0$ pour $x = 0$.

Enfin, le moment fléchissant M au même point G est

$$M = P(l - x).$$

Or la déformation transversale y qui correspondrait à φ et à M, ainsi obtenus, devrait satisfaire à l'équation différentielle rencontrée plus haut, savoir :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M\varphi}{Ei}$$

avec $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$.

En égalant les valeurs de z_l et de y_l, correspondant à l'extrémité de la console, on aura une équation fournissant une valeur approchée pour la charge critique P.

Dans le choix de la fonction z, on se guidera sur ce que l'on doit avoir $z = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$ pour $x = 0$.

Partant de $z = x^2$ comme première hypothèse, et conduisant les calculs comme il vient d'être indiqué, on trouve successivement

$$M_x = P(l - x)^2,$$

$$EJ\varphi = P\left(l^2 x - l x^2 + \frac{x^3}{3}\right),$$

$$y = \frac{P^2}{E^2 J i} \frac{15 l^3 x^2 - 15 l^2 x^4 + 6 l x^5 - x^6}{90}.$$

On trouve

$$z_l = l^2 \quad \text{et} \quad y_l = \frac{P^2}{E^2 J i} \times \frac{5 l^6}{90},$$

d'où l'on trouve la valeur critique approchée

$$P = \frac{E\sqrt{Ji}}{l^2} \times 4{,}24.$$

On peut recommencer en partant pour z d'une expression proportionnelle à celle qui vient d'être trouvée pour y et l'on trouve,

sans autre difficulté que des calculs un peu longs,

$$EJ\varphi = \frac{l^2x}{18} - \frac{l^4x^3}{6} + \frac{l^3x^4}{4} - \frac{l^2x^5}{6} + \frac{lx^6}{18} - \frac{x^7}{126},$$

$$y = \frac{P^2}{E^2Ji}\,\frac{210\,l^7x^3 - 105\,l^6x^4 - 189\,l^5x^5 + 315\,l^4x^6 - 225\,l^3x^7 + 90\,l^2x^8 - 20\,lx^9 + 2x^{10}}{22680}.$$

En égalant encore z_l et y_l, on trouve, comme seconde approximation de la valeur critique,

$$P = \frac{E\sqrt{Ji}}{l^2} \times 4{,}02,$$

valeur extrêmement voisine de la valeur théorique exacte.

Ces deux exemples montrent la rapidité avec laquelle les approximations successives tendent vers la valeur exacte. On peut donc avoir confiance dans la méthode pour des cas moins simples et pour lesquels on ne dispose pas de valeurs théoriques exactes. Il convient d'ajouter qu'on peut recourir avantageusement à des constructions graphiques pour remplacer des intégrations ou des calculs compliqués et pour parvenir aux courbes de déformation successives. M. Keelhoff, professeur à l'Université de Gand, a pu traiter ainsi le problème assez complexe du flambement d'une membrure, à section variable, d'une poutre à treillis.

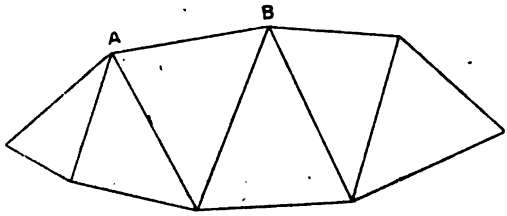
CHAPITRE XV.

POUTRES ET SYSTÈMES TRIANGULÉS MUNIS D'ARTICULATIONS.

I. — Considérations générales sur les systèmes triangulés.

Définition d'une poutre triangulée et articulée. — On appelle *poutre triangulée et articulée* une poutre composée d'un certain

Fig. 129.



nombre de pièces ou barres, réunies à leurs extrémités au moyen d'assemblages leur permettant de tourner autour de leurs points d'attache, que l'on appelle alors *articulations*.

Nous supposerons toujours que les axes longitudinaux de toutes ces pièces sont situés dans un même plan et que ce plan contient les lignes d'action de toutes les forces appliquées à la poutre. Nous admettrons même que ces forces appliquées ont exclusivement les articulations comme points d'application, ou se trouvent reportées en ces points au moyen de pièces spéciales ou longerons. Dans le cas contraire, si une des pièces AB supportait des forces en des points quelconques de sa longueur, et jouait ainsi le rôle de longeron, on pourrait encore remplacer ces forces par un système équivalent composé de deux forces parallèles à leur résultante et appliquées aux deux articulations A et B. On ne modifierait pas ainsi les conditions générales d'équilibre de la poutre, mais seulement les conditions particulières d'équilibre de la pièce AB; dont il faudrait, bien entendu, faire après coup l'étude en la consi-

dérant comme longeron, c'est-à-dire comme une poutre droite reposant sur deux appuis simples.

Ainsi, à un point de vue purement géométrique, une poutre articulée se réduit à un ensemble de lignes réunissant deux à deux un certain nombre de points d'un plan. Les points s'appellent les *sommets* ou les *nœuds;* les lignes qui les joignent deux à deux s'appellent les *côtés*.

Au point de vue mécanique, les seules forces à considérer sont de deux catégories :

1° Les forces appliquées aux différents nœuds suivant des directions connues; on suppose même que les réactions des appuis, lesquels sont des sommets particuliers, sont au préalable déterminées et font partie des forces appliquées. Celles-ci constituent donc dans leur ensemble un système de forces en équilibre.

2° Les efforts qui s'exercent dans les différentes barres et qui, en raison des articulations, ont pour lignes d'action ces barres elles-mêmes. Chaque barre est soumise en ses deux points d'articulation à deux forces égales et de sens contraire, qui constituent les actions développées sur elle par le reste de la poutre. Si ces forces sont dirigées des points d'articulation vers la barre, celle-ci est comprimée; dans le cas contraire, elle est tendue. Les réactions de la barre sur les articulations sont des forces égales et de signe contraire aux précédentes.

Figures déformables, indéformables, strictement indéformables. — Les figures géométriques représentant le schéma d'une poutre articulée peuvent se diviser en deux grandes classes :

1° Les figures déformables. Ce sont celles dont un ou plusieurs angles peuvent varier sans que les longueurs des côtés varient.

2° Les figures indéformables. Ce sont celles dont les angles sont complètement déterminés lorsque les longueurs des côtés sont données.

Les figures indéformables comprennent elles-mêmes deux catégories qu'il importe de distinguer :

a. Les figures strictement indéformables, qui cessent de l'être dès que l'on supprime un quelconque de leurs côtés.

b. Les figures à lignes surabondantes, dont certains côtés peuvent être supprimés sans qu'elles cessent pour cela d'être indéformables. Les côtés dont la suppression est possible sont dits surabondants; mais cette expression est toute relative.

Un triangle est une figure strictement indéformable. Un quadrilatère sans diagonale est une figure déformable. Si on lui ajoute une diagonale, ce quadrilatère devient strictement indéformable. Si on lui ajoute ses deux diagonales, on obtient une figure à lignes surabondantes. La ligne surabondante est d'ailleurs soit l'une, soit l'autre des deux diagonales, soit même l'un des côtés primitifs.

Quand une figure peut être considérée comme le résultat de la juxtaposition de deux ou plusieurs figures distinctes, il suffit que l'une de ces dernières soit déformable pour que la figure complète le soit.

Lorsque deux ou plusieurs figures distinctes sont toutes indéformables et que l'on peut les juxtaposer, la figure qui en résulte est elle-même indéformable. Il suffit que l'une des figures soit à lignes surabondantes pour que la figure complète le soit aussi.

Une même figure peut être déformable dans une de ses parties, et à lignes surabondantes dans une autre.

Nombre des côtés des figures. — Soi n e nombre des sommets d'une figure, m le nombre de ses côtés; m est au plus égal à

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Si l'on choisit deux des sommets pour y rattacher tous les autres, qui sont au nombre de $n-2$, on aura une figure strictement indéformable en joignant d'abord les deux sommets choisis entre eux et ensuite à chacun des $n-2$ autres. Le nombre des côtés de cette figure est donc

$$1+2(n-2)=2n-3.$$

On voit ainsi qu'une figure strictement indéformable doit comporter $2n-3$ côtés.

Si l'on avait $m<2n-3$, la figure serait certainement déformable.

Si l'on avait $n > 2n - 3$, et si l'on savait d'autre part que la figure est indéformable, on serait assuré qu'il s'agit d'une figure à lignes surabondantes et le nombre de ces dernières serait précisément $m - 2n + 3$.

Mais il peut y avoir des figures déformables dans une de leurs parties, et contenant néanmoins $2n - 3$ côtés ou même davantage, si quelque autre partie est à lignes surabondantes.

Les figures déformables sont naturellement proscrites des constructions, et parmi les figures indéformables celles qui ont des lignes surabondantes ne présentent jamais d'avantages qui puissent les faire spécialement recommander *a priori*. Leur calcul est compliqué, et Maurice Lévy a démontré qu'on pouvait toujours leur substituer un système strictement indéformable au moins aussi économique. Quand on est obligé de recourir à un système à lignes surabondantes, on peut généralement le considérer comme résultant de la superposition de deux ou plusieurs schémas strictement indéformables, renfermant un certain nombre de barres communes. C'est ce que l'on appelle alors *des systèmes composés*.

Les figures indéformables sont donc de beaucoup les plus intéressantes au point de vue des constructions. On ne s'occupe même guère que des catégories qui se prêtent aisément au calcul numérique ou graphique. On peut à cet égard distinguer particulièrement les deux suivantes :

1° *Figures à nœuds canoniques.* — Nous appellerons nœud simple un nœud auquel n'aboutissent que deux barres, et généralement nœud multiple d'ordre p un nœud auquel aboutissent $p + 1$ barres.

Une figure à nœuds canoniques est une figure qui possède au moins un nœud simple et qui reste telle lorsque l'on supprime les deux barres aboutissant à ce nœud.

2° *Figures à sections canoniques.* — Prenons dans le plan d'une figure une droite ne la rencontrant pas, la laissant par exemple tout entière à sa droite. Puis faisons-la mouvoir de telle façon qu'elle balaie simplement la région du plan occupée par la figure, ce qui veut dire que chaque point de cette région ne sera rencontré qu'une fois par la droite mobile. Celle-ci sera, de plus,

déplacée de telle façon qu'elle ne rencontre jamais deux sommets à la fois. Dans ces conditions, elle franchira d'abord un sommet, puis deux, puis les n sommets. Les positions successives qu'elle prend lorsqu'elle rencontre la figure peuvent se répartir en $n - 1$ groupes distincts, suivant le nombre des sommets qu'elle a dépassé.

En prenant une droite dans chacun de ces $n - 1$ groupes, on a ce qu'on peut appeler *un système de sections normales*.

Ces sections seront dites *simples* lorsqu'elles ne rencontreront que deux barres ou bien trois barres non concourantes.

Ceci posé, *il existe des figures strictement indéformables pour lesquelles une au moins des sections normales est simple et qui sont telles, d'ailleurs, que si l'on supprime les barres coupées par la section dont il s'agit, chacune des deux parties restantes de la figure primitive jouit encore de la même propriété. Nous dirons qu'une pareille figure possède un système de sections canoniques.*

Les figures à nœuds canoniques possèdent toujours un système de sections canoniques, puisque l'on peut toujours, au voisinage du nœud simple, faire passer une section ne rencontrant que deux barres; mais la réciproque n'est pas vraie.

3° *Poutres réticulaires ou à simple triangulation.* — On appelle canevas réticulaire, ou simplement triangulé, un canevas qui résulte de la juxtaposition successive d'un certain nombre de triangles d'après la règle qui va suivre.

Imaginons que, partant d'un premier *point initial*, nous décrivions un premier triangle, dont les côtés successifs soient désignés par les numéros 1, 2 et 3; puis que, une fois revenus au point initial, nous décrivions une ligne brisée extérieure au triangle et formée de deux côtés, numérotés 4 et 5, de manière à former un second triangle dont le côté 3 soit le premier côté. Traçons de même une nouvelle ligne brisée à deux côtés 6 et 7 formant un nouveau triangle dont le premier côté soit le dernier du triangle précédent, et ainsi de suite. Le dernier côté du dernier triangle aboutira à un sommet que l'on appellera *point final*.

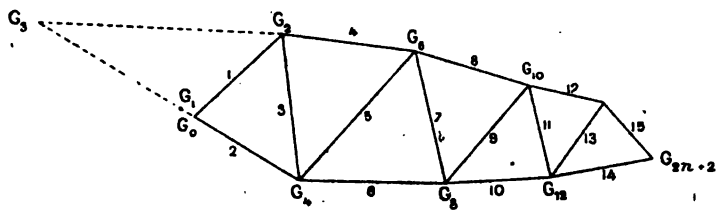
Entre le point initial et le point final, on peut parcourir d'un seul trait tout l'ensemble du canevas, qui est ainsi *une ligne*

brisée d'un seul tenant. Par suite, l'*ordre* des différentes lignes ou barres est parfaitement défini; c'est l'ordre dans lequel on les décrit successivement, et il est précisé par un simple numérotage. (Le *sens* d'une barre pourrait être également parfaitement défini; ce serait celui dans lequel la barre est parcourue en allant du point initial au point final.)

On constate aisément les propriétés suivantes :

1° Le nombre total des triangles étant n, celui des barres du canevas est impair, et égal à $2n+1$, puisque le premier triangle

Fig. 130.



a trois côtés et que chacun des $n-1$ suivants en introduit deux $[3+2(n-1)=2n+1]$.

2° Les nœuds sont au nombre de $n+2$, savoir trois fournis par le premier triangle et un par chacun des $n-1$ triangles suivants $(3+n-1=n+2)$.

3° A l'exception du premier et du dernier côtés, numérotés 1 et $2n+1$, toutes les barres portant des numéros impairs font partie de deux triangles successifs et sont intérieures au canevas réticulaire. On les appellera *diagonales*.

Les barres extrêmes 1 et $2n+1$ seraient des diagonales dans un canevas réticulaire *prolongé* soit à droite, soit à gauche du canevas limité que l'on considère.

Toutes les barres portant des numéros pairs ne font partie que d'un seul triangle et sont situées sur le pourtour du canevas. On les appellera *membrures*; et l'on pourra parfois avoir avantage à distinguer les membrures supérieures, dont le numéro sera généralement un multiple de 4, des membrures inférieures dont le numéro sera généralement un nombre de la forme $m.4+2$.

4° Le groupe des barres de numéros impairs (diagonales)

définit un système de $n+1$ *sections normales* simples. Si la diagonale considérée porte le numéro $2p+1$, la section normale correspondante coupe, en même temps que cette diagonale, les membrures $2p$ et $2p+2$, c'est-à-dire les barres qui l'encadrent dans l'ordre du numérotage. On peut étendre cette règle même aux barres extrêmes 1 et $2n+1$ en supposant un canevas prolongé dans lequel existeraient des barres numérotées zéro et $2n+2$, et de direction complètement arbitraire d'ailleurs.

Quant aux membrures, barres de numéros impairs, elles sont coupées chacune par deux sections normales distinctes, celles qui correspondent aux deux diagonales qui les encadrent. Ainsi la barre n° 6 est coupée par la section normale 4, 5, 6, qui correspond à la diagonale 5, et par la section normale 6, 7, 8, qui correspond à la diagonale 7. On peut toujours rattacher une membrure à la section normale dont le numéro précède le sien.

Cela posé, on appelle *sommet opposé* à une barre quelconque le point de concours des deux barres qui sont coupées en même temps qu'elle par la section normale à laquelle on la suppose rattachée. Cette définition équivaut à la règle suivante : *le sommet opposé à une barre est le point de concours des deux barres qui l'encadrent dans l'ordre du numérotage.*

S'il s'agit d'une diagonale courante, ce résultat est évident. Par exemple, la diagonale n° 3 a pour sommet opposé le point G_3, point de concours des barres n° 2 et n° 4, qui l'encadrent et qui sont coupées en même temps qu'elle par la section normale qui lui correspond.

S'il s'agit d'une des barres extrêmes, la barre n° 1 par exemple, le sommet opposé G_1 sera le point de concours de la barre n° 2 et de la barre n° 0 du canevas prolongé arbitrairement à gauche. Ce sera donc un point arbitraire de la barre n° 2. On pourra supposer que c'est un point infiniment voisin du point de concours des barres 1 et 2, désigné par G_0.

S'il s'agit d'une membrure de numéro pair $2p$, on peut la rattacher soit à la section normale $2p-1$, soit à la section normale $2p+1$. Dans le premier cas, son sommet opposé serait le point de concours des barres $2p-2$ et $2p-1$, et dans le second cas il serait le point de concours des barres $2p+1$ et $2p+2$. Ces deux points sont évidemment confondus en un seul, qu'on

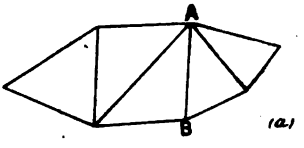
peut considérer comme le point de concours des deux diagonales $2p - 1$ et $2p + 1$.

Il est à noter que le sommet opposé à une membrure est un nœud réel de la poutre, puisqu'il résulte de l'intersection de l'un ou l'autre des groupes de barres consécutives $2p - 2$ et $2p - 1$, ou bien $2p + 1$ et $2p + 2$. Il en est de même, avec la convention faite pour G_1, du sommet opposé à une diagonale extrême. En sorte que ce résultat est général pour toutes les barres du pourtour du canevas. Au contraire, les sommets opposés aux diagonales courantes ne sont pas des nœuds de la poutre, car ils sont les points de rencontre de deux barres de pourtour non consécutives. Ils sont généralement situés en dehors de l'espace occupé par le canevas. Ces sommets, au nombre de $n - 1$, pourront toutefois être considérés comme des nœuds fictifs, qui, adjoints aux nœuds réels, au nombre de $n + 2$, formeront un groupe de points, dont le nombre total est $2n + 1$ égal au nombre des barres.

Remarque. — On peut toujours rattacher au canevas réticulaire tout canevas résultant de la juxtaposition de triangles. Il suffit pour cela de supposer intercalés un certain nombre de triangles supplémentaires infiniment plats le long des diagonales qu'il faudrait parcourir deux fois pour avoir un tracé d'un seul tenant. On dédouble ainsi ces diagonales, et l'on résout les nœuds multiples dont l'ordre serait supérieur à trois.

Ainsi, le canevas ci-contre (a) pourra être remplacé par le canevas réticulaire (b). La barre AB jouera le même rôle que si elle résultait de la soudure des deux barres AB et A'B du second

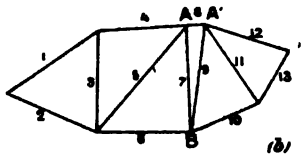
Fig. 181.



canevas. La direction arbitraire, que l'on peut attribuer à la membrure infiniment petite AA', numérotée 8, aura pour effet de modifier la répartition des efforts entre les deux barres dédoublées 7 et 9, mais n'influera en aucune façon sur leur résultante, qui seule importe dans la réalité.

Cette remarque a un intérêt d'ordre théorique évident. Elle permet d'éviter l'étude des dispositions particulières des triangles

Fig. 132.



et de généraliser les résultats très nets que l'on obtient pour les canevas réticulaires, en les étendant à un groupe plus étendu qu'on peut désigner par le mot *pseudo-réticulaire*.

II. — Recherche des efforts dans les barres.

Indication des deux méthodes en présence. — Lorsqu'une poutre articulée est strictement indéformable, possédant n sommets et $2n - 3$ côtés, on peut, sauf certains cas d'exception, déterminer par la statique les tensions de toutes ses barres *lorsque les réactions des appuis ont été au préalable déterminées* et sont supposées connues tout comme les forces appliquées. Pour cela, on dispose de deux méthodes basées, l'une sur la considération de l'équilibre des nœuds, l'autre sur la considération de l'équilibre des tronçons découpés par un système de sections normales.

Il suffit de montrer que l'on obtient le nombre des équations nécessaires à la détermination des $2n - 3$ tensions dans les barres.

Chaque nœud regardé comme un point libre doit être en équilibre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées et des tensions des barres qui y aboutissent. Si cette condition est remplie par tous les nœuds, le système entier sera forcément en équilibre. Or, comme toutes les forces aboutissant à un nœud sont concourantes, il suffit d'écrire que la somme de leurs projections sur deux axes est nulle. Cela fait donc $2n$ équations de condition en tout. Si l'on éliminait entre elles les $2n - 3$ tensions inconnues, on obtiendrait évidemment les trois équations de condition qui sont nécessaires pour que les forces appliquées, y compris les réactions d'appui, se fassent équilibre sur la poutre. Ces trois

équations, que l'on peut écrire *a priori*, suffisent d'ailleurs dans certains cas à déterminer les réactions des appuis.

De même pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que chacun des tronçons successivement découpés par un système de sections normales soit en équilibre sous l'action des forces directement appliquées au tronçon et des tensions des barres coupées par la section correspondante à ce tronçon. On obtient ainsi en apparence $3n - 3$ équations, à raison de trois par section normale; mais ces équations ne sont pas toutes distinctes. On reconnaît facilement, en effet, que deux sections normales successives ne sont séparées que par un seul nœud et que, par suite, toutes les barres qui ne sont pas coupées à la fois par elles concourent à ce sommet. Si donc on faisait les différences deux à deux des équations d'équilibre relatives à deux sections normales successives, ce qui reviendrait à établir les conditions d'équilibre du tronçon de poutre compris entre elles, on retomberait forcément sur les conditions d'équilibre du sommet qui les sépare. Or ces conditions doivent se réduire à deux, puisqu'il s'agit de forces concourantes. On ne peut donc obtenir plus de $2n - 2$ équations distinctes. Si l'on éliminait entre elles les $2n - 3$ tensions inconnues, on aurait évidemment la condition qui doit exister entre les forces appliquées aux $n - 1$ premiers sommets. Cette condition, c'est que leur résultante doit passer par le $n^{\text{ième}}$ sommet.

Le problème est donc bien déterminé, sauf dans certains cas exceptionnels où les équations obtenues seraient incompatibles ou indéterminées en raison des valeurs particulières de leurs coefficients. Nous ne nous occuperons pas de ces cas d'exception.

Tout l'intérêt de la classification faite précédemment dans les systèmes strictement indéformables consiste à mettre en évidence les cas dans lesquels la résolution analytique ou graphique des équations peut s'opérer d'une manière simple en pratique.

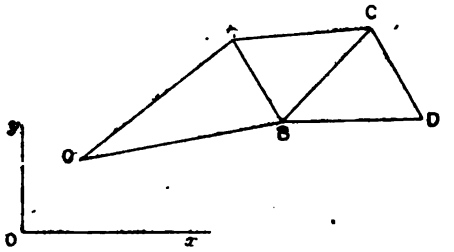
Les systèmes à nœuds canoniques, qui possèdent en même temps des sections canoniques, se prêtent également bien aux deux méthodes; mais la seconde convient seule aux systèmes à sections canoniques en général.

Méthode basée sur l'équilibre des nœuds dans les systèmes à nœuds canoniques. — Il importe, pour éviter des erreurs de signe

faciles à commettre, de bien se rappeler la distinction entre les efforts exercés sur une barre par les nœuds auxquels elle se rattache, et les efforts égaux et de signe contraire qui sont exercés par la barre sur les nœuds, et par suite sur le reste de la construction. Il sera utile à ce point de vue d'arrêter d'avance un programme d'opérations méthodique, tel que par exemple le suivant...

On part d'un nœud simple O, auquel sont attachées deux barres

Fig. 133.



OA et OB, de directions connues, et auquel sont appliquées des forces dont la résultante est connue en grandeur et en direction. On *décompose* cette résultante en deux forces dirigées suivant OA et OB, et l'on obtient ainsi les actions *exercées par le nœud sur les barres*. Ces forces sont égales à celles que ces barres exercent à leur tour sur le reste de la construction. On les supposera donc ensuite transportées respectivement en A et B pour les adjoindre aux forces extérieures données agissant en ces nœuds. Si l'un de ces nœuds est transformé en nœud simple par la suppression de la barre qui y aboutit, et dont l'action est connue, il jouera dans la suite des opérations le même rôle que le nœud simple primitif O. En tous cas, par définition même, il y aura un nœud simple dans le canevas réduit par la suppression des deux barres OA et OB.

Le sens positif à considérer dans une barre telle que OA pourra être systématiquement celui qui va de O vers A, c'est-à-dire qui va du nœud simple dont on s'occupe vers la seconde extrémité de la barre. Alors, si le nœud simple exerce sur cette barre un effort positif, cette barre sera *comprimée*. Dans le cas contraire, elle serait *tendue*.

a. Solution analytique. — Soient α et β les angles que font, avec la direction de l'axe Ox, les directions positives des deux barres OA et OB respectivement, et soient T_a et T_b les efforts exercés par le nœud sur ces barres. Inversement, les efforts exercés par les barres sur le nœud seront respectivement $-T_a$ et $-T_b$.

D'autre part, soit R la résultante des forces connues appliquées au nœud simple O et γ l'angle que fait sa direction avec Ox.

Les deux équations d'équilibre du nœud s'écriront

$$T_a \cos\alpha + T_b \cos\beta = R \cos\gamma,$$
$$T_a \sin\alpha + T_b \sin\beta = R \sin\gamma.$$

On en déduit immédiatement

$$T_a = R\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta-\alpha)}, \qquad T_b = R\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Ces relations peuvent encore se mettre sous la forme

$$\frac{T_a}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{T_b}{\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{R}{\sin(\beta-\alpha)},$$

et on les obtiendrait directement sous cette forme en considérant le triangle de décomposition de la force R suivant les deux directions α et β.

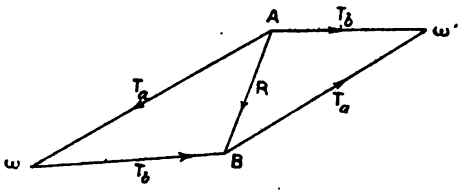
Une opération de même nature se retrouvera pour chacun des nœuds simples successivement rencontrés dans les figures réduites successives.

Finalement, on aboutira à une figure réduite à un triangle. Les trois groupes de deux équations, que l'on peut écrire pour l'équilibre de ses trois sommets, fourniront les tensions des trois dernières barres, ainsi que les conditions d'équilibre des forces appliquées, ce qui donnera la possibilité de vérifier les calculs successifs.

b. Solution graphique. Procédé de Crémona. — Au lieu de calculer les efforts T_a et T_b, on peut les déterminer graphiquement, soit sur la figure elle-même, soit au moyen d'un polygone des forces construit à part. Ce polygone des forces comprendra en premier lieu les forces connues appliquées au nœud O considéré, savoir : les forces directement appliquées à ce nœud et les tensions préalablement déterminées de certaines des barres qui y aboutissent.

Cela fournira la résultante R. Il suffit ensuite, pour trouver les deux efforts exercés sur les barres OA et OB, de décomposer R

Fig. 134.

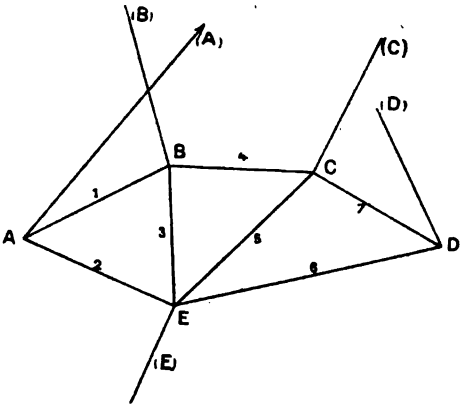


suivant la direction de ces barres, en menant par les deux extrémités de R des parallèles à ces directions. Le triangle AωB, par exemple, fournira $T_a = A\omega$ et $T_b = \omega B$, les sens de T_a et T_b étant marqués par les flèches.

Cette construction peut se faire d'une seconde façon équivalente en considérant le triangle ABω'.

On peut profiter de cette faculté pour juxtaposer, sur une seule et même épure, tous les polygones des forces relatifs aux différents sommets rencontrés. C'est cet avantage particulier que l'on recherche dans le procédé dit des *figures réciproques*, dont l'idée est due à Maxwell et qui a été perfectionné par Crémona.

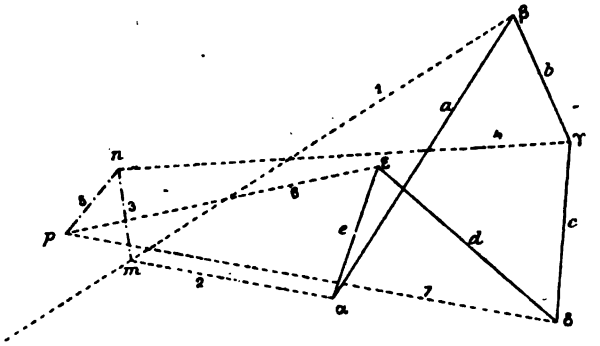
Fig. 135.



Nous nous bornerons à en faire l'application au cas d'une figure réticulaire. La règle à suivre peut alors s'indiquer très simplement de la manière suivante.

Soit le canevas réticulaire ABCDEA. Désignons par les lettres correspondantes *abcde* les forces en équilibre appliquées aux différents sommets suivant les lignes d'action connues (A) (B) ...

Fig. 136.



Traçons un polygone αβγδεα des forces appliquées dans l'ordre où on les rencontre en faisant le tour du canevas, dans le sens des aiguilles d'une montre par exemple. Chaque côté est désigné sur la figure par le nom de la force *abc*.... Ce polygone est fermé, puisque les forces appliquées (y compris les réactions d'appui supposées connues) forment un système en équilibre.

Par l'origine de chaque force, menons une parallèle à la barre qui vient avant elle sur le pourtour. Ainsi, par l'origine α de *a*, nous mènerons une parallèle à la barre (2); par l'origine β de *b*, nous mènerons une parallèle à la barre (1), et ainsi de suite. (Ces différentes parallèles sont indiquées en pointillé sur la figure.)

Cela fait par le point de rencontre *m* des parallèles 1 et 2 aux barres (1) et (2) qui aboutissent au nœud simple A, on mènera une parallèle *mn*, ou 3, à la première diagonale (3), jusqu'à sa rencontre en *n* avec la parallèle 4. Par le point *n*, on mènera de même une parallèle *np* à la diagonale suivante (5) jusqu'à sa rencontre en *p* avec la parallèle (6), et ainsi de suite pour un canevas plus compliqué. On formera ainsi une ligne en zigzag *mnp*... (ou 3-5-7), dont les différents côtés *mn* — *np* — ... sont parallèles aux diagonales successives et dont les sommets sont sur les parallèles aux barres de pourtour qui encadrent la diagonale considérée, dans l'ordre du numérotage.

On reconnaîtra sans peine que ce tracé fournit tous les polygones des forces relatifs à l'équilibre des différents nœuds.

Le triangle $\alpha\beta m$, par exemple, donne les forces αm et $m\beta$ qui résultent de la décomposition de la force a suivant les deux barres (2) et (1).

De même, le quadrilatère $m\beta\gamma n$ fournit d'abord la résultante $m\gamma$ (non tracée) des forces connues 1 et b qui s'exercent sur le nœud B. Cette résultante se trouve elle-même décomposée suivant les barres (3) et (4), en nm d'une part et $n\gamma$ d'autre part.

De même encore, le pentagone $\alpha m n p \varepsilon$ fournit la résultante εn des forces connues e, 2 et 3 qui s'exercent sur le nœud E. Cette résultante est décomposée suivant les barres (5) et (6) en np et $p\varepsilon$. Et ainsi de suite.

En fin d'épure, la figure doit fournir certaines vérifications résultant des conditions d'équilibre du dernier triangle. Dans la figure ci-dessus, la ligne np doit passer par le point de concours des lignes 6 et 7.

Il sera utile, finalement, de distinguer par des traits de différentes grosseurs ou couleurs les barres tendues des barres comprimées. Cette distinction se fera facilement, d'après le sens des efforts déterminés. Ainsi, la force exercée par le nœud A sur la barre (2) étant αm, cette barre est tendue. De même la barre 1 est comprimée, etc.

Remarque I. — Nous avons supposé pour la généralité qu'il y avait une force appliquée à chaque nœud. S'il en était autrement, certains côtés du polygone des forces $\alpha\beta\gamma$ — auraient une longueur nulle, de sorte que deux ou plusieurs sommets de ce polygone seraient confondus. De ces sommets multiples partiraient plusieurs des parallèles aux barres de pourtour, et rien ne serait changé pour cela à la construction indiquée.

Remarque II. — Dans le cas particulier, mais cependant assez habituel, où toutes les charges sont appliquées soit aux nœuds supérieurs de la poutre, soit aux nœuds inférieurs, le polygone des forces se trouve identique à celui dont on fait usage pour déterminer les réactions des appuis et tracer la courbe des pressions.

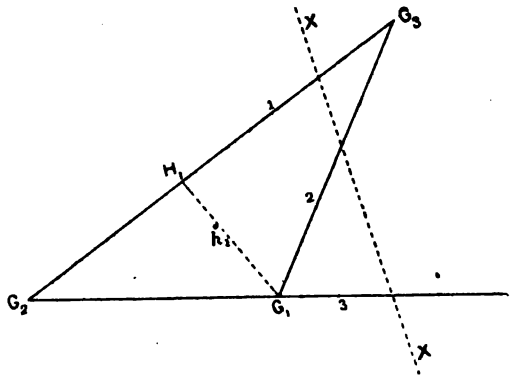
Remarque III. — Si le canevas était non pas réticulaire, mais seulement pseudo-recticulaire, et si, par exemple, les nœuds B et C étaient confondus en réalité, ainsi que les diagonales 3 et 3, la règle précédente demeurerait applicable à condition de faire le dédoublement fictif que nous avons précédemment indiqué.

La ligne 4 de l'épure de Crémona serait arbitraire et les lignes 3 et 5 de cette même épure seraient confondues. La tension dans la diagonale réelle 3-5 serait la différence entre les longueurs *mn* et *np* comprises sur l'épure, entre les lignes 2 et 4 d'une part, et entre les lignes 4 et 6 d'autre part, c'est-à-dire tout simplement la longueur *mp* comprise entre 2 et 6.

Le tracé effectif de la barre fictive 4 et de la ligne qui lui correspond dans l'épure de Crémona n'est donc pas en réalité nécessaire. Mais il est intéressant d'effectuer le numérotage des barres en tenant compte de ces éléments fictifs. Cela évite toute incertitude sur la manière de continuer l'épure et écarte des chances d'erreur, sans compter l'avantage toujours appréciable d'une grande généralisation des règles et des résultats.

Méthode basée sur l'équilibre des tronçons de poutre dans les systèmes à sections normales canoniques. — Le programme des opérations est le suivant. Par hypothèse, on a au moins une section

Fig 137.



normale XX qui coupe au plus trois barres (numérotées 1-2-3 sur la figure). Cette section sépare la poutre en deux tronçons, l'un à gauche, l'autre à droite.

On envisagera spécialement l'un d'eux, celui de gauche par exemple, et l'on cherchera la résultante R des forces qui lui sont appliquées, y compris les réactions d'appui s'il y a lieu. Cette résultante, qu'on peut appeler la force extérieure relative à la section XX, doit faire équilibre aux réactions que le tronçon de droite exerce sur le tronçon de gauche, ou encore former un système équivalent aux actions t_1, t_2, t_3, qu'exerce le tronçon de gauche sur le tronçon de droite suivant la direction des trois barres coupées. Si l'on considère systématiquement la question à ce dernier point de vue, il s'agira donc de décomposer la force extérieure R suivant trois lignes d'action non concourantes 1-2-3. C'est un problème facile à résoudre, soit graphiquement, soit analytiquement. Comme cas particulier, on peut avoir seulement deux barres coupées par la section considérée. Alors le problème ne diffère pas de celui qui a déjà été étudié précédemment. La force R est alors la résultante des forces qui s'exercent sur le nœud à la rencontre des deux barres coupées.

Les tensions t_1, t_2, t_3 étant déterminées, si l'on envisage le tronçon de droite, il sera en équilibre sous l'action de ces tensions (substituées à la force R) et des autres forces qui lui sont directement appliquées. Ce tronçon, après suppression des barres 1-2-3, possédera une nouvelle section simple, et on la traitera de la même façon que la première.

De même, si l'on envisage le tronçon de gauche, il sera en équilibre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées et des réactions $-(t_1)$, $-(t_2)$, $-(t_3)$, dirigées suivant les trois barres 1-2-3. Après suppression de ces barres, il possédera par hypothèse une nouvelle section simple, et on lui appliquera encore le même procédé. Et ainsi de suite.

Pour toute section simple telle que XX, il sera utile de se fixer systématiquement un sens positif sur chacune des barres coupées par elle. On pourra, par exemple, supposer que ce sens positif est tel que l'on passe du tronçon de gauche au tronçon de droite en traversant la section. De cette façon, à une tension positive correspond une *compression* dans la barre; à une tension négative correspond une *traction*.

Cette méthode est susceptible d'une application graphique que l'on appelle généralement la *méthode de Culmann*, et dont

nous ne voyons rien de bien utile à dire, sinon qu'on peut s'efforcer de réunir sur une même épure toutes les constructions nécessaires pour les différentes sections rencontrées.

Au point de vue analytique, il y a lieu de signaler tout particulièrement un procédé spécial, appelé *théorème de Ritter*, qui permet de déterminer isolément les trois tensions inconnues t_1, t_2, t_3.

Appelons, d'une manière générale, *sommet opposé* à une barre coupée par la section simple XX le point de concours des deux autres barres qui sont coupées en même temps qu'elle par cette section. La barre 1, par exemple, aura pour sommet opposé le point de concours G_1 des deux barres n° 2 et n° 3.

Si l'on considère toutes les forces appliquées au tronçon de gauche, forces dont la résultante est R, et si l'on désigne par M_1 leur moment par rapport à G_1, l'une des équations d'équilibre consistera à écrire que M_1 est égal au moment de la tension t_1. En effet, les tensions t_2 et t_3 passent par G_1 et ont des moments nuls par rapport à ce point. Désignons par h_1 la distance de G_1 à la barre 1 qui lui est associée, et convenons de considérer h_1 comme positif si G est à la DROITE d'un observateur qui parcourrait la barre 1 dans le *sens positif*, défini ci-dessus.

L'équation dont il s'agit sera

$$t_1 h_1 = M, \qquad \text{d'où} \qquad t_1 = \frac{M_1}{h_1}.$$

On obtiendrait des équations analogues pour les deux autres barres. Par exemple, pour la barre 2, le sommet opposé serait G_2, point de concours de 1 et 3. Si l'on désigne par M_2 le moment de R, ou de l'ensemble des forces appliquées au tronçon de gauche, on aura

$$t_2 = \frac{M_2}{h_2}$$

en observant que, dans le cas de la figure, h_2 doit être considéré comme négatif, puisque G_2 est à gauche de la barre 2 parcourue dans son sens positif.

On peut donc énoncer ce résultat général. La tension t dans une barre quelconque est fournie par l'expression

$$t = \frac{M}{h},$$

étant données les conventions suivantes. Le sommet opposé à la barre est le point de concours des deux barres qui, soit dans la poutre prise dans son entier, soit dans l'une des poutres réduites que l'on peut être conduit à envisager, sont coupées en même temps qu'elle par une *section normale simple* (coupant au plus trois barres). Le moment M, *que l'on peut appeler moment de flexion relatif à la barre*, est le moment de toutes les forces appliquées au tronçon situé à gauche de la section simple, moment pris par rapport au sommet G opposé à la barre. Enfin h est la distance de la barre au sommet qui lui est opposé; cette distance étant prise positivement ou négativement, suivant que le sommet opposé est à droite ou à gauche de la barre parcourue dans son sens positif, c'est-à-dire de gauche à droite à travers la section.

Il existe des schémas de poutres pour lesquels on peut disposer d'une série de sections normales simples suffisante pour la détermination de toutes les tensions dans les barres, sans qu'il y ait lieu d'envisager une suite de poutres réduites. Le théorème de Ritter devient alors particulièrement avantageux.

Cette circonstance se présente notamment avec les schémas réticulaires, puisque nous avons vu qu'il y a dans ce cas un système de $n+1$ sections normales simples, correspondant chacune à une diagonale, ou barre de numéro impair. Nous avons vu aussi qu'on pouvait faire correspondre à chaque barre un sommet opposé, qui est toujours le point de concours des deux barres qui l'encadrent dans l'ordre du numérotage. Enfin, il est facile de trouver une règle simple pour la composition du moment de flexion M relatif à chaque barre. Cette règle est la suivante :

Le moment de flexion M *est le moment de toutes les forces appliquées en des nœuds (ou sommets) dont le numéro d'ordre est inférieur à celui de la barre considérée.*

En se reportant à un schéma de poutre réticulaire, et en considérant la section normale simple qui correspond à la diagonale $2p+1$, on reconnaît facilement que cette section laisse à sa gauche tous les nœuds réels dont le numéro est inférieur à $2p+1$, le dernier nœud dépassé étant G_{2p}.

La règle s'applique donc directement à la diagonale $2p+1$.

Elle s'applique aussi sans difficulté à la barre membrure $2p+2$, car il n'y a pas de nœud réel portant le n° $2p+1$.

Enfin elle s'applique à la barre de numéro $2p$, qui peut être rattachée à la section normale précédente, correspondant à la diagonale $2p-1$. Il est d'ailleurs indifférent de compter ou non dans les forces appliquées au tronçon de gauche celle qui serait appliquée au sommet G_{2p}, car elle aurait un moment nul par rapport à ce sommet, opposé à la barre $2p$.

Remarque I. — Le théorème de Ritter présente un cas d'exception quand le sommet opposé à la barre est rejeté à l'infini. Cela arrive souvent pour une diagonale quand les membrures qui l'encadrent sont parallèles entre elles. Dans ce cas, M et h sont tous les deux infinis et la formule $t = \frac{M}{h}$ ne s'applique plus. On trouve alors la valeur de t, ou la limite du rapport $\frac{M}{h}$, en écrivant que sur un axe perpendiculaire à la direction commune des membrures la somme des composantes des tensions est égale à la composante T de la force extérieure R. Les composantes des tensions des membrures sont nulles; celle relative à la diagonale est $t \sin\alpha$, si l'on désigne par α l'angle de la diagonale et des membrures. On a donc dans ce cas

$$t = \frac{T}{\sin\alpha}.$$

Remarque II. — Plus généralement, si le sommet opposé à une diagonale, telle que 2, est très éloigné, et si l'on éprouve quelque difficulté à trouver les quantités M_2 et h_2 qui lui correspondent dans la formule de Ritter, on peut déterminer la tension t_2 dès que l'on connaît les tensions t_1 et t_3, en écrivant que les projections de R et de $t_1\, t_2\, t_3$ sont égales sur la direction xx, d'ailleurs arbitraire.

Remarque III. — Le théorème de Ritter ramène très simplement l'étude de la tension dans une barre déterminée d'un système à sections canoniques à l'étude du moment de flexion M qui est proportionnel à cette tension.

Il en sera de même de l'étude de la fatigue dans la barre qui est le quotient $\frac{t}{S}$ de la tension par l'aire S de la section normale de la barre.

Définition des lignes d'influence dans les poutres articulées. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les charges étaient directement appliquées aux nœuds de la poutre, ou bien reportées en ces nœuds par des poutres secondaires, ou longerons, sur lesquelles les charges peuvent occuper diverses positions.

Supposons qu'un longeron horizontal règne d'un bout à l'autre de la poutre et qu'une charge mobile $P = 1$, de direction verticale, se déplace sur lui. L'effet produit par cette charge mobile dans une barre déterminée de la poutre pourra être différent suivant les dispositions prises pour rattacher le longeron aux nœuds de cette poutre. Généralement, le longeron sera rattaché à un certain nombre de nœuds, dont les numéros formeront une suite de nombres définis, quand on parcourra le longeron de gauche à droite. Ces nœuds successifs seront ce qu'on peut appeler les *nœuds de charge*. Leur suite pourra comprendre tous les nœuds, ou au contraire n'en comprendre qu'une partie.

Supposons maintenant que la position de la charge mobile P soit définie par l'abscisse α de sa ligne d'action, abscisse comptée à partir de l'extrémité gauche de la poutre, ou du longeron, par exemple. La ligne d'influence correspondant à un effet déterminé dans une barre déterminée sera la courbe dont l'ordonnée représenterait l'effet en question en fonction de l'abscisse α.

Toute ligne d'influence sera constituée par une ligne polygonale dont les sommets seront sur les verticales des nœuds de charge.

Supposons, en effet, deux nœuds de charge consécutifs G et G'. Si la charge P se trouve sur le longeron au droit d'un de ces nœuds, elle agira sur la poutre comme si elle était directement appliquée à ces nœuds, et elle produira des effets y et y' respectivement. Si elle se trouve comprise entre G et G', elle se décomposera en deux forces p et p' agissant suivant les verticales des nœuds, et l'effet produit par elle sera représenté par l'expression

$$\frac{p}{P}y + \frac{p'}{P}y'.$$

Or les deux forces p et p', dont la somme est égale à P, varient linéairement avec l'abscisse α, tant que cette abscisse est comprise

entre G et G'. Il en est donc de même de l'expression précédente.

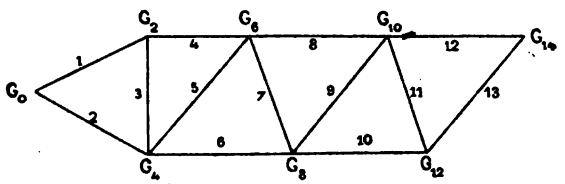
En conséquence, pour construire une ligne d'influence quelconque, il suffit dans tous les cas d'en déterminer les points qui correspondent aux verticales des nœuds de charge, puis à relier ces points par des lignes droites.

Un nombre plus ou moins grand de ces lignes droites peuvent d'ailleurs se confondre, de telle sorte que la ligne d'influence cherchée peut se réduire à un très petit nombre de côtés. Le principal intérêt de toute étude particulière consiste à rechercher *a priori* la forme des lignes d'influence, le nombre de leurs côtés et la position de leurs sommets, ou points de brisure.

Étude d'une poutre réticulaire posée sur appuis simples. — Considérons, pour fixer les idées, le schéma réticulaire ci-contre et supposons que les appuis soient deux nœuds quelconques, G à gauche, et G' à droite, de façon que la poutre soit en réalité une poutre console.

Pour préciser, supposons que l'appui de gauche soit le nœud G_4, et que l'appui de droite soit G_{12}. La poutre pourra être divisée en trois parties distinctes : une console de gauche, une console de

Fig. 138.



droite et une partie centrale. Dans l'exemple choisi, la console de gauche comprendra les barres 1, 2, 3, 4, précédant l'appui G_4; la console de droite comprendra les barres 12, 13 suivant l'appui G_{12}; et la partie centrale sera composée de toutes les autres, qui forment un schéma réduit, de même nature que le schéma total.

Il y a donc deux études distinctes à faire, celle relative à une barre de la partie centrale et celle relative à une console.

Considérons d'abord la partie centrale et proposons-nous de trouver la ligne d'influence du moment de flexion M_p relatif à une

barre d'indice p. Soit G_p le sommet opposé à la barre et soit x_p l'abscisse de la verticale de ce sommet.

Soit d'une manière générale α l'abscisse de la verticale suivant laquelle agit la charge mobile $P = 1$. Cette abscisse est supposée rapportée à l'appui de gauche G; elle peut être positive ou négative, et il suffit d'attribuer à α les diverses valeurs qui correspondent aux abscisses des différents nœuds de charge.

Quel que soit α, on reconnaîtra d'abord que la réaction de l'appui simple de gauche G sera donnée dans tous les cas par la formule

$$R = P\frac{l-\alpha}{l}$$

en désignant par l la distance horizontale des deux appuis G et G'.

Cela posé, considérons la charge P lorsqu'elle coïncide avec un nœud de charge G_m, d'abscisse $x_m = \alpha$.

Si l'on a $m > p$, le moment de flexion M_p aura simplement pour valeur

$$M_p = R x_p = P\frac{l-\alpha}{l}x_p.$$

Si l'on a $m < p$, le moment M_p sera composé du moment de la réaction R et du moment de la force P. Son expression sera

$$M_p = R x_p - P(x_p - \alpha) = P\frac{\alpha(l-x_p)}{l}.$$

Si le sommet G_p est un nœud de charge, et si l'on fait $\alpha = x_p$, ces deux formules donnent la même valeur

$$M_p = P\frac{x_p(l-x_p)}{l}.$$

On en déduit facilement les résultats suivants :

1° Si G_p est un nœud de charge, tous les sommets de la ligne d'influence qui correspondent à des nœuds de charge d'indice inférieur à p se trouvent alignés sur la droite

$$M = P\frac{\alpha(l-x_p)}{l}$$

qui coupe la verticale $\alpha = 0$, au point $M = 0$ et la verticale $\alpha = x_p$ au point d'ordonnée $M = P\frac{x_p(l - x_p)}{l}$.

De même tous les sommets de la ligne d'influence qui correspondent à des nœuds de charge d'indice supérieur à p se trouvent alignés sur une seconde droite

$$M = P\frac{l - \alpha}{l}x_p$$

qui coupe la verticale $\alpha = l$ au point $M = 0$ et la verticale $\alpha = x_p$ au même point que la précédente.

La ligne d'influence complète se composera donc de deux droites seulement, et ces deux droites seront complètement définies par leur ordonnée commune sur la verticale $\alpha = x_p$ du nœud G_p.

2° Si G_p n'est pas un nœud de charge, les résultats précédents subsistent pour tous les nœuds de charge d'indice inférieur à p d'une part, et pour tous les nœuds de charge d'indice supérieur à p d'autre part. Si donc l'on désigne par G_q et G_r les nœuds de charge qui encadrent G_p, les deux droites précédemment définies, se coupant sur la verticale de G_p, constitueront des portions de la ligne d'influence cherchée. On sait, d'autre part, qu'entre les verticales G_q et G_r la ligne d'influence est une troisième portion de droite, joignant les points où les deux droites précédentes coupent les verticales de G_q et G_r respectivement.

Il peut arriver, dans ce cas, si la verticale de G_p est en dehors de l'épure, ou simplement éloignée, qu'il y ait quelque difficulté à définir les deux premières droites par leur ordonnée commune sur cette verticale. Alors il sera possible et commode de définir l'ensemble des trois droites constituant la ligne d'influence par les ordonnées, qui leur sont communes deux à deux sur les verticales de G_q et G_r respectivement.

En d'autres termes, pour définir complètement la ligne d'influence de M_p, il suffira de supposer que la charge coïncide avec G_p, si G_p est un nœud de charge, et, dans le cas contraire, de déterminer les deux nœuds de charge G_q et G_r qui l'encadrent et de supposer que la charge mobile coïncide successivement avec G_q et G_r.

Il est bien évident, d'ailleurs, que la ligne d'influence de la

tension t_p dans la barre est proportionnelle à celle de M_p. Par suite, si l'on dispose d'un moyen simple quelconque pour déterminer les valeurs de t_p, lorsque la charge coïncide soit avec G_p, soit avec G_q et G_r, ces déterminations suffiront dans tous les cas pour déterminer les sommets de la ligne d'influence cherchée, soit celle de M_p, soit celle de t_p, et pour tracer complètement cette ligne d'influence.

La forme affectée par la ligne d'influence peut être assez variée, car elle dépend des positions respectives de toutes les verticales GG', G_p, G_q et G_r. Mais les règles précédentes permettent de la déterminer toujours sans difficulté.

Considérons maintenant une console, celle de gauche par exemple. On peut l'étudier indépendamment du reste de la poutre, et en appliquant des principes analogues. Ici, la réaction R de l'appui n'intervient jamais dans la composition du moment de flexion M_p.

La charge mobile P coïncidant avec un nœud de charge G_m, on distinguera deux cas.

Si $m \geqq p$, le moment de flexion M_p est nul.

Si $m < p$, on aura

$$M_p = P(x_m - x_p) = P(x - x_p).$$

Par suite, tous les sommets de la ligne d'influence qui correspondent à des nœuds de charge d'indice égal ou supérieur à p sont situés sur la ligne de référence, à laquelle on rapporte les ordonnées. Tous les sommets qui correspondent à des nœuds de charge d'indice inférieur à p sont sur une même ligne droite, qui coupe d'ailleurs la ligne de référence sur la verticale de G_p et dont le coefficient angulaire est connu et égal à 1.

Si G_p est un nœud de charge, cette droite suffit à définir la ligne d'influence. Dans le cas contraire, on cherchera encore les nœuds de charge G_q et G_r qui encadrent G_p, et l'on saura d'avance que l'ordonnée de la ligne d'influence est nulle sur la verticale G_r. Il suffira donc de déterminer le point correspondant à la verticale G_q et de le joindre au point d'ordonnée nulle sur la verticale G_r pour avoir le côté de la ligne d'influence dans l'intervalle de ces deux verticales.

Remarque I. — Les résultats qui viennent d'être obtenus

s'appliquent aux poutres pseudo-réticulaires, dont on peut toujours ramener le canevas à un canevas réticulaire par un numérotage convenable.

En ce qui concerne les barres de pourtour, ou membrures, qui ont toujours pour *sommets opposés* des nœuds réels, il n'y a aucune difficulté. Les points de brisure de la ligne d'influence ne peuvent se rencontrer que sur la verticale de G_p, si G_p est un nœud de charge, ou sur les verticales de G_q et G_r qui sont les nœuds de charge encadrant G_p.

Mais en ce qui concerne une diagonale dédoublée, il lui correspond en réalité deux sommets opposés G_p et $G_{p'}$, et les nœuds de charge qui les encadrent peuvent ne pas être les mêmes. Théoriquement, il faut chercher les lignes d'influence de M_p et $M_{p'}$, ou de t_p et de $t_{p'}$ isolément, puis les combiner par voie d'addition algébrique. Celá pourra conduire à des formes plus compliquées. Mais les points de brisure se rencontreront toujours sur les verticales des nœuds de charge encadrant soit G_p soit $G_{p'}$, et il suffira toujours de les déterminer directement, par un procédé d'ailleurs quelconque, pour être en mesure de tracer la ligne d'influence complète.

Remarque II. — Bien que le tracé des lignes d'influence suffise en principe pour résoudre toutes les questions relatives au cas de charges verticales multiples, il est utile de dire quelques mots au sujet de la recherche directe des moments de flexion dans une poutre réticulaire reposant sur des appuis simples coïncidant avec ses nœuds extrêmes.

Supposons d'abord un système de charges appliquées aux nœuds de la poutre, et supposons tracé un polygone funiculaire de ces charges, rapporté à sa ligne de fermeture, comme s'il s'agissait d'une poutre prismatique.

Considérons la barre d'indice p et son sommet G_p. Soit G_q le dernier des nœuds chargés qui précède G_p. D'après ce que nous avons dit plus haut, le moment M_p sera la somme des moments de la réaction de l'appui de gauche et de toutes les charges appliquées aux nœuds d'indice inférieur à p. Il sera représenté par le segment compté sur la verticale de G_p entre la ligne de fermeture et le côté du polygone funiculaire qui suit la charge appliquée en G_q.

La seule différence essentielle avec le résultat trouvé pour les poutres prismatiques consiste en ce que la verticale de G_p ne rencontre pas toujours ici le côté dont il s'agit du polygone funiculaire, mais seulement son prolongement. Cela arrive notamment si la barre d'indice p est une diagonale.

Quand les charges appliquées agissent, non pas directement sur les nœuds, mais sur un longeron qui les y reporte, on peut au préalable en faire la décomposition suivant les verticales des nœuds et rentrer dans le cas précédent. Mais on peut plus simplement tracer le polygone funiculaire des charges, sans s'inquiéter de leur position par rapport aux nœuds. Ensuite, on remplace le polygone funiculaire par les cordes qui joignent deux à deux les points situés sur les verticales des nœuds de charge successifs. Ces cordes sont, en effet, les lignes de fermeture des polygones funiculaires partiels que l'on aurait eu à envisager si l'on avait voulu décomposer les forces données suivant les verticales des nœuds de charge successifs.

Étude d'un arc à triple articulation. — Nous supposerons ici que l'arc repose sur ses nœuds extrêmes pourvus d'articulations, et que les appuis soient de niveau pour simplifier.

On commencera par étudier l'arc, comme si son articulation centrale était supprimée et comme s'il reposait sur des appuis simples. Sous l'action d'une charge mobile $P = 1$, on pourra supposer déterminé le moment de flexion μ correspondant à un sommet quelconque de la poutre, et notamment le moment de flexion μ' au nœud qui forme l'articulation centrale.

La réaction complémentaire d'appui est une force Q dirigée suivant la corde, ligne qui joint les articulations extrêmes. Si l'on désigne par y l'ordonnée d'un sommet rapportée à cette corde, le moment total de flexion en ce sommet sera

$$M = \mu - Qy.$$

Pour l'articulation centrale, on doit avoir $M = 0$. Par suite, Q est déterminée par l'équation déjà rencontrée

$$\mu' - Qy' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{\mu'}{y'}.$$

La ligne d'influence de Q sera donc une réduction de celle de μ'.

Elle se composera de deux droites seulement, si l'articulation centrale est un nœud de charge, ce que nous supposerons.

Dans ces conditions, le moment de flexion en un sommet quelconque G_p, correspondant à la barre d'indice p, sera

$$M_p = \mu_p - Q y_p = \mu_p - \frac{y_p}{y'} \mu'.$$

Sa ligne d'influence, combinaison linéaire de celles de μ_p et de μ' sera donc composée d'un petit nombre de lignes droites, et ses sommets, ou points de brisure, se rencontreront toujours d'un côté sur la verticale de l'articulation centrale, point de brisure pour μ', et d'un autre côté sur les verticales des nœuds de charge G_q et G_r qui encadrent le sommet G_p, si celui-ci n'est pas lui-même un nœud de charge, ou simplement sur G_p, s'il est lui-même un nœud de charge.

La règle qui s'en déduit pour la détermination de la ligne d'influence de M_p, ou de t_p, est la suivante.

On placera la charge mobile à l'aplomb de l'articulation centrale et l'on déterminera les tensions dans les barres. On aura ainsi d'un seul coup les points de toutes les lignes d'influence qui sont situés sur la verticale de l'articulation centrale. Puis, pour une barre déterminée, d'indice p, on supposera la charge mobile à l'aplomb de G_p, si ce point est un nœud de charge, ou à l'aplomb des nœuds de charge qui l'encadrent dans le cas contraire. On aura ainsi les points situés sur ces verticales et l'on n'aura plus qu'à joindre par des droites les différents points déterminés.

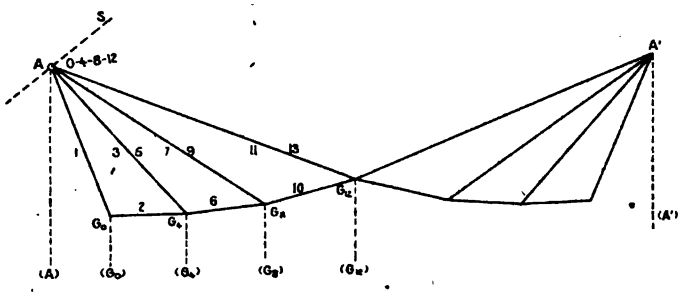
Nous allons donner un exemple détaillé de ces déterminations.

Fermes du type Gisclard. — Une ferme Gisclard est un arc à triple articulation renversé, l'articulation centrale O étant au-dessous des appuis ou articulations extrêmes A et A'.

Chaque demi-ferme, telle que AO, est composée de triangles accolés, dont deux côtés passent par le point A. On n'a donc pas un schéma réticulaire, mais seulement un schéma pseudo-réticulaire. On résoudra le nœud multiple A en supposant intercalés des triangles infiniment plats dont les bases seront par exemple dirigées suivant une même droite arbitraire AS, qu'on pourra même supposer verticale pour faciliter certains calculs. La figure indique le

numérotage à attribuer aux barres et aux nœuds dans le système réticulaire équivalent. Chaque diagonale se trouvera dédoublée

Fig. 139.



(exception faite de la première) et portera deux numéros impairs successifs. Les côtés intercalaires infiniment petits, dirigés suivant AS, porteront les numéros 0, 4, 8, 12 (en tenant compte de la barre zéro d'un schéma prolongé vers la gauche). Les nœuds inférieurs de la poutre sont leurs sommets opposés, et portent les mêmes numéros. Ils constituent, de plus, la suite des nœuds de charge, car c'est en ces nœuds que s'attache le tablier portant les charges. La ligne brisée formée par ces nœuds tourne généralement sa concavité vers le haut; à titre exceptionnel, c'est une ligne droite. Ses différents côtés sont les numéros pairs 2, 6, 10 et ont pour sommets opposés le point A.

On distinguera donc ces côtés, de numéros pairs ($m4 + 2$) qu'on appellera *liens*, des côtés de numéros impairs qu'on appellera *haubans*. Le hauban central AO jouera un rôle spécial. Toutes ces barres sont constituées par des câbles flexibles et ne peuvent en principe résister à des compressions.

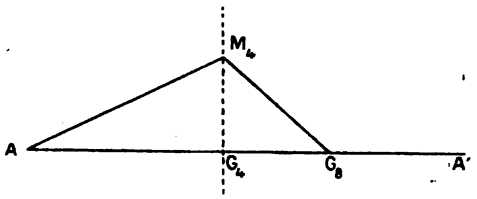
Ceci posé, il est très simple de reconnaître la forme des lignes d'influence des tensions et de trouver les ordonnées des points de brisure qui les définissent.

Tout d'abord, il est aisé de reconnaître que, lorsque la charge mobile $P = 1$ est appliquée à l'un des nœuds de charge, elle ne provoque aucune tension dans toutes les barres simples situées à sa gauche, c'est-à-dire portant des numéros inférieurs à celui du nœud chargé. Exception doit cependant être faite pour le hauban central AO, que nous examinerons à part.

Supposons, en effet, la charge P appliquée en G_8 par exemple. Cette charge se décomposera simplement suivant la diagonale 7-9 et le lien n° 10. Il n'y aura aucune tension dans le lien précédent numéroté 6. C'est presque évident et au surplus cela résulterait du théorème de Ritter, car pour la barre 6 le sommet opposé est A et il n'y a aucun nœud chargé, de numéro inférieur à 6, à l'exception du nœud A lui-même. On a donc $M_6 = 0 = t_6$. Il ne peut par suite y avoir de tension dans les barres qui précèdent la barre n° 6.

Considérons maintenant cette barre n° 6. Les nœuds de charge qui l'encadrent sont G_4 et G_8. On sait qu'au delà de G_8 la ligne

Fig. 140.



d'influence se confond avec la ligne de référence O. Elle aura donc en G_8 un point de brisure connu, et d'ordonnée nulle. Il suffit de déterminer son second point de brisure, situé sur la verticale (G_4). La ligne d'influence a la forme ci-contre AM_4G_8A' et ne présente qu'une zone. L'ordonnée M_4G_4 s'obtiendra d'ailleurs en supposant la force $P = 1$ appliquée au nœud G_4, et en le décomposant suivant la barre 6 et la diagonale 3-5. Cela ne peut donner qu'une traction et par suite il ne peut y avoir que des tractions dans la barre considérée.

Examinons maintenant un hauban tel que 3-5, qui est toujours une barre dédoublée. Les nœuds de charge qui encadrent la barre simple n° 3 sont G_0 et G_4. Ceux qui encadrent la barre simple n° 5 sont G_4 et G_8. On sait que le point de brisure situé sur (G_8) a une ordonnée nulle et qu'au delà de G_8 la ligne d'influence se confond avec la ligne de référence. Il reste donc à déterminer les points de brisure N_4 et N_0 situés respectivement sur (G_4) et (G_0) respectivement. La détermination de l'ordonnée G_4N_4 est toute faite, car elle résulte de la décomposition de la charge P, appliquée en G_4, suivant le hauban considéré et suivant la barre n° 6. Elle corres-

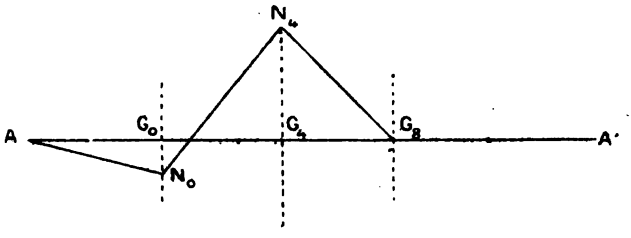
pond nécessairement à une traction. Pour avoir l'ordonnée G_0N_0, on supposera la charge P appliquée au nœud G_0 et on la décomposera d'abord suivant les barres 1 et 2. Ensuite on décomposera la traction ainsi trouvée pour la barre n° 2, suivant les deux barres 6 et 3-5.

Ici, il faut faire une remarque essentielle. Si la ligne brisée formée par les nœuds de charge est concave vers le haut, comme nous l'avons supposé, la direction de la barre 2 prolongée passera au-dessous de la barre 6 et l'on sera conduit à un effort de compression dans le hauban 3-5. Cet effort sera d'autant plus faible que l'angle aigu des deux côtés successifs 2 et 6 sera plus petit, et il deviendra nul si cet angle est nul, c'est-à-dire si les nœuds de charge $G_0G_4G_8$ sont en ligne droite.

Dans le cas le plus ordinaire, la ligne d'influence aura donc la forme ci-dessous $AN_0N_4G_8A'$ et présentera deux zones, une positive et une négative, cette dernière disparaissant si les nœuds de charge sont en ligne droite.

Enfin, examinons le hauban spécial AO. Il joue le rôle d'un hauban ordinaire tant que la charge mobile affecte la demi-ferme de gauche. Quand la charge dépasse l'articulation O, il joue le rôle

Fig. 141.

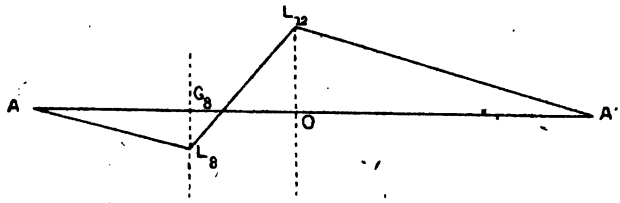


d'une retenue pour la demi-ferme de droite. Sa tension ne peut, dans ce second cas, que varier linéairement avec l'abscisse de la charge; autrement dit, sa ligne d'influence est une ligne droite entre O et A'. La ligne d'influence complète sera de la forme ci-contre $AL_8L_{12}A'$. Elle a encore une zone positive et une zone négative dans le cas général, cette dernière zone pouvant encore disparaître quand le lien n° 10 est dans le prolongement de la barre OA'.

En conséquence, on pourrait théoriquement éviter toute com-

pression dans les haubans en établissant tous les nœuds de charge en ligne droite et dans le prolongement de OA'. Mais cette solution

Fig. 142.



radicale aurait l'inconvénient d'augmenter d'une manière excessive la hauteur de la construction et elle n'est d'ailleurs aucunement nécessaire. En effet, l'ouvrage portera toujours, antérieurement aux surcharges variables qui lui seront imposées, une certaine charge permanente, plus ou moins assimilable à une charge uniformément répartie. Cette charge permanente produira des tensions dans toutes les barres, à moins de circonstances très exceptionnelles, car la surface des zones positives des lignes d'influence l'emporte sur celle des zones négatives. Dans ces conditions, il ne pourra y avoir compression dans un hauban que si les surcharges peuvent y produire une compression maxima supérieure à la tension initiale qu'il prend sous l'action de la charge permanente. Or, il est toujours possible d'éviter cette éventualité par un tracé convenable de la ligne brisée passant par les nœuds de charge.

M. Résal a donné l'équation d'une courbe limite sur laquelle il convient en principe, de placer les différents nœuds pour qu'on soit assuré de donner partout la prépondérance à l'effet de la charge permanente. Cette courbe dépend du rapport de la charge permanente p, supposée uniformément répartie, à la surcharge variable q, supposée aussi uniformément répartie. Pour trouver son équation, on suppose que les nœuds de charge sont infiniment rapprochés, et l'on écrit que pour la diagonale qui aboutit à l'un d'eux, les airès positives et négatives de la ligne d'influence sont dans le rapport $\frac{p+q}{p}$.

Plus simplement, on déterminera par quelques tâtonnements les directions à attribuer aux barres 10-6-2 successivement rencontrées à partir du nœud central.

Pour la barre n° 10 par exemple, il faut faire en sorte qu'il n'y ait pas de renversement d'efforts dans le hauban central AO. Or, la ligne d'influence de ce hauban possède un point de brisure L_{12} qui ne dépend pas de la direction de la barre n° 10. Celle-ci influe seulement sur l'ordonnée L_8G_8 du point de brisure situé sur la verticale G_8. Quand on connaît la charge permanente et les surcharges variables à envisager, il est facile de déterminer la valeur maxima Y qui peut être admise pour cette ordonnée L_8G_8. Une fois celle-ci connue, on essaiera pour le nœud G_8 diverses positions prises sur la verticale (G_8) et l'on s'arrêtera à celle qui donne pour l'ordonnée L_8G_8 une valeur égale, ou légèrement inférieure à Y.

La position du nœud G_8 étant fixée, on procédera d'une façon analogue pour fixer celle du nœud précédent G_4. Il s'agit cette fois de faire en sorte qu'il n'y ait pas de renversement d'efforts dans le hauban 7-9. Or, la ligne d'influence de ce hauban a encore un sommet [celui correspondant à la verticale (G_8)], qui ne dépend que de la position de G_8, déjà fixée, et non de celle de G_4. On déterminera G_4 sur la verticale correspondante (G_4), de manière que le second sommet de la ligne d'influence ait une ordonnée négative acceptable, et ainsi de suite.

On arrive ordinairement très vite à placer deux des nœuds successifs sur une même horizontale, tout en satisfaisant à la condition qu'il n'y ait pas de renversement d'efforts dans la diagonale correspondante. A partir de ce moment, le plus simple est de placer tous les nœuds restants sur cette même horizontale.

On peut avoir, dans certains cas, intérêt à placer systématiquement tous les nœuds sur une même droite, horizontale, ou presque horizontale, ou même sur une ligne légèrement convexe épousant la forme du tablier suspendu à la ferme. Ce tablier pourrait alors remplacer les liens. On n'aurait de renversements d'efforts à craindre que dans le hauban central. Il pourrait être opportun pour l'éviter de recourir à un procédé pratique, tout différent de celui qui vient d'être exposé. Il consisterait à alourdir artificiellement la partie centrale du tablier, au moyen d'un lest approprié, de manière à augmenter la tension initiale des haubans centraux.

Remarque. — Dans ce qui précède nous avons supposé, pour

simplifier l'exposé, que l'on avait recours à des constructions graphiques pour trouver les tensions des barres. Mais on peut tout aussi bien recourir au calcul. Cherchons par exemple à calculer les ordonnées M_1G_1 et N_1G_1 des lignes d'influence du lien n° 6 et du hauban 3-5, lorsque la charge P coïncide avec le nœud G_1. Prenons pour direction positive dans la barre 6 celle qui va de G_1 à G_8 et appelons α l'angle positif qu'elle fait avec l'horizontale. Prenons de même comme direction positive dans le hauban, celle qui va de A à G_1 et appelons $-\beta$ l'angle (négatif) qu'elle fait avec l'horizontale. La direction de la charge P faisant un angle $\gamma = -\frac{\pi}{2}$ avec l'horizontale, on aura en appliquant les formules générales, et en désignant par T_α et T_β les tensions respectives des barres 6 et 3-5,

$$T_\alpha = -P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad T_\beta = P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Ce sont deux *tractions*.

Calculons de même l'ordonnée $G_0N_0 = T'_\beta$ de la ligne d'influence du hauban 3-5. Il faut passer par l'intermédiaire de la tension $T_{\alpha'}$ qui se produit dans la barre n° 2 sous l'action d'une charge P appliquée en G_0. On a, d'après la première des formules précédentes,

$$T_{\alpha'} = -P\frac{\cos\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')},$$

en désignant par α' et β' les angles que font avec l'horizontale la barre n° 2 et le hauban n° 1. Cette tension $T_{\alpha'}$ est dirigée de G_4 vers G_0; elle est négative par rapport au sens positif choisi sur la barre n° 2. Il faut la décomposer à son tour suivant les directions 6 et 3-5. En appliquant les formules générales on trouve

$$T'_\beta = -P\frac{\cos\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')}\,\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

On voit que si $\alpha = \alpha'$, on a $T'_\beta = 0$, et que si $\alpha > \alpha'$, on a $T'_\beta < 0$, et par suite une compression dans le hauban.

On peut, en utilisant ces formules, trouver assez simplement l'équation de la courbe limite de M. Résal. Supposons les nœuds de charge infiniment voisins et situés sur une courbe qui ait pour équation $y = f(x)$. Soit dx l'intervalle constant qui sépare deux

nœuds de charge successifs. L'aire positive de la ligne d'influence du hauban qui aboutit au point G (xy) a pour valeur $T_\beta \times dx$. L'aire négative a pour valeur $\frac{1}{2} T'_\beta \times x$. Il faut écrire que leur rapport est égal à $\frac{p+q}{p}$ en valeur absolue.

Or, ce rapport a pour valeur principale

$$\frac{2\,dx}{x\sin(\alpha-\alpha')}\,\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta'} = \frac{2\,dx}{x\,d\alpha}\cos^2\alpha(\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta).$$

D'un autre côté, on a

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx}$$

et, par suite,

$$d(\operatorname{tang}\alpha) = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx.$$

Le rapport en question peut donc s'écrire

$$\frac{2\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\right)}{x\frac{d^2y}{dx^2}}$$

et l'équation différentielle cherchée est

$$(p+q)x\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\right)2p$$

ou encore

$$\frac{p+q}{2p}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

C'est une équation linéaire facile à intégrer.

III. — Recherche des déformations.

Déformation d'une barre. — Nous supposons que la section de chaque barre soit la même d'un bout à l'autre. Alors si t est la traction s'exerçant dans une barre de longueur l et de section S, l'allongement de cette barre sera donné par la formule

$$\lambda = \frac{tl}{ES}.$$

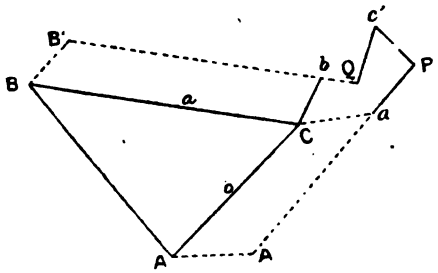
Si t représente une compression, λ représente naturellement un raccourcissement.

Déformation d'ensemble. — Lorsque l'on connaît les efforts supportés par toutes les barres d'un système articulé, ainsi que les sections de ces barres, on peut donc déterminer tous leurs allongements et l'on peut construire la figure déformée, puisque l'on connaît les nouvelles longueurs de toutes les barres.

Mais la construction de la figure déformée n'est pas pratique, à cause de la petitesse relative des déformations par rapport aux longueurs des barres. On peut y suppléer par plusieurs méthodes.

1° Méthode basée sur le déplacement relatif d'un sommet par rapport a deux autres. — Supposons, ce qui est un cas absolument général, que les sommets A et B étant fixés, un troisième sommet C puisse s'en déduire par la connaissance des lon-

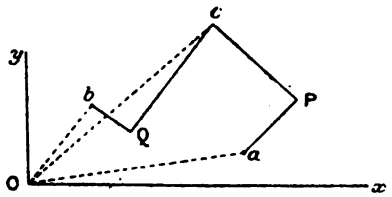
Fig. 143.



gueurs des barres $AC = b$ et $BC = a$, puis qu'un quatrième sommet puisse se déduire de deux des trois premiers, et ainsi de suite.

Soient A', B', C' les positions des trois sommets après déformation.

Fig. 144.



Les points A' et B' sont supposés connus, ainsi que les allongements α et β des côtés a et b.

Par A′ traçons une parallèle à AC, et prenons $A'a = b$ et $aP = \beta$.

Par β' traçons de même une parallèle à Bc, et prenons $B'b = a$ et $bQ = \alpha$.

Pour trouver le point C′, il suffit de décrire de A′ comme centre avec $A'P = b + \beta$ pour rayon un arc de cercle PC′, et de B′ comme centre avec $B'Q = a + \alpha$ un second arc de cercle QC′ et de prendre leur intersection. Les arcs de cercle PC′ et QC′ peuvent, à des infiniment petits près du second ordre, être remplacés par les perpendiculaires PC′ et QC′ élevées sur A′P et B′Q respectivement, les angles de A′C′ et de B′C′ avec AC et BC respectivement étant très petits.

La figure CaPc'QbC qui fournit le déplacement cc' du point C peut donc être construite indépendamment de la connaissance des points A et B, et peut par suite être tracée à une échelle arbitraire aussi grande qu'on le voudra, et elle se réduit à ceci. Sur une figure auxiliaire (rapportée si l'on veut à deux axes Ox, Oy), on marque les points a et b, tels que les vecteurs Oa et Ob représentent les déplacements des sommets A et B :

$$Oa = Ca = AA', \qquad Ob = cb = BB'.$$

Par a on mène un vecteur aP parallèle au côté b et égal à β. Par b on mène un vecteur bQ parallèle au côté a et égal à α. On trace les perpendiculaires Pc et Qc à ces derniers vecteurs. Le vecteur Oc représente le déplacement CC′ du sommet C.

On peut grouper sur la même figure les constructions suivantes qui détermineraient le déplacement d'un quatrième sommet, et ainsi de suite.

Il est bien évident que les déplacements ainsi trouvés ne seront que des déplacements relatifs et non les déplacements réels, si les déplacements attribués aux deux premiers sommets ne sont pas eux-mêmes des déplacements réels. Ces déplacements relatifs définiront seulement la nouvelle forme de la poutre et non sa nouvelle position.

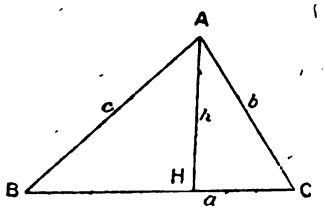
L'épure dont il vient d'être parlé peut également servir pour la détermination des déplacements angulaires, tel que l'angle C′A′P que fait la nouvelle direction A′C′ avec AC. Il suffira de mesurer PC′ ou Pc à l'échelle de l'épure et de diviser sa valeur par celle du

côté b. Le sens du déplacement angulaire est toujours indiqué sans ambiguïté par le sens du vecteur Pc.

On peut de même en déduire la variation subie par l'angle de deux barres quelconques. C'est la différence des déplacements angulaires des deux barres, pris chacun avec son signe.

2° Méthode particulière aux poutres réticulaires. — *a. Variation d'un angle* A *d'un triangle quand le côté opposé a éprouve*

Fig. 145.



un allongement α, *les deux autres côtés demeurant de longueur invariable.* — De la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

on déduit par différentiation

$$2a\alpha = + 2bc \sin A \, dA.$$

Mais $bc \sin A = ah$, en désignant par h la hauteur correspondante au côté a. Par suite, on a

$$\alpha = h \, dA$$

ou

$$dA = \frac{\alpha}{h}.$$

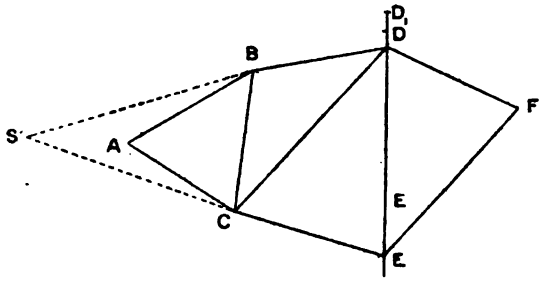
b. Déplacement élémentaire d'un point invariablement lié à l'extrémité de la poutre lorsqu'une des barres subit un allongement α. — Si une des barres de la poutre s'allonge, il en résulte une déformation pour le triangle ou pour les deux triangles dont elle fait partie. Mais à gauche comme à droite restent deux tronçons sans déformation. Celui de gauche reste immobile par hypothèse, celui de droite subit au contraire un certain déplacement, et ce déplacement d'une figure invariable de forme ne peut

être autre chose qu'une rotation autour d'un certain centre instantané.

Ce centre instantané est toujours le sommet opposé à la barre qui s'allonge.

En effet, supposons d'abord qu'il s'agisse d'une membrure telle que BD, dont le sommet opposé est le point C. Ce point, considéré

Fig. 146.



comme faisant partie du tronçon de gauche, demeure fixe par hypothèse. Considéré comme faisant partie du tronçon de droite, il constitue le centre instantané de rotation, en raison de sa fixité.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de la diagonale CD, dont le sommet opposé est S, point de concours des côtés BD et CE qui l'encadrent. Le point B étant fini, et la longueur BD invariable, le déplacement du point D est DD_1 perpendiculaire à BD. De même, le point C étant fixe et la longueur CE invariable, le déplacement du point E ne peut être que perpendiculaire à CE. Par suite, le centre instantané, qui est le point de rencontre des perpendiculaires élevées au milieu de DD_1 et de EE_1, ne peut être autre que le point S.

En ce qui concerne la grandeur de la rotation, elle est donnée par la variation de l'angle correspondant à la barre déformée dans le *triangle constitué par cette barre et par le sommet opposé.* Ce résultat est évident quand il s'agit d'une membrure telle que BD. Quand il s'agit d'une diagonale telle que CD, il suffit pour le vérifier de constater que la rotation est mesurée par

l'angle DSD, qui est la variation de l'angle DSC, puisque le point C reste fixe.

La valeur de la variation de l'angle dont il s'agit a donc pour expression dans tous les cas $\omega = \pm \frac{\alpha}{h}$, α étant l'allongement de la barre et h sa distance au sommet opposé.

Enfin, en ce qui concerne son signe, on voit facilement qu'il faut toujours prendre $\omega = -\frac{\alpha}{h}$, quand on compte comme nous l'avons fait les rotations positives dans le sens de Ox vers Oy et quand on admet pour h la règle qui lui attribue le signe $+$ lorsque le sommet est à droite de la barre. En effet, si la barre CE s'allonge, on a $h < 0$, et ω positif. Si l'on prend une barre supérieure, telle que BD, on a $h > 0$, et ω négatif. Enfin, pour une diagonale telle que CD, ayant son sommet opposé S à sa gauche, on a encore $h < 0$ et $\omega > 0$.

Cela posé, si l'on appelle p et q les coordonnées d'un point P invariablement lié à l'extrémité droite de la poutre, et si l'on appelle ξ et η celles du sommet opposé à la barre qui s'allonge, les composantes u, v du déplacement du point P seront

$$u = -\omega(q - \eta) = +\frac{\alpha}{h}(q - \eta),$$

$$v = \omega(p - \xi) = -\frac{\alpha}{h}(p - \xi).$$

Si l'allongement α résulte de la tension qui s'exerce dans la barre, il a pour expression $\alpha = -\frac{tl}{ES}$, et, en vertu du théorème de Ritter, t a pour expression $t = \frac{M}{h}$. Il en résulte pour ω la valeur suivante :

$$\omega = \frac{Ml}{ESh^2},$$

expression dans laquelle il n'y a plus besoin de s'occuper du signe de h qui intervient au carré.

Si l'allongement α résulte d'une augmentation de température produisant l'allongement τ par unité de longueur, on a

$$\alpha = l\tau \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{l\tau}{h}.$$

c. Déplacement total du point P *lorsqu'un nombre quelconque de barres se déforment.* — En supposant que tous les allongements ou raccourcissements puissent être assimilés à des infiniment petits, ainsi que les déplacements totaux du point P, on peut totaliser tous les résultats obtenus pour les différentes barres et l'on parvient sans peine aux formules suivantes dans le cas où les déformations sont dues aux charges :

$$\omega = \omega_0 + \sum \frac{Ml}{ESh^2},$$

$$v = v_0 + \omega_0(p - x_0) + \sum \frac{Ml}{ESh^2}(p - \xi),$$

$$u = u_0 - \omega_0(q - y_0) - \sum \frac{Ml}{ESh^2}(q - \eta).$$

Dans le cas où les déformations seraient dues à une augmentation de température, il faudrait ajouter aux seconds membres les sommes

$$-\sum \frac{l\tau}{h}, \qquad -\sum \frac{l\tau}{h}(p - \xi), \qquad -\sum \frac{l\tau}{h}(q - \eta)$$

respectivement.

Dans ces formules, les sommations sont supposées faites pour toutes les barres. Si l'on voulait trouver seulement le déplacement d'un nœud de coordonnées xy de la poutre réticulaire, il faudrait, bien entendu, supposer la poutre limitée à ce nœud et ne faire les sommations que pour les barres de la poutre réduite dont ce nœud serait l'extrémité de droite. Les coordonnées p et q seraient à remplacer par celles xy de ce nœud.

Remarque I. — On voit sans peine l'analogie de ces formules avec les formules de déformation des poutres prismatiques. Il y a presque identité, et il suffit pour opérer la transformation de remplacer les quantités $\frac{Mdl}{EI}$ par les quantités $\frac{Ml}{ESh^2}$.

Remarque II. — Généralement on peut, dans ces formules, négliger les termes qui proviennent des changements de longueur des diagonales. Ces termes sont relativement petits pour une double raison.

D'une part, les tensions par unité de surface de la section sont

généralement plus faibles pour les diagonales que pour les membrures.

D'autre part, la quantité h relative à une diagonale est généralement grande par rapport à la hauteur de la poutre. Dans les poutres droites, à membrures parallèles, elle est même infinie. Il en résulte que pour les diagonales les rotations élémentaires $\omega = -\frac{\alpha}{h}$ sont très petites et que les déplacements u, v qui en résultent sont simplement de l'ordre de grandeur de α. Ils sont négligeables par rapport aux termes $\frac{\alpha(p-\xi)}{h}$ et $\alpha\frac{q-\eta}{h}$ qui proviennent des membrures un peu éloignées de l'extrémité gauche de la poutre.

Cette simplification a quelque analogie avec celle qui consiste à négliger la déformation due à l'effort tranchant dans les poutres prismatiques.

Remarque III. — Si aucune charge n'agit sur la poutre et si celle-ci n'est soumise qu'à une élévation de température et est d'ailleurs complètement libre de se dilater, elle se transforme en une figure homothétique à la figure primitive. Par suite, on a les relations suivantes :

$$\sum \frac{l}{h} = 0,$$

$$\sum \frac{l}{h}(x_1 - \xi) = y_1 - y_0 \quad \text{ou} \quad \sum \frac{l\xi}{h} = (y_0 - y_1),$$

$$\sum \frac{l}{h}(y - \eta) = x_1 - x_0 \quad \text{ou} \quad \sum \frac{l\eta}{h} = x_1 - x_0.$$

Ces relations expriment des propriétés géométriques de toute figure réticulaire.

Étude de la déformation verticale d'une poutre réticulaire. — Appliquons les deux premières formules de déformation à la poutre extrême, et pour simplifier supposons $x_0 = 0$ et $x_1 = L$, L étant la longueur de la poutre. Supposons d'ailleurs $v_0 = v_1 = 0$. On trouvera facilement

$$-L\omega_0 = \sum \frac{Ml}{ESh^2}(L - \xi).$$

Par suite, ω_0 sera la réaction de l'appui de gauche sous l'action de charges fictives égales à $-\frac{Ml}{ESh^2}$ appliquées aux différents

sommets (d'abscisses ξ), pour la poutre reposant sur appuis simples.

On a, de plus,

$$v = \omega_0 x + \sum \frac{Ml}{ESh^2}(x - \xi)$$

et l'on peut considérer v comme le moment de flexion produit au sommet (xy) sous l'action des mêmes charges fictives avec la même hypothèse relativement aux appuis de la poutre.

Sans qu'il soit utile d'insister, on voit comment on pourra procéder à l'étude de la déformation v. On n'aurait qu'à suivre pas à pas la théorie déjà faite pour les poutres prismatiques. Si l'on néglige les diagonales, on n'aura de charges fictives à envisager que pour ceux des sommets qui sont des nœuds de la poutre, et le tracé du polygone funiculaire représentatif des moments de flexion, dus aux charges fictives sera des plus faciles.

Travail de déformation dans les poutres réticulaires. — Il est très facile de former l'expression du travail de déformation pour une poutre réticulaire. Si l'on appelle t la tension d'une barre, du reste positive ou négative, le travail est, pour une poutre quelconque,

$$W = \sum t \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2} \frac{tl}{ES} = \frac{t^2 l}{2ES}.$$

Pour une poutre réticulaire, on a $t = \frac{M}{h}$, de sorte que

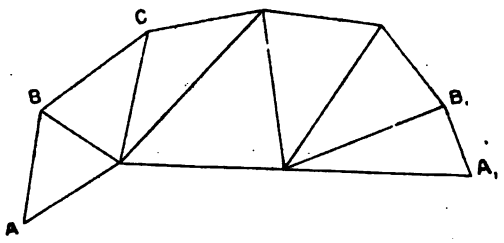
$$W = \sum \frac{M^2 l}{2ESh^2}.$$

IV. — Recherche des réactions des appuis dans les systèmes hyperstatiques.

Nous supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'un arc dont les réactions d'appui ne puissent pas être déterminées par les seules équations de la statique. La méthode générale consistera à étudier le même arc considéré comme reposant sur des appuis statiques convenablement choisis, puis à déterminer les réactions d'appui complémentaires, de telle sorte que les déformations des extrémités de l'arc satisfassent aux conditions imposées par la nature du problème.

Prenons par exemple le cas d'un arc articulé aux deux extrémités A et A_1, soumis à l'action de charges données. On supposera

Fig. 147.



A complètement fixe, et les deux appuis A et A_1 susceptibles de développer seulement des réactions verticales. Il s'ensuivra dans toutes les barres de la poutre certaines tensions et l'on en déduira la forme nouvelle prise par la poutre et le déplacement horizontal u_1 pris par l'extrémité A_1. Il s'agit de trouver ensuite la force horizontale Q, appliquée suivant A_1A, qui serait capable de ramener le point A à sa position primitive, ou de produire un déplacement égal à $-u_1$. Pour y parvenir, on prendra une force quelconque q, exprimée par un nombre simple d'unités de force, et l'on déterminera les tensions qu'elle produirait dans toutes les barres du système si elle était seule. On en déduira le déplacement u'_1 du point A_1. La force cherchée Q doit être telle que

$$\frac{Q}{u_1} = \frac{q}{u'_1}.$$

Prenons en second lieu le cas d'un arc encastré suivant les deux barres extrêmes AB et A_1B_1. Les points A et A_1 sont complètement fixes, par exemple, et les points B et B_1 ne peuvent subir de déplacements que dans les directions AB et A_1B_1 respectivement. Comme système d'appuis statiques, on peut supposer qu'on conserve l'encastrement AB et qu'on supprime celui de droite. Alors on pourra étudier la poutre comme une console sous l'action des charges données, et déterminer les déplacements ω_1, u_1 et v_1 de l'extrémité de droite. Ensuite, *dans la même hypothèse*, on cherchera l'effet produit : 1° par une force verticale, unité appliquée en A_1 ; 2° par une force unité agissant suivant AA_1 ; 3° par un couple de forces égal à l'unité et ayant pour bras de

levier A_1, B_1. On déterminera pour chacun de ces cas les déplacements

$$\omega'_1, \quad u'_1, \quad v'_1;$$
$$\omega''_2, \quad u''_1, \quad v''_1;$$
$$\omega'''_1, \quad u'''_1, \quad v'''_1.$$

de l'extrémité de droite. Les réactions cherchées, qui sont la force verticale T, la force horizontale Q, et le moment d'encastrement X, seront données par les trois équations du premier degré

$$T\omega'_1 + Q\omega''_1 + X\omega'''_1 + \omega_1 = 0,$$
$$T u'_1 + Q u''_1 + X u'''_1 + u_1 = 0,$$
$$T v'_1 + R v''_1 + X v'''_1 + v_1 = 0.$$

Méthodes spéciales aux poutres réticulaires. — On peut, dans ce cas, utiliser les équations de déformation à la recherche des réactions d'appuis, en suivant identiquement la marche indiquée pour les poutres prismatiques.

Après avoir fait l'étude de la poutre supposée sur appuis simples et trouvé le moment de flexion μ en chaque sommet (ou même simplement en chaque nœud), on écrira que $M = \mu + A + Bx - Cy$, en tenant compte, bien entendu, des conditions du problème et en choisissant les axes de coordonnées qui permettent de les simplifier.

En portant cette valeur de M dans les équations de déformation appliquées à l'arc entier, on obtiendra toujours les équations nécessaires pour déterminer A, B et C.

Dans le cas d'un arc articulé aux naissances, on prendra comme axes de coordonnées la ligne des naissances et une droite perpendiculaire.

Dans le cas d'un arc encastré, on commencera par déterminer le *centre de gravité* et *l'ellipse centrale d'inertie de l'arc*, en supposant que celui-ci est constitué par l'ensemble de ses sommets et qu'à chacun d'eux on applique une force fictive égale à $\frac{l}{ESh^2}$. On prendra ensuite pour axes coordonnés les axes principaux de l'ellipse d'inertie de l'arc, ce qui assurera la séparation des inconnues.

On pourra d'ailleurs, lorque μ désignera le moment de flexion

produit par une charge mobile unité, trouver la ligne d'influence de toute sommation $\Sigma \mu \varphi$, appliquée à l'ensemble des sommets de l'arc, en considérant les forces fictives φ appliquées à ces différents sommets et en traçant leur polygone funiculaire.

Nous sommes obligés de nous borner ici à ces indications sommaires.

Pour terminer, nous rappellerons l'équivalence de cette méthode basée sur la théorie de la déformation avec celle qu'on peut tirer du théorème de Castigliano, ou théorème du travail minimum.

Si l'on pose comme plus haut $M = \mu + A + Bx - Cy$ dans le cas d'un arc encastré, pris comme exemple, l'expression du travail de déformation devient

$$W = \sum \frac{(\mu + A + Bx - Cy)^2 l}{2 ES h^2}.$$

Les composantes des réactions complémentaires des appuis ne doivent produire aucun travail, puisque les appuis sont supposés indéformables, d'où les trois équations de condition

$$\frac{dW}{dA} = 0, \qquad \frac{dW}{dB} = 0, \qquad \frac{dW}{dC} = 0.$$

Ces équations s'écrivent plus explicitement :

$$\sum \frac{(\mu + A + Bx - Cy) l}{ES h^2} = 0,$$

$$\sum \frac{(\mu + A + Bx - Cy) x l}{ES h^2} = 0,$$

$$\sum \frac{(\mu + A + Bx - Cy) y l}{ES h^2} = 0.$$

En développant et mettant en facteur commun les quantités A, B, C, qui sont des constantes au regard de l'opération de sommation, on trouvera identiquement les mêmes équations qu'en partant des équations générales de déformation.

CHAPITRE XVI

POUTRES TRIANGULÉES A ASSEMBLAGES RIGIDES.

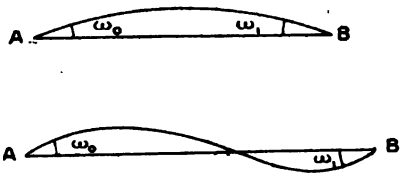
Il existe un grand nombre d'ouvrages dont l'aspect extérieur rappelle celui des poutres articulées. Ils sont constitués comme elles par un réseau de barres distinctes les unes des autres, mais les différentes barres sont réunies, non plus par des articulations, mais par des assemblages rigides ne leur permettant plus de tourner les unes par rapport aux autres. Les angles que ces barres font entre elles à leurs extrémités demeurent au contraire invariables. Il en résulte que les réactions qu'elles exercent ou qu'elles subissent à leurs extrémités ne sont pas forcément dirigées suivant leur direction. Elles sont capables de développer des efforts transversaux et des couples dont l'importance est en rapport avec leur raideur transversale. Leur calcul ne peut plus être fait pratiquement que d'une manière approchée.

I. — Méthode basée sur la théorie des systèmes articulés.

On calcule les tensions dans les barres absolument comme si chaque nœud présentait une articulation au lieu d'un assemblage rigide. On en déduit les allongements des barres, puis la nouvelle forme prise par la poutre. En tenant compte alors de la rigidité des attaches, qui empêche toute modification des angles respectifs des barres autour d'un nœud déterminé, on en déduit, approximativement tout au moins, les directions prises par chaque barre à ses deux points d'attache et les angles ω_0 et ω_1 que fait la fibre moyenne déformée avec la droite joignant ses extrémités. La forme prise par la barre s'en déduit approximativement, et elle affecte soit l'une soit l'autre des figures ci-contre, suivant que les angles ω sont de même signe ou de signe contraire. Dès lors, on

peut évaluer les réactions transversales des abouts et les efforts supplémentaires qui en résultent.

Fig. 148.



La justification de cette façon de procéder résulte des considérations suivantes :

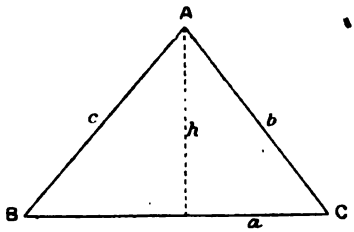
1° *Évaluation du maximum des angles* ω_0 *et* ω_1. — Ces angles sont de l'ordre de grandeur des variations que peut subir l'angle d'un des triangles constituant la poutre. Soit ABC un de ces triangles, dont abc sont les côtés. De la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

on déduit par différentiation, en appelant $\alpha\beta\gamma$ les allongements respectifs :

$$a\alpha = b\beta + c\gamma - (b\gamma + c\beta)\cos A + bc \sin A\, dA.$$

Fig. 149.



Remplaçons $bc \sin A$ par ah et remarquons que

$$b - c\cos A = a\cos C,$$
$$c - b\cos A = a\cos B.$$

La formule précédente donnera

$$dA = \frac{\alpha - \beta\cos C - \gamma\cos B}{h}.$$

Supposons qu'en valeur absolue on ait des allongements ou raccourcissements proportionnels égaux dans toutes les barres, ce qui signifie que toutes les barres ont approximativement la même fatigue, et posons

$$\frac{\alpha}{a} = \pm \frac{\beta}{b} = \pm \frac{\gamma}{c} = m.$$

La formule précédente deviendra

$$dA = \frac{m}{h}(a \pm b\cos C \pm c\cos B).$$

Si les trois barres étaient allongées ou raccourcies à la fois, la parenthèse deviendrait $a - b\cos C - c\cos B = o$. Si l'on suppose, au contraire, que b et c ont des variations contraires à celle de a, la parenthèse deviendra

$$a + b\cos C + c\cos B = 2a.$$

Le maximum de dA est donc $2m\frac{a}{h}$.

Or $\frac{a}{h}$ est presque toujours inférieur à 2 ; il n'atteint cette valeur que quand A atteint 90°.

Quant à $m = \frac{\alpha}{a}$ il est égal à $\frac{t}{ES}$. Or, $\frac{t}{S}$ est toujours inférieur à 12×10^6 et E est égal à 2×10^{10} environ, pour l'acier.

Par suite m est inférieur à $\frac{6}{10^4}$.

Le maximum de dA peut donc se fixer à

$$2 \times 2 \times \frac{6}{10^4} = \frac{24}{10^4} = 0{,}0024,$$

soit 8′ environ.

2° *Évaluation de la variation de distance des deux extrémités d'une barre courbée.* — Lorsqu'un arc de courbe est entièrement d'un même côté de sa corde et que ses tangentes extrêmes font avec la corde des angles ω très petits, la différence de longueur entre l'arc et sa corde est approximativement

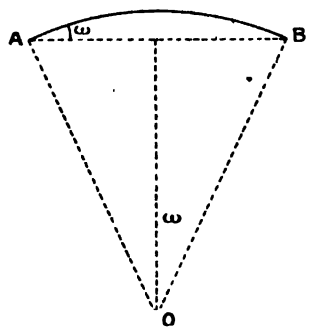
$$\rho\omega - 2\rho\sin\frac{\omega}{2} < \rho\frac{\omega^3}{24}.$$

Le rapport de cette différence à la longueur de l'arc est $< \frac{\omega^2}{24}$. Il en serait *a fortiori* de même si l'arc coupait sa corde.

Si l'on introduit dans cette expression la valeur trouvée précédemment pour le maximum de ω, savoir : $\frac{24}{10^4}$, on trouve $\frac{24}{10^8}$, nombre extrêmement petit.

Les variations de distance des nœuds provenant de la courbure des barres ont donc une valeur tout à fait négligeable. Il est, par

Fig. 150.



suite, tout à fait légitime de ne pas s'occuper de ces courbures pour déterminer les positions relatives des nœuds de la poutre déformée. Autrement dit, *dans la poutre déformée, les différents nœuds occupent les mêmes positions que s'il s'agissait d'une poutre réellement articulée.*

Détermination approximative des angles ω que fait une barre à ses deux extrémités avec la droite joignant ces points. — On peut tracer le schéma de la poutre déformée, c'est-à-dire mettre en place les différents nœuds et en déduire les directions que devraient occuper les barres autour d'un nœud déterminé, si ces barres étaient articulées.

Le problème consiste à superposer au premier faisceau de droites ainsi constitué autour d'un nœud un second faisceau de droites représentant les barres dans la poutre non déformée, et dont les angles mutuels sont supposés conservés en raison de la rigidité des assemblages.

En général, on constaterait que l'angle des deux membrures aboutissant au nœud est très sensiblement conservé dans la déformation, et subit des variations moindres que les angles partiels

dont il est la somme. Cela tient à ce que les membrures sont généralement beaucoup plus rigides que les diagonales. Quoi qu'il en soit, on fera coïncider du mieux possible les lignes correspondant aux membrures primitives avec les lignes correspondant aux membrures déformées, et cette condition suffira à déterminer la position relative des deux faisceaux de droites et l'on en déduira approximativement les angles cherchés.

Bien entendu, nous n'employons ici le langage graphique qu'en raison de sa simplicité. Il faudra s'aider du calcul pour trouver les valeurs des angles après déformation et pour les comparer aux valeurs primitives.

Détermination des efforts secondaires. — Connaissant les angles ω_0 et ω_1 que fait une barre AB à ses deux extrémités avec la droite

Fig. 151.

qui joint ces points, on peut déterminer les couples M_0 et M_1 qui agissent aux deux bouts, ainsi que la réaction transversale $T = \frac{M_1 - M_0}{l}$ qu'elle exerce sur les attaches.

On a tout le long de la poutre

$$M = M_0 \frac{l-\xi}{l} + M_1 \frac{\xi}{l},$$

et l'on a les deux équations connues

$$-l\omega_0 = \int \frac{M(l-\xi)}{EI} d\xi, \qquad l\omega_1 = \int \frac{M\xi}{EI} d\xi,$$

où EI est supposé constant.

On en déduit

$$-EI\omega_0 = \frac{l}{6} M_0 + \frac{l}{3} M_1,$$

$$EI\omega_1 = \frac{l}{3} M_0 + \frac{l}{6} M_1,$$

d'où

$$M_0 = \frac{2EI}{l}(\omega_0 + 2\omega_1),$$

$$M_1 = -\frac{2EI}{l}(\omega_1 + 2\omega_0).$$

On prendra naturellement le plus grand de ces deux moments en valeur absolue pour déterminer la fatigue supplémentaire qui est produite dans la barre. On emploiera à cet effet la formule

$$n = \frac{Mv}{I},$$

et l'on obtiendra par exemple, si $\omega_1 > \omega_0$,

$$n = 2E(\omega_0 + 2\omega_1)\frac{v}{l}.$$

Le moment d'inertie disparaît de cette expression. La fatigue supplémentaire ne dépend donc pas de ce moment d'inertie, mais seulement du rapport $\frac{2v}{l}$, qui, dans le cas d'une section symétrique, est le rapport de la largeur à la longueur de la barre. Il y aura donc en général intérêt à ne pas exagérer la largeur des diagonales d'une poutre triangulée rigide.

Si l'on s'en rapporte aux calculs faits par différents auteurs, la fatigue supplémentaire pour certains types de poutre pourrait atteindre 30 et même 50 pour 100 de la fatigue principale, $\frac{t}{S}$, correspondant aux efforts de traction ou de compression dans les barres.

En ce qui concerne la réaction transversale T, elle est donnée par l'expression

$$T = \frac{M_1 - M_0}{l} = -\frac{6EI}{l^2}(\omega_0 + \omega_1).$$

Elle est nulle si $\omega_0 = -\omega_1$, et c'est toujours une fraction négligeable de l'effort principal t.

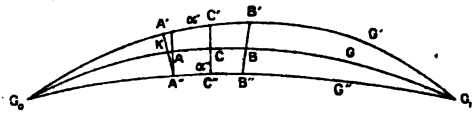
II. — Méthode de M. Résal.

RETOUR A LA THÉORIE DES POUTRES PRISMATIQUES.

Pour simplifier, nous supposerons qu'il s'agisse d'une poutre réticulaire à laquelle le théorème de Ritter soit applicable.

Supposons de plus que les membrures supérieures et inférieures soient des lignes polygonales inscrites dans les deux

Fig. 152.



courbes continues G′ et G″ ayant toutes deux pour extrémités G_0 et G_1.

Enfin, supposons que l'on trace une troisième courbe G, qui ne soit pas trop éloignée des deux courbes G′ et G″ et qui soit par exemple une sorte de *courbe moyenne*, comme dans le cas de la figure.

Soit A′B′ un élément de membrure supérieure et C″ le sommet qui lui est opposé sur la membrure inférieure. Nous admettrons que C″ ne puisse se trouver sur la courbe G″ que dans l'intervalle compris entre les deux sections AA′ et BB′ tracés par A′ et B′ normalement à la courbe moyenne G. C′ est là une hypothèse très générale et vérifiée dans tous les cas usuels.

Posons $h' = AA'$ $h'' = AA''$ et $h = AA' + AA'' = A'A''$, h sera la hauteur de la poutre au point A.

En vertu du théorème de Ritter on aura pour la valeur absolue de la tension dans AB′ l'expression

$$t' = \frac{M''}{k},$$

M″ désignant le moment de la force extérieure par rapport au sommet C″, et k la distance de C″ à A′B′. Or $\frac{M''}{k}$ est une fonction des coordonnées du point C″ qui est continue dans l'intervalle A″B″, et dont les valeurs limites correspondant à A″ et B″ *seront peu écartées si cet intervalle est suffisamment réduit. Autrement dit, la tension dans la barre A′B′ est sensiblement indépendante de la position de* C″, *c'est-à-dire du système de triangulation adopté, pourvu que la poutre soit à mailles suffisamment serrées.*

A la limite, si A′B′ était suffisamment petit pour que l'on

puisse le confondre avec l'élément correspondant de la courbe G', on aurait $k = h \cos\alpha'$, en désignant par α' l'angle des deux tangentes en A' et A respectivement aux deux courbes G' et G.

Désignons par M le moment de la force extérieure par rapport à A, et soient N et T ses composantes suivant la tangente et la normale à la courbe G au point A. On aura

$$M'' = M + N h''.$$

Finalement, la valeur approchée de t' sera donnée par la formule

$$t' \cos\alpha' = \frac{M}{h} + \frac{N h''}{h}.$$

Bien entendu, tout ce qui a été dit pour la membrure supérieure peut être répété pour la membrure inférieure, et l'on trouverait en valeur absolue

$$t'' \cos\alpha'' = \frac{M}{h} - \frac{N h'}{h}.$$

En ce qui concerne les tensions dans les barres de la triangulation, elles dépendent forcément de la façon dont cette triangulalion est tracée, c'est-à-dire de la position du point C''.

Lorsque ce point est défini, on peut profiter des déterminations déjà faites et écrire que l'effort tranchant T, composante de la force extérieure suivant AA', est égale à la somme des projections sur cette droite des tensions des trois barres coupées par la section AA'A''.

Désignons par t''' la tension dans la diagonale et par α''' l'angle qu'elle fait avec la tangente à (G) au point A, on aura

$$T = t' \sin\alpha' + t'' \sin\alpha'' + t''' \sin\alpha''',$$

et cette équation déterminera t'''.

M. Résal a appelé *effort tranchant réduit* la *quantité*

$$W = T - t' \sin\alpha' - t'' \sin\alpha'',$$

et il en résulte que la tension dans la diagonale s'obtient par l'expression

$$t''' = \frac{W}{\sin\alpha'''}.$$

En remplaçant t' et t'' par leurs valeurs dans l'expression de l'effort tranchant réduit W, et faisant attention aux signes, on obtient facilement.

$$W = T - \frac{M}{h}(\tang\alpha' + \tang\alpha'') - \frac{N}{h}(h''\tang\alpha' - h'\tang\alpha'').$$

Le dernier terme peut toujours être négligé, soit que N soit nul, soit que $h''\tang\alpha' - h'\tang\alpha''$ soit petit par rapport aux autres termes.

Par suite on peut toujours employer la formule simplifiée

$$W = T - \frac{M}{h}(\tang\alpha' + \tang\alpha''),$$

qui peut s'écrire, en observant que $\tang\alpha' + \tang\alpha'' = \frac{dh}{dx}$, sous la forme

$$W = T - \frac{M}{h}\frac{dh}{dx}.$$

On peut poursuivre l'identification de cette théorie avec celle des poutres prismatiques. Si l'on appelle S' et S'' les aires des sections droites des membrures, et si l'on particularise la courbe G de telle manière que, en chaque point l'on ait

$$h'S'\cos\alpha' = h''S''\cos\alpha'',$$

[condition qui suppose forcément que (G) est comprise entre (G') et (G'')], on pourra calculer une *section réduite* et un *moment d'inertie réduit*, définis par les relations

$$S = S'\cos\alpha' + S''\cos\alpha'' = \frac{h}{h'}S'\cos\alpha' = \frac{h}{h'}S''\cos\alpha'',$$

$$I = h'^2S'\cos\alpha' + h''^2S''\cos\alpha'' = hh'S'\cos\alpha' = hh''S''\cos\alpha''.$$

On trouvera alors pour les efforts par unité de section dans les membrures

$$n' = \frac{t'}{S'} = \frac{M}{hS'\cos\alpha'} + \frac{Nh''}{hS'\cos\alpha'} = +\frac{N}{S} + \frac{Mh'}{I},$$

$$n'' = \frac{t''}{S''} = -\frac{N}{S} + \frac{Mh''}{I},$$

formules tout à fait identiques à celles des poutres prismatiques.

Au fond, cette identification n'est qu'une question accessoire

en pratique. L'essentiel est que les valeurs des tensions t et des fatigues n se déduisent de la connaissance des valeurs de M et de N aux différents points d'une certaine courbe moyenne ou directrice, connaissance complétée bien entendu par certaines données relevées sur la section de la poutre.

Il est en général avantageux de prendre pour G une courbe facile à tracer *a priori*. Ce sera, par exemple, la courbe définie par la condition que les sections normales A'A'' coupent les deux membrures sous des angles α' et α'' égaux entre eux. Plus simplement encore, ce sera la droite $G_0 G_1$ quand il n'en résultera pas de valeurs trop grandes pour α' et α''. C'est, du reste, le conseil donné par M. Résal lui-même.

Il faut ajouter que cette méthode, pas plus que la méthode précédente, ne dispense de la recherche ultérieure des efforts secondaires. Toutes les deux supposent à l'origine l'assimilation à un système articulé.

Étude de la déformation. — On peut très souvent, ainsi que nous l'avons déjà dit, négliger dans l'étude de la déformation l'effet des variations de longueur des diagonales, principalement lorsque leurs sections sont déterminées un peu largement. Si l'on admet cette simplification, on voit que deux poutres ayant même courbe moyenne et mêmes courbes de pourtour se déforment de la même manière, quelle que soit leur triangulation.

Supposons que celle-ci soit à mailles assez serrées pour que la théorie précédente soit applicable, et négligeons l'effet de la composante normale N dans la déformation, effet que l'on pourra apprécier à part. La rotation ω' due au raccourcissement de la membrure A'B' sera

$$\omega' = \frac{M l'}{E S' K^2} = \frac{M l}{E h^2} \frac{1}{S' \cos^3 \alpha'}.$$

De même, la rotation ω'' due à l'allongement A''B'', sera

$$\omega'' = \frac{M l''}{E S'' K^2} = \frac{M l}{E h^2} \frac{1}{S'' \cos^3 \alpha''},$$

et la rotation ω due aux déformations simultanées des deux mem-

brures, c'est-à-dire au tronçon de poutre A'B'A"B", sera

$$\omega = \frac{Ml}{Eh^2}\left[\frac{1}{S'\cos^3\alpha'} + \frac{1}{S''\cos^3\alpha''}\right].$$

On pourrait définir un nouveau moment d'inertie tel que

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{S'\cos^3\alpha'} + \frac{1}{S''\cos^3\alpha''}\right],$$

et l'on trouverait une formule identique à celle des poutres prismatiques.

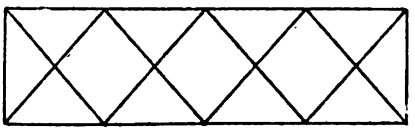
Nota. — On pourra appliquer la théorie précédente toutes les fois que la hauteur moyenne de la poutre ne dépassera pas le dixième de la portée. Pour les poutres hautes et à larges mailles, la méthode des systèmes articulés demeure préférable.

III. — Poutres composées.

On fait souvent usage de poutres articulées, ou bien de poutres à assemblages rigides dont la triangulation ne rentre pas dans la définition des poutres réticulaires, ni même des poutres à nœuds ou à sections canoniques. Mais il arrive fréquemment que le schéma de ces poutres peut résulter de la superposition de deux ou plusieurs schémas réticulaires, ne différant que par leur triangulation.

Par exemple, la poutre à treillis doubles ci-dessous (1) peut être

Fig. 153.



(1)

considérée comme résultant de la superposition des deux poutres réticulaires (2) et (3).

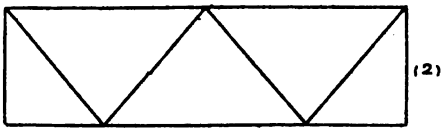
De semblables poutres sont appelées par M. Résal *des poutres composées*. Voici comment on peut les calculer :

On suppose que chacune des poutres (2) et (3), d'abord indépendantes, porte exactement la moitié des charges appliquées à la poutre (1), puis on suppose opérée la soudure de leurs barres

communes. Ce procédé peut se justifier par les considérations suivantes.

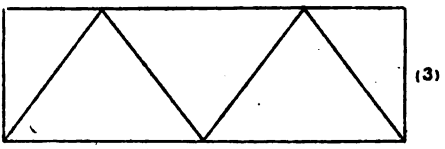
Si les membrures des poutres (2) et (3) ont des sections égales en deux points correspondants, elles ont un même taux de fatigue,

Fig. 154.



car nous avons vu, à propos de la méthode de M. Résal, que les tensions dans les membrures dépendent peu du système de triangulation. Les membrures de la poutre (1) auront donc encore le même taux de fatigue, et les allongements proportionnels des membrures seront les mêmes en des points correspondants.

Fig. 155.



D'autre part, les positions relatives des nœuds dépendent peu du système de triangulation, mais seulement des allongements proportionnels des membrures. Les poutres (2) et (3) auraient donc leurs nœuds en coïncidence après déformation, si on les avait mis primitivement en coïncidence. L'équilibre ne sera pas troublé en réalisant leur soudure, et cet état d'équilibre conviendra évidemment à la poutre réelle qui résulte de la soudure préalable des deux autres.

On applique cette façon de procéder même à des poutres à barres surabondantes ou dont les schémas ont des barres de triangulation communes. Il arrive alors parfois, comme dans les poutres à croix de Saint-André, qu'il faut retrancher et non ajouter les tensions trouvées pour ces barres communes, lorsqu'on les considère comme faisant partie des poutres élémentaires.

Au fond, cela revient à calculer toutes les poutres triangulées, quelles qu'elles soient, pourvu que leurs mailles soient suffisam-

ment serrées, par un procédé uniforme, qui consiste à attribuer aux membrures les tensions qui s'y produiraient si la triangulation était établie suivant un canevas réticulaire quelconque, puis à décomposer la triangulation réelle en un nombre plus ou moins grand m de réseaux réticulaires et à calculer chaque triangulation partielle dans l'hypothèse de charges réduites dans le rapport $\frac{1}{m}$. *Chaque barre de triangulation doit donc résister au $m^{ième}$ de l'effort ranchant ou de l'effort tranchant réduit suivant le cas.*

C'est principalement à M. Résal qu'est dû ce résultat très général qui a une très haute portée pratique.

CHAPITRE XVII.

CABLES DE PONTS SUSPENDUS ISOLÉS OU ASSOCIÉS A DES POUTRES DE RIGIDITÉ.

I. — Cables flexibles.

Un câble diffère essentiellement d'une poutre prismatique. Il n'a par lui-même aucune forme déterminée et est susceptible de subir des déformations considérables sous l'action de forces transversales, même petites. Tout au plus pourrait-on dire, en vue d'une assimilation, qu'un câble est une poutre prismatique dont le moment d'inertie devient nul partout.

Les hypothèses sur lesquelles reposent la Résistance des Matériaux et les formules de la déformation des pièces courbes ne sont donc en aucune façon réalisées. Il en résulte, notamment, qu'on ne peut plus en général écrire les équations d'équilibre sans avoir égard à la forme prise par le câble déformé, et que par suite les équations ne sont plus linéaires par rapport aux forces, ce qui rend le principe de superposition des forces inapplicable.

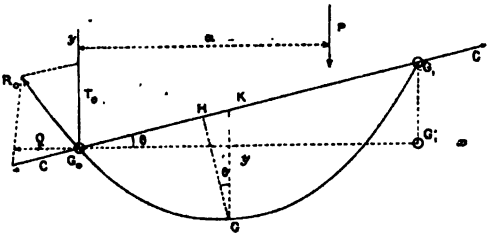
Par contre, des propriétés spéciales assignées au câble découlent naturellement des lois spéciales pour son équilibre. Pour que le câble soit en équilibre, il faut nécessairement que chacun des éléments de sa longueur ne soit soumis qu'à des efforts parallèles à sa propre direction. Autrement dit, la force extérieure doit passer par le centre de gravité de chaque section normale. Autrement dit encore, le moment fléchissant dans chaque section doit être nul.

L'étude de la fatigue d'un câble est, de son côté, simplifiée. Il n'y a plus à s'occuper que de l'effort normal qui s'exerce dans le sens de sa longueur.

Équations générales d'équilibre sous l'action de forces dont les lignes d'action sont données. — Soit le câble G_0G_1 pris dans sa

position d'équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées, forces que nous supposerons toujours verticales. Soit R_0 la réaction du point d'attache de gauche. Décomposons-la suivant la verticale $G_0 y$, et suivant la ligne des appuis $G_0 G_1$ et appelons T_0 et C les composantes.

Fig. 156.



La composante T_0 est égale à la réaction verticale qui se développerait à l'appui G_0 dans une poutre droite de même portée que le câble et reposant sur appuis simples. C'est, en effet, identiquement la même équation qui servirait à la déterminer. Par suite, si l'on prend par rapport au point G le moment de toutes les forces qui agissent à sa gauche, ce moment sera égal au moment μ qui se produirait au point de la poutre droite situé sur la même verticale, augmenté du moment de C. Ce dernier a pour valeur absolue

$$C \times GH = C y \cos\theta,$$

en désignant par θ l'angle que fait avec l'horizontale la ligne des appuis et par y l'ordonnée oblique GK, comptée sur la verticale entre la courbe décrite par le câble et la ligne des appuis.

Le moment total a donc pour expression au point G

$$M = \mu - C y \cos\theta,$$

ou encore, en posant $C \cos A = Q$, c'est-à-dire en désignant par Q la composante *horizontale* de la réaction d'appui,

$$M = \mu - Q y.$$

Jusqu'ici, nous avons traité le câble *dans sa position d'équilibre*, comme une poutre prismatique rigide, et il est bien évident qu'une pareille hypothèse ne trouble pas l'équilibre. Mais la condition qui résulte de la flexibilité du câble consiste en ce que, en

tout point tel que G, on doit avoir $M = 0$, dans la situation d'équilibre. Par suite, on a en tout point

$$\mu - Qy = 0.$$

On en conclut que les ordonnées y du câble, *comptées sur la verticale à partir de la ligne* G_0G_1, sont proportionnelles aux ordonnées d'un polygone funiculaire quelconque des charges appliquées, rapporté à sa ligne de fermeture. Ces dernières ordonnées sont en effet elles-mêmes proportionnelles à μ.

La courbe décrite par le câble est donc l'un de ces polygones funiculaires.

Ce polygone particulier est d'abord assujetti à la condition de passer par les deux appuis G_0 et G_1, et pour achever de le définir il suffit de connaître le coefficient de proportionnalité Q, ou une autre condition équivalente permettant de déterminer Q.

Par exemple, si l'on supposait que, les charges verticales conservant leurs lignes d'action, la longueur du câble est réglable à volonté de telle sorte que, sur une verticale particulière d'abscisse x', le câble ait une ordonnée y' donnée d'avance, on devrait avoir, une fois le réglage terminé,

$$\mu' - Qy' = 0,$$

d'où

$$Q = \frac{\mu'}{y'}.$$

Supposons notamment qu'on envisage la charge permanente, évaluée à p kilogrammes par mètre courant, et que l'on veuille obtenir au milieu de la portée une flèche déterminée f. On aura

$$\mu = p\frac{x(l-x)}{2},$$

et pour $x = \frac{l}{2}$ on aura

$$\mu' = p\frac{l^2}{8}, \qquad y' = f,$$

d'où

$$Q = \frac{pl^2}{8f}.$$

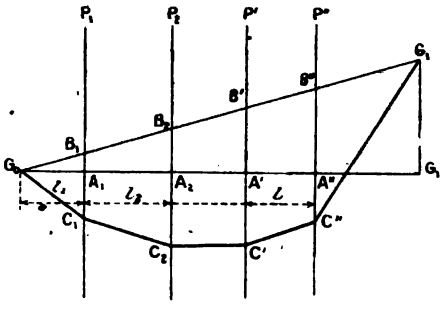
Ou bien encore, si l'on se donne la longueur L du câble, il faudra choisir parmi tous les polygones funiculaires, passant par G_0

et G_1, celui qui a pour longueur L. C'est là un problème facile en théorie, mais qui exige quelques développements pour sa résolution pratique. Nous supposerons, au moins provisoirement, que le câble est inextensible, c'est-à-dire que sa longueur ne varie pas sous l'action des charges.

Calcul de la longueur d'un polygone funiculaire des charges et détermination de Q. — Supposons que l'horizontale $G_0G'_1$, de longueur L', soit divisée en un certain nombre d'intervalles $l_1, l_2, \ldots, l', l'', \ldots$, dans lesquels agissent des charges uniformément réparties $p_1, p_2, \ldots, p', p'', \ldots$

Supposons en outre que, suivant les verticales séparatives des différents intervalles agissent des forces isolées $P_1, P_2, \ldots, P', P'', \ldots$.

Fig. 157.



Rien n'est plus facile que de trouver avec exactitude les valeurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu', \mu'', \ldots$ que prend la fonction μ sur ces différentes verticales. On peut aussi trouver très facilement l'équation de μ dans un intervalle déterminé tel que $A'A'' = l$, on aurait

$$\mu = \mu' + \frac{\mu'' - \mu'}{l} x + p \frac{x(l-x)}{2} = \mu' + tx + p \frac{x(l-x)}{2},$$

en désignant pour abréger par t la quantité $\frac{\mu'' - \mu'}{l}$, et les abscisses x étant comptées à partir de A'.

Supposons maintenant qu'on envisage l'un des polygones funiculaires passant par G_0 et G_1 et représentant μ à une certaine échelle, tel par suite que son ordonnée soit $y = \frac{\mu}{Q}$, Q étant sup-

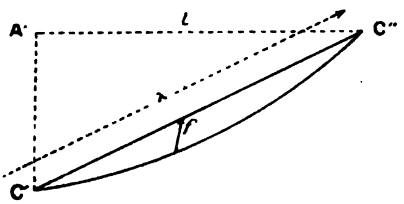
posé d'ailleurs quelconque. On aurait

$$y = \frac{\mu'}{Q} + \frac{t}{Q}x + \frac{p}{Q}\frac{x(l-x)}{2},$$

On peut rectifier avec une très grande approximation cet arc de parabole en employant la formule [1]

$$L = \lambda + \frac{8}{3}\frac{f^2 l^2}{\lambda^3} = \lambda\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2 l^2}{\lambda^4}\right),$$

Fig. 158.



dans laquelle λ est la longueur de la corde C'C'' et f la flèche de l'arc, *comptée sur la verticale*, au milieu de la corde.

On aura, en effet, λ et f par les formules suivantes :

$$\lambda^2 = l^2 + \frac{t^2 f^2}{Q^2} = l^2\left(1 + \frac{t^2}{Q^2}\right),$$
$$f = \frac{pl^2}{8Q}.$$

En faisant la sommation pour tous les arcs analogues, on aurait la longueur totale du polygone funiculaire particulier considéré.

Si donc on connaît la longueur L du câble, on pourra, par tâtonnements, trouver un coefficient de proportionnalité Q qui assure l'égalité de longueur entre le câble et le polygone funiculaire correspondant. On pourra essayer successivement plusieurs valeurs de Q, et, quand on en aura deux qui donnent, l'une un résultat trop

---

[1] Cette formule, indiquée par M. Résal, se déduit de la formule approchée

$$L = \lambda + \frac{8}{3}\frac{\varphi^2}{\lambda}$$

applicable à tout arc de courbe aplati assimilable à un arc de parabole, et dans laquelle φ est la flèche comptée au milieu *normalement à la corde*. Il est facile de voir que l'on a $\varphi = f\frac{l}{\lambda}$, approximativement.

grand, l'autre un résultat trop petit, on aura par interpolation la valeur de Q cherchée.

En pratique, ainsi que nous le montrerons plus loin, on peut toujours avoir à l'avance une valeur de Q plus ou moins approchée, et il ne s'agit que de la corriger. Voici comment on parvient d'une manière très simple à effectuer cette correction.

On peut admettre que la longueur d'un polygone funiculaire quelconque est, dans certaines limites, donnée par une expression de la forme

$$L = \lambda + ky^2,$$

λ désignant la corde, K étant un coefficient constant et y une ordonnée particulière.

C'est la forme générale des formules de rectification des courbes aplaties.

Supposons que dans un essai fait avec la valeur Q_1 on ait obtenu une longueur L_1, et une ordonnée y_1, on aurait

$$L_1 - \lambda = ky_1^2,$$

tandis que l'ordonnée y serait liée à la vraie longueur L par l'équation

$$L - \lambda = ky^2.$$

De là on tirerait

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{L - \lambda}{L_1 - \lambda}.$$

Or on a

$$\mu = Qy = Q_1 y_1.$$

Par suite,

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{y_1}{y} = \sqrt{\frac{L_1 - \lambda}{L - \lambda}}.$$

Ce mode de correction est pratiquement très exact. Nous en donnerons plus loin une justification plus complète.

Méthode simplifiée pour les câbles à flèche modérée et à appuis sensiblement de niveau. — La méthode précédente, due à M. Résal, peut être simplifiée encore quand il s'agit de câbles dont la corde est sensiblement horizontale, et qui demeurent suffisamment voisins de cette corde pour qu'on puisse négliger devant l'unité les quatrièmes puissances du coefficient angulaire de la tangente,

autrement dit les quatrièmes puissances de $\frac{dy}{dx}$. Ce cas est assez étendu, puisque une parabole dont la flèche est le $\frac{1}{10}$ de la portée, ne fournit qu'une valeur maxima de 0,4 pour $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, et par suite une valeur maxima de 0,0256 pour $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$.

Lorsqu'on se place dans cette hypothèse, la formule de rectification d'un arc de courbe peut s'écrire

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx = l + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx, \end{aligned}$$

l désignant la projection de l'arc sur l'horizontale.

Appliquons simplement ce résultat à l'arc de parabole défini par l'équation

$$\mu = \mu' + tx + p\frac{x(l-x)}{2},$$

et dont la projection horizontale est l; on a

$$\frac{dy}{dx} = t + \frac{pl}{2} - px.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 2(L-l) &= \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \\ &= \int_0^l \left[\left(t + \frac{pl}{2}\right)^2 - 2\left(t + \frac{pl}{2}\right)px + p^2x^2\right] dx \\ &= \left(t + \frac{pl}{2}\right)^2 l - 2\left(t + \frac{pl}{2}\right)\frac{pl^2}{2} + \frac{p^2l^3}{3}, \end{aligned}$$

d'où

$$2(L-l) = l\left(t^2 + \frac{p^2l^2}{12}\right).$$

Si l'on avait affaire à l'arc de parabole résultant de la réduction de μ dans le rapport Q, ou de $y = \frac{\mu}{Q}$, il suffirait de remplacer t et p par $\frac{t}{Q}$ et $\frac{p}{Q}$, et la formule deviendrait

$$2(L-l) = \frac{l}{Q^2}\left(t^2 + \frac{p^2l^2}{12}\right).$$

En effectuant la sommation pour les différents arcs dont se compose le câble, on aurait

$$2(L-l)=\frac{1}{Q^2}\sum\left[l\left(t^2+\frac{p^2l^2}{12}\right)\right]$$

ou

$$Q^2=\frac{\Sigma}{2(L-l)}.$$

Cette formule donne directement la valeur de Q, puisque $L-l$, différence entre la longueur du câble et sa projection horizontale, est connue, ainsi que toutes les quantités figurant sous le signe de sommation Σ.

On aura ainsi tout au moins une valeur très approchée de la poussée Q, et on la prendra comme point de départ pour l'application de la méthode de correction de M. Résal, si l'on juge avoir besoin d'une valeur plus exacte, ce qui sera rare en fait.

Les calculs indiqués par la sommation Σ sont très simples à exécuter numériquement. On commence par calculer les moments fléchissants que l'ensemble des charges et surcharges produiraient aux points $A_1, A_2, \ldots$, comme s'il s'agissait d'une poutre droite; on en fait les différences deux à deux et on les divise par les longueurs des intervalles correspondants pour avoir les valeurs des quantités t. En pratique, il arrive souvent que le nombre des intervalles à considérer est petit et, d'autre part, que l'on peut profiter de l'une ou de l'autre des simplifications suivantes. Ou bien les charges p des différents intervalles sont négligeables devant les charges P, ou bien celles-ci n'existent pas ou peuvent être remplacées par des charges uniformément réparties équivalentes.

Dans certains cas, tout à fait simples, on peut rendre explicite la somme Σ, et nous en donnerons deux exemples.

1° *Câble à appuis de niveau ayant une charge p par mètre courant et portant un poids* P *à l'abscisse* α. — Au droit de la charge P, on a pour le moment fléchissant la valeur

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{P}{l}\right)\alpha(l-\alpha).$$

On a donc

$$t_1=\left(\frac{p}{2}+\frac{P}{l}\right)(l-\alpha),$$

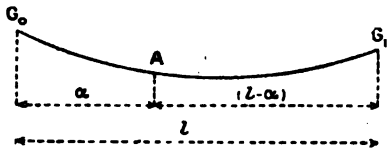
$$t_2=\left(\frac{p}{2}+\frac{P}{l}\right)\alpha.$$

On en déduit facilement

$$\sum = \frac{p^2 l^3}{12} + \frac{\alpha(l-\alpha)}{l} P(P + pl).$$

Supposons, d'autre part, que l'on connaisse la flèche f que pren-

Fig. 159.



drait le câble à vide; c'est généralement une fraction simple de la portée. On aura approximativement

$$L - l = \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}.$$

Examinons le cas extrême où $P = 0$. Alors

$$\sum = \frac{p^2 l^3}{12} \quad \text{et} \quad Q^2 = \frac{p^2 l^3}{12} : \frac{16}{3}\frac{f^2}{l} = \frac{p^2 l^4}{64 f^2},$$

d'où

$$Q = \frac{pl^2}{8f},$$

formule déjà donnée plus haut.

Examinons aussi le cas extrême où $p = 0$. Alors

$$\sum = P^2 \frac{\alpha(l-\alpha)}{l}.$$

On en déduit

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{P}{f}\sqrt{\alpha(l-\alpha)}.$$

C'est la formule approchée que l'on obtiendrait en considérant directement le câble comme formé de deux portions de ligne droite.

2° *Câble à appuis de niveau, ayant une charge p par mètre courant dans l'intervalle central* $A_1 A_2 = l_2$ *et sans charge dans les intervalles extrêmes* l_1 *et* l_3. — Sans insister sur les

détails du calcul, on trouve :

$$M_1 = \frac{pl_2}{2l}(l_2 + 2l_3)l_1, \qquad t_1 = \frac{pl_2}{2l}(l_2 + 2l_3),$$

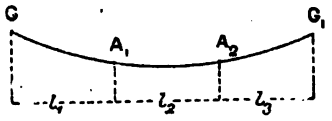
$$M_2 = \frac{pl_2}{2l}(l_2 + 2l_1)l_3, \qquad t_2 = \frac{pl_2}{2l}(l_3 - l_1),$$

$$M_2 - M_1 = \frac{pl_2}{2l}l_2(l_3 - l_1), \qquad t_3 = -\frac{pl_2}{2l}(l_2 + 2l_1).$$

On en déduit

$$\sum = \frac{p^2 l_2^2}{4l}\left[l_1(l_2 + 2l_3) + l_3(l_2 + 2l_1) + \frac{ll_2}{3}\right].$$

Fig. 160.



Dans le cas particulier où $l_1 = l_3$ on a

$$\sum = \frac{p^2 l_2^2}{4}\left(2l_1 + \frac{l_2}{3}\right).$$

Et, si $l_1 = 0$,

$$\sum = \frac{p^2 l^3}{12}$$

comme plus haut.

Corrections à faire pour tenir compte de l'allongement élastique du câble, ou d'une variation de température. — Sous l'effet de la traction qui s'exerce dans le câble, sa longueur primitive L est modifiée. Elle s'augmente d'une quantité δL, dont on peut obtenir une valeur approchée dès que l'on a déterminé comme ci-dessus une valeur approchée de la poussée. On peut, en effet, déterminer en chaque point la traction supportée par le câble dont on connaît la nouvelle figure, et en déduire l'allongement d'un élément de câble $d\sigma$.

La traction est $F = Q\frac{d\sigma}{dx}$, et l'allongement est

$$\frac{F\,d\sigma}{ES} = \frac{Q}{ES}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 dx.$$

L'allongement total est donc

$$\delta L = \frac{Q}{ES}\int\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 dx = \frac{Q}{ES}\int\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx.$$

Si l'on admet la simplification qui nous a donné la formule

$$L = l + \frac{1}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

on voit qu'au même degré d'approximation on aura

$$\delta L = \frac{Q}{ES}[l + 2(L - l)] = \frac{Q}{ES}(2L - l),$$

formule qui ne dépend pas de la forme de la courbe décrite par le câble.

Plus simplement, si les appuis sont sensiblement de niveau, et si le câble ne s'éloigne pas trop de sa corde, on pourra même généralement admettre que l'on a partout $F = Q$ et que

$$\delta L = \frac{Q}{ES} l.$$

Bien entendu, si l'allongement provient seulement de l'application d'une surcharge, c'est seulement le supplément de poussée dû à la surcharge qu'il faut prendre en compte dans ces formules.

S'il s'agit d'une élévation de température fournissant un allongement proportionnel τ pour l'unité de longueur du câble, l'allongement total δL aura pour valeur

$$\delta L = \tau L.$$

Il conviendra de tenir compte de ces variations de longueur pour obtenir la vraie valeur Q' de la poussée en modifiant en conséquence la valeur de $L - l$, qui deviendra

$$L - l + \delta L.$$

On aurait

$$Q'^2 = \frac{\Sigma}{2(L + \delta L - l)},$$

d'où

$$\frac{Q'^2}{Q^2} = \frac{L - l}{L - l + \delta L}.$$

Il peut arriver aussi que la variation de $L - l$ provienne d'une variation de l, en cas de rapprochement des appuis par exemple. Le même principe est applicable. Q^2 est toujours inversement proportionnel à $L - l$.

Il en résulte que la correction $Q' - Q = \delta Q$ peut s'obtenir dans tous les cas par la formule approchée

$$\frac{2\,\delta Q}{Q} = -\frac{\delta(L-l)}{L-l},$$

qui n'est autre chose que la traduction différentielle de l'équation primitive $Q^2 = \frac{\Sigma}{2(L-l)}$ et dont l'emploi est légitime toutes les fois que δQ et $\delta(L-l)$ sont petits par rapport à Q et $L-l$ respectivement.

Poussée supplémentaire due à des surcharges qui déforment peu le câble. — Supposons qu'on parte pour le câble d'un état déformé correspondant à un ensemble de charges et de surcharges. Il y a parfois intérêt, lorsque l'on sait d'avance que l'adjonction de nouvelles surcharges ne peut déformer le câble d'une manière très notable, à rechercher simplement la variation q de la poussée, qui au total deviendra $Q+q$, et la variation v de l'ordonnée y du câble, laquelle va devenir $y+v$. On peut y parvenir très simplement quand on admet la formule de rectification approchée indiquée précédemment.

Supposons, en effet, le câble inextensible. Dans le premier état on a

$$L - l = \frac{1}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Dans le second, on a

$$L - l = \frac{1}{2}\int\left[\frac{d(y+v)}{dx}\right]^2 dx.$$

Par suite, en retranchant membre à membre, on trouve

$$\int\left\{\left[\frac{dy}{dx}+\frac{dv}{dx}\right]^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} dx = 0.$$

En supposant en outre que $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ puisse être négligé devant $\frac{dv}{dx}$, on trouve simplement

$$\int \frac{dv}{dx}\,\frac{dy}{dx}\,dx = 0.$$

Si l'on intègre par parties, et si l'on observe que v et y sont

nulles aux deux limites de l'intégration, on peut mettre cette condition sous l'une des deux formes suivantes :

$$\int y \frac{d^2 v}{dx^2} dx = 0,$$

$$\int v \frac{d^2 y}{dx^2} dx = 0.$$

Appelons μ' le moment fléchissant, dans la poutre droite, correspondant aux charges et surcharges primitives et μ le moment analogue correspondant aux nouvelles surcharges, nous aurons les relations

$$y + v = \frac{\mu' + \mu}{Q + q}, \qquad y = \frac{\mu'}{Q},$$

d'où

$$v = \frac{Qy + \mu}{Q + q} - y = \frac{\mu - qy}{Q + q}.$$

Appliquons l'équation de condition mise sous sa dernière forme $\int v \frac{d^2 y}{dx} dx = 0$, nous obtiendrons

$$q \int y \frac{d^2 y}{dx^2} dx - \int \mu \frac{d^2 y}{dx^2} dx = 0,$$

équation d'où l'on tirera la valeur de q.

Il est bien entendu que si y a des définitions différentes dans différents intervalles, il faudra décomposer les sommations actuellement envisagées et qui s'appliquent au câble entier, en sommations partielles dans lesquelles on attribuera à $\frac{d^2 y}{dx^2}$ la valeur qui leur correspond. D'une manière générale, si p est la charge uniformément répartie afférente à un intervalle, on a $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{p}{Q}$ dans cet intervalle.

A titre d'exemple, supposons que le câble soit primitivement chargé uniformément à raison de p^{kg} par unité de longueur, on aura partout $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{p}{Q}$. Par suite, la formule précédente deviendra

$$q \int y \, dx = \int \mu \, dx.$$

Il suffira de faire les aires des deux courbes représentant μ et y

et de les diviser l'une par l'autre. La courbe de y est d'ailleurs une parabole, et a pour équation

$$y = 4f\frac{x(l-x)}{l^2},$$

et son aire est $\frac{2}{3}fl$.

Premier exemple. — *Cas d'un poids isolé* P *agissant à l'abscisse* α. — On a

$$\int \mu\, dx = \mathrm{P}\frac{\alpha(l-\alpha)}{l}\frac{l}{2} = \frac{\mathrm{P}}{2}\alpha(l-\alpha).$$

Par suite,

$$q = \frac{3}{4}\frac{\mathrm{P}}{fl}\alpha(l-\alpha) = \frac{3\mathrm{P}}{4}\frac{l}{f}\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}.$$

Pour des câbles semblables, c'est-à-dire tels que $\frac{l}{f}$ soit le même, des charges semblablement placées, c'est-à-dire telles que $\frac{\alpha}{l}$ soit le même, produisent des poussées égales.

Sous la réserve supposée de la petitesse relative des surcharges par rapport aux charges initiales, les effets de différentes surcharges se superposent.

Deuxième exemple. — *Cas d'une surcharge uniformément répartie* p' *entre les abscisses* $\alpha - \beta$ *et* $\alpha + \beta$. — On trouve

$$q = \frac{3}{4}\frac{2p'\beta}{fl}\left[\alpha(l-\alpha) - \frac{\beta^2}{3}\right].$$

$2p'\beta$ étant la surcharge totale, le dernier terme de la parenthèse, $\frac{\beta^2}{3}$, représente l'écart qui existe entre la poussée due à une charge concentrée à l'abscisse α et à la même charge répartie dans la zone qui va de $\alpha - \beta$ à $\alpha + \beta$.

Supposons, par exemple, $\alpha = \frac{l}{2}$ et $\beta = \frac{l}{4}$. On a

$$\alpha(l-\alpha) = \frac{l^2}{4} \quad \text{et} \quad \alpha(l-\alpha) - \frac{\beta^2}{3} = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{48} = \frac{l^2}{4} \times \frac{11}{12}.$$

On réduirait donc la poussée de $\frac{1}{12}$ seulement en adoptant un dispositif capable de répartir sur la moitié de la portée une charge isolée placée au milieu.

Si l'on supposait $\alpha = \frac{l}{4} = \beta$ on trouverait une réduction un peu plus forte, mais qui n'atteindrait encore que $\frac{1}{9}$ seulement.

Valeur approchée de la déformation due à une charge isolée, au droit de cette charge. — On n'a qu'à porter dans la formule

$$v = \frac{\mu - qy}{Q + q},$$

la valeur approchée trouvée précédemment pour q. On a d'ailleurs

$$\mu = P\frac{\alpha(l-\alpha)}{l}, \qquad y = \frac{4f}{l^2}\alpha(l-\alpha), \qquad Q = \frac{pl^2}{8f}.$$

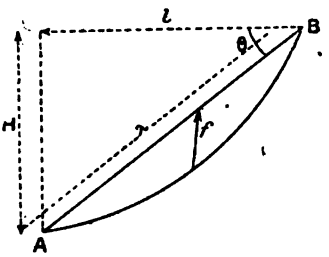
On trouve

$$v = \frac{8Pf}{pl} \times \frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}\,\frac{1 - 3\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}}{1 + 6\frac{P}{pl}\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}}.$$

Pour une valeur déterminée de $\frac{\alpha}{l}$, v est proportionnel à f. Il est approximativement proportionnel à $\frac{P}{pl}$, quand ce rapport est suffisamment petit.

Problèmes divers concernant les câbles obliques. — Soit L la longueur du câble, λ la longueur de sa corde, l celle de sa projec-

Fig. 161.



tion horizontale; soit p son poids par mètre courant, $P = p\lambda$ son poids total; soit enfin F la traction dans le sens de la corde et Q la composante horizontale de cette traction (ou poussée). En

appelant θ l'angle de la corde avec l'horizontale, on a

$$\cos\theta = \frac{l}{\lambda} = \frac{Q}{F}.$$

D'autre part, le poids par mètre courant en projection horizontale est $\frac{p}{\cos\theta}$ et l'on a

$$Q = \frac{pl^2}{8f\cos\theta}, \qquad \text{d'où} \qquad F = \frac{p\lambda^2}{8f}.$$

Enfin, on a approximativement

$$L = \lambda + \frac{8}{3}\frac{f^2 l^2}{\lambda^3}.$$

Si l'on élimine f entre les deux dernières relations, on a

$$(1) \qquad L = \lambda + \frac{1}{24}\frac{p^2 l^2 \lambda}{F^2} = \lambda\left(1 + \frac{1}{24}\frac{P^2\cos^2\theta}{F^2}\right).$$

Ces formules permettent de résoudre tous les problèmes pratiques qui peuvent se présenter. En voici quelques exemples :

1° *Déplacement de l'extrémité A supposée libre lorsque la tension suivant la direction AB passe de F à F'.* — Dans la nouvelle situation, on a

$$(1)' \qquad L' = \lambda'\left(1 + \frac{1}{24}\frac{P^2\cos^2\theta}{F'^2}\right).$$

On pourra donc calculer λ', et par suite le déplacement $\lambda' - \lambda$, dès que l'on connaîtra L', nouvelle longueur du câble.

Or, en supposant que la flèche f soit petite par rapport à λ, la tension aux différents points du câble diffère très peu de la traction exercée suivant la corde. L'allongement élastique du câble sous l'effort supplémentaire $F' - F$ est donc très approximativement

$$L' - L = L\frac{F' - F}{ES} \qquad \text{ou} \qquad \lambda\frac{F' - F}{ES},$$

E étant le coefficient d'élasticité et S la section du câble.

On peut trouver une formule approximative donnant directetement l'allongement $\lambda' - \lambda$. On a, en effet,

$$\lambda' - \lambda = L' - L + \frac{P^2\cos^2\theta}{24}\left[\frac{\lambda}{F^2} - \frac{\lambda'}{F'^2}\right].$$

En remplaçant dans le second membre $L' - L$ par sa valeur, et en considérant d'autre part que dans ce second membre on peut remplacer approximativement L et λ' par λ, en commettant des erreurs relatives insignifiantes, on obtient pour l'allongement proportionnel

$$(2) \qquad \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{F' - F}{ES} + \frac{P^2 \cos^2\theta}{24}\left[\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F'^2}\right].$$

Le premier terme représente la déformation élastique; l'autre tient compte du changement de flèche du câble.

Si l'on suppose que, partant d'un état initial caractérisé par la tension F, on augmente la tension d'une quantité $F' - F = \delta F$, assimilable à un infiniment petit, la formule deviendra

$$(3) \qquad \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta F}{ES} + \frac{P^2 \cos^2\theta}{12}\frac{\delta F}{F^3};$$

on peut l'écrire

$$(4) \qquad \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta F}{E'S},$$

en posant

$$E' = E\frac{1}{1 + \dfrac{ES P^2 \cos^2\theta}{12 F^3}}.$$

La quantité E' est ce que l'on peut appeler le coefficient d'élasticité apparent du câble dans sa situation initiale [1]. On voit facilement qu'il ne dépend pas de la section S du câble, mais seulement de sa fatigue unitaire $\frac{F}{S} = k$, de sa densité Δ et de sa projection horizontale l.

---

[1] On aurait pu rechercher une plus grande exactitude en employant pour l'évaluation de $L' - L$ la formule

$$L' - L = \frac{F' - F}{ES}(2L - \lambda) = \lambda\frac{F' - F}{ES}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{P^2\cos^2\theta}{F^2}\right).$$

Alors le dénominateur de E' serait devenu

$$1 + \frac{1}{12}\frac{P^2\cos^2\theta}{F^2} + \frac{E}{12}\frac{SP^2\cos^2\theta}{F^3}.$$

Mais il est facile de voir que dans tous les cas de la pratique, le second terme est négligeable vis-à-vis du troisième. Leur rapport est en effet $\frac{F}{ES}$, de l'ordre de grandeur d'un allongement proportionnel.

On a, en effet,

$$P = \Delta \times S \times \lambda,$$
$$F = KS.$$

On en déduit

$$\frac{ES P^2 \cos^2\theta}{12 F^3} = \frac{E \Delta^2 l^2}{12 K^3}.$$

Si l'on fait $E = 2 \times 10^{10}$ et $\Delta = 7.800^k$, on trouve facilement les chiffres du Tableau suivant, qui donne les rapports $\frac{E'}{E}$ du coefficient d'élasticité apparent au coefficient d'élasticité du métal.

Valeurs de $k.10^{-6}$.	Valeurs de $\frac{E'}{E}$ pour $l = 50^m$.	Valeurs de $\frac{E'}{E}$ pour $l = 100^m$.
0.....	0	0
5.....	0,333	0,111
10.....	0,80	0,50
15.....	0,93	0,77
20.....	0,97	0,89
25.....	0,99	0,94

On voit que, pour des câbles de moins de 50^m en projection horizontale, le coefficient d'élasticité apparent E′ varie peu et n'est pas très différent de E dès qu'il s'agit de tensions comprises entre 10^k et 25^k par millimètre carré. Pour des câbles d'une centaine de mètres la conclusion ne subsiste que pour un domaine beaucoup plus limité.

Pour un câble donné, il est souvent avantageux de calculer, comme on vient de le faire, quelques valeurs de $\frac{E'}{E}$ pour diverses valeurs de k. On peut en déduire une courbe continue représentant $\frac{E'}{E}$ en fonction de k.

Lorsque la tension varie dans des limites étendues, entre une valeur initiale F et une valeur finale F′, cette courbe permet de suivre par cheminement les variations du coefficient d'élasticité, et par suite les variations des allongements successifs $\delta\lambda$ de la corde, lorsque la tension passe de F à F′ par degrés aussi petits qu'on le veut. On aura évidemment

$$\lambda' - \lambda = \Sigma\, \delta\lambda.$$

2° *Déplacement de l'extrémité libre A lorsque à une variation F' — F de tension se superpose une variation de température.* — Si l'on appelle τ l'allongement, positif ou négatif, dû par mètre courant à la variation de température, il faudra, bien entendu, en tenir compte dans le calcul de L' — L, qui sera approximativement $L' - L = \lambda\tau + \lambda \frac{F' - F}{ES}$, le premier terme représentant l'allongement thermique, et le second l'allongement élastique.

On parviendrait évidemment à la formule

$$(2)' \qquad \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \tau + \frac{F' - F}{ES} + \frac{P^2 \cos^2\theta}{24}\left[\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F'^2}\right],$$

et l'on en déduirait, pour le cas d'une différence $\delta F = F' - F$ assimilable à un infiniment petit, la formule simplifiée

$$(4)' \qquad \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \tau + \frac{\delta F}{E'S},$$

E' étant, comme précédemment, le coefficient d'élasticité apparent.

3° *Variation de la tension d'un câble dont les extrémités sont fixes lorsque la température varie.* — Appelons τ l'allongement thermique par mètre courant, la solution du problème sera donnée par les équations (2)', ou (4)' dont le premier membre est supposé nul.

L'équation (2)' est du troisième degré en F'. On la résoudra par tâtonnements.

Si l'on a construit la courbe représentant, pour le câble donné, le rapport $\frac{E'}{E}$ en fonction de sa fatigue k, on pourra utiliser l'équation (4)' par voie de cheminement de la manière suivante. On supposera τ fractionné en éléments suffisamment petits, égaux ou inégaux, $\tau_1\ \tau_2 \ldots$, tels que $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots$, et l'on aura

$$\delta k_1 = -E'_1\,\delta\tau_1,$$
$$\delta k_2 = -E'_2\,\delta\tau_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

E'_1 correspondant à la valeur initiale $k = \frac{F}{S}$, E'_2 à la valeur $k + \delta k_1$ et ainsi de suite. On aura évidemment $F' - F = S\Sigma\delta k$ approximativement.

4° *Variation de la tension d'un câble lorsque son extrémité A se déplace dans sa direction.* — La solution est donnée par l'équation (2) dans laquelle $\lambda' - \lambda$ est supposé connu et où E', quantité inconnue, figure au troisième degré.

On peut encore procéder par cheminement en employant l'équation (4) et la courbe des coefficients d'élasticité apparente, si l'on a fractionné $\lambda' - \lambda$ en éléments $d\lambda$ suffisamment petits.

5° *Variation de la tension d'un câble lorsque son extrémité A se déplace suivant une horizontale.* — Nous supposerons qu'il s'agisse de déplacements petits par rapport à l, ou à λ, de telle façon que la variation de la direction AB soit petite. Alors, le déplacement horizontal, appelé dl, est lié à l'augmentation $d\lambda$ de la longueur de la corde par l'équation

$$l\,dl = \lambda\,d\lambda,$$

que l'on obtient en différentiant la relation

$$l^2 = \lambda^2 - H^2,$$

dans laquelle H est constant par hypothèse. Connaissant $d\lambda$, le calcul se poursuivra comme dans le cas précédent.

Il est évident que si l'on se trouve dans des conditions telles que l'on puisse reconnaître *a priori* que E' est sensiblement égal à E (câbles de longueur modérée, soumis à des tensions initiales suffisamment grandes), les calculs par cheminement pourront être considérablement abrégés. En prenant pour E' une valeur moyenne estimée (à la limite, en prenant $E' = E$), le calcul se ferait d'un seul coup et serait identique à celui qui correspondrait à une barre rigide, ne se déformant pas d'une manière appréciable sous son propre poids.

II. — Cable associé a une poutre de rigidité.

Un pont suspendu dont le tablier est simplement accroché à une nappe de câbles est très déformable. L'effet de charges isolées un peu importantes est parfois gênant. On pare à cet inconvénient de diverses façons.

Un premier palliatif consiste à augmenter le poids mort. Nous avons vu que, dans certaines limites, la déformation verticale à l'aplomb d'une charge isolée est proportionnelle au rapport $\frac{P}{pl}$ de cette charge à la charge permanente. Mais c'est là un palliatif assez coûteux, puisqu'il oblige à renforcer la suspension.

Un second procédé consiste à soutenir les parties extrêmes du tablier au moyen de haubans inclinés. Ces parties deviennent rigides. Quant aux câbles principaux, ils ne supportent directement les charges que dans leur partie centrale, et tout se passe à peu près comme si ces câbles avaient une portée réduite et un rapport $\frac{f}{l}$ notablement plus petit. Mais ce dernier avantage ne serait complètement obtenu que si les points des câbles correspondant aux derniers haubans pouvaient être rendus complètement fixes. En outre, le passage de la partie rigide du tablier à la partie centrale qui reste déformable ne va pas sans certains inconvénients que la sagacité des constructeurs peut bien atténuer, mais non supprimer.

On y pare dans une certaine mesure, et du même coup on limite les déformations de la partie centrale en donnant au tablier une certaine rigidité propre. On constitue de véritables poutres horizontales, ayant un moment d'inertie relativement grand, qui ont pour rôle de répartir les charges isolées sur un nombre plus ou moins grand de tiges de suspension. On utilise à cet effet le métal qui est déjà nécessaire à d'autres points de vue, le contreventement par exemple, et l'on cherche à l'employer le plus judicieusement possible en déterminant la hauteur de poutre qui conduit à un taux de fatigue ni trop faible, ni trop élevé.

Le problème, ainsi posé, est de même nature que celui qui est posé par l'association d'une poutre et d'un arc. Mais il se complique de ce fait qu'il faut prendre en compte des déformations qui ne sont plus, en général, négligeables.

On suppose, pour simplifier, que le réglage est fait de telle façon que la poutre de rigidité ne soit soumise à aucun travail de flexion sous l'action de la charge permanente. Elle est alors simplement suspendue au câble. La forme initiale de celui-ci, sous la charge permanente, est d'ailleurs supposée connue, et il ne s'agit que de déterminer les effets des surcharges à partir de cet état initial.

Équations générales d'équilibre. — Appelons comme précédemment μ' le moment fléchissant qui se produirait dans la poutre droite de même portée, sous l'action de la charge permanente,

μ celui qui se développerait sous l'action des surcharges,

m celui qui se développerait sous l'action des tensions exercées de haut en bas dans les tiges de suspension par l'effet des surcharges,

et enfin M le moment fléchissant réel qui se produit dans la poutre de rigidité.

Dans l'état initial, l'ordonnée du point du câble est telle que

$$y = \frac{\mu'}{Q}.$$

Dans l'état correspondant aux surcharges, cette ordonnée devient

$$y + v = \frac{\mu' + m}{Q + q},$$

d'où l'on tire, en éliminant μ',

$$m = (Q + q)v + qy.$$

D'un autre côté, si l'on considère la poutre de rigidité, le moment fléchissant M est, à une fonction linéaire près, égal à $\mu - m$. On peut donc écrire

$$M = \mu - m + A + Bx = \mu - (Q + q)v - qy + A + Bx.$$

Enfin, le déplacement vertical v du câble est en chaque point égal au déplacement vertical correspondant de la poutre de rigidité, lorsque l'on fait l'hypothèse de tiges de suspensions infiniment rapprochées. Or, dans les poutres droites, on a la relation suivante :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$

(Nous mettons le signe — dans le second membre parce que v est ici compté de haut en bas.)

En remplaçant M par sa valeur écrite plus haut, on trouve l'équation différentielle générale

$$EI\frac{d^2 v}{dx^2} - (Q + q)v + \mu - qy + A + Bx = 0.$$

Si les trois constantes A, B, q étaient connues, cette équation permettrait de déterminer v et par suite M.

Théorie simplifiée de Rankine et Maurice Lévy. — Ces auteurs supposaient que l'adjonction au câble d'une poutre de rigidité efficace avait pour effet de conserver au câble sa forme initiale, ou tout au moins de rendre le déplacement v complètement négligeable.

Dans ces conditions, l'expression du moment fléchissant développé dans la poutre de rigidité peut se réduire à

$$M = \mu - qy + A + Bx.$$

Elle est la même que celle que l'on obtiendrait pour un arc rigide, ayant le câble pour fibre moyenne.

La détermination des trois constantes A, B, q se fait alors par des procédés identiques à ceux employés pour les arcs.

Supposons, par exemple, que la poutre soit simplement appuyée à ses deux extrémités; on devra avoir en ces points $M = 0$ et par suite $A = B = 0$.

Si elle est encastrée, on devra écrire les deux conditions connues

$$\int M\,dx = 0, \qquad \int Mx\,dx = 0.$$

D'autre part, si l'on suppose, comme à l'ordinaire, le câble inextensible, on devra écrire dans tous les cas la condition qui exprime la conservation de sa longueur. On peut, d'ailleurs, dans ce cas, appliquer très légitimement les formules qui s'appliquent à la rectification d'un câble peu déformé, et d'où nous avons déduit l'équation de condition sous la forme

$$\int y \frac{d^2 v}{dx^2}\,dx = 0.$$

En remplaçant dans cette équation $\frac{d^2 v}{dx^2}$ par $-\frac{M}{EI}$ et en supprimant le facteur $\frac{I}{EI}$, supposé constant, on trouve

$$\int My\,dx = 0.$$

Ce sont donc bien exactement les mêmes équations que l'on aurait à écrire pour un arc rigide.

On en conclut que *les réactions d'appui* A, B, q *se déterminent comme si le câble était remplacé par un arc rigide à section constante, soit articulé, soit encastré, auquel les surcharges seraient directement appliquées.*

Cette théorie a un point de départ inexact, v n'étant pas nul, et le terme $(Q + q)\,v$, qui figure dans l'expression de M, n'étant pas *a priori* négligeable devant les autres. Si v était nul, tout se passerait comme si les surcharges se répartissaient uniformément entre toutes les tiges de suspension dans l'étendue de la poutre de rigidité, c'est-à-dire comme si la poutre de rigidité était infiniment rigide. Le moment fléchissant dans la poutre de régidité ne dépendrait pas de son module d'inertie. Ces conséquences sont évidemment fausses.

Mais la conclusion à laquelle nous sommes arrivés, pour la détermination des constantes A, B et q, n'en subsiste pas moins, au moins à titre de conclusion approchée. Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que dans les équations de condition

$$\int M\,dx = 0, \qquad \int M x\,dx = 0, \qquad \int M y\,dx = 0,$$

les termes provenant de v soient négligeables par rapport aux autres, et cela peut avoir lieu sans qu'il en soit de même dans l'expression de M.

Considérons spécialement le cas où la poutre est simplement appuyée à ses extrémités ($A = B = 0$). On n'a à considérer que la troisième équation, qui s'écrit explicitement

$$\int (\mu - q y) y\,dx - (Q + q) \int v y\,dx = 0.$$

L'intégrale $\int v y\,dx$ peut être considérée comme négligeable, non pas seulement parce que v est petit par rapport à y, mais aussi parce que v, sous l'action d'une surcharge, est forcément positif dans certaines régions du câble et négatif dans certaines autres. C'est une condition nécessaire pour que la longueur du câble puisse être conservée.

On ferait des constatations analogues pour le cas d'une poutre encastrée.

Nous admettons donc que dans la recherche des constantes on peut opérer dans tous les cas comme si c était négligeable, *au moins à titre d'approximation*.

Dans le cas d'une poutre simplement appuyée, la poussée supplémentaire q résultera par suite de l'équation suivante :

$$q\int y^2\,dx = \int \mu y\,dx.$$

a. Si l'on a une surcharge p uniformément répartie sur toute la longueur du câble, on trouve

$$q = \frac{pl^2}{8f},$$

comme s'il n'y avait pas de poutre de rigidité.

b. Si l'on suppose une surcharge isolée P, agissant à l'abscisse α, on trouve

$$q = \frac{5}{8}\frac{P}{fl}\alpha(l-\alpha)\left[1+\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\right],$$

formule indiquée par Maurice Lévy.

Quand on la compare à celle que nous avons trouvée pour la poussée supplémentaire dans un câble libre, savoir

$$q = \frac{3}{4}\frac{P}{fl}\alpha(l-\alpha),$$

on voit que, dans cette dernière, il faut multiplier l'expression $\frac{P}{fl}\alpha(l-\alpha)$ par un coefficient constant égal à $\frac{3}{4} = 0,75$, tandis que dans l'autre il faut prendre un coefficient variable

$$\frac{5}{8}\left[1+\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\right],$$

qui varie de 0,62 pour $\frac{\alpha}{l} = 0$ à 0,78 pour $\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{2}$. Pour $\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{4}$, on a 0,742.

Pour des surcharges intéressant une région un peu étendue dans la partie centrale du câble, il y a très peu de différence.

c. Supposons maintenant qu'on remplace la charge concentrée P par une charge uniformément répartie $p = \frac{P}{2\beta}$ entre les abscisses $\alpha - \beta$ et $\alpha + \beta$. Un calcul, dont le détail est sans intérêt, conduit

à la formule

$$q = \frac{5}{8}\frac{P}{fl}\left\{\alpha(l-\alpha)\left[1+\frac{\alpha(l-\alpha)}{l^2}\right]-\beta^2\left[\frac{2\alpha(l-\alpha)}{l^2}-\frac{\beta^2}{5l^2}\right]\right\}.$$

A titre de vérification, si l'on fait $\alpha = \beta = \frac{l}{2}$, on retombe sur la formule $q = \frac{pl^2}{8f}$.

Si l'on suppose $\alpha = \beta = \frac{l}{4}$, on trouve que la poussée due à la charge uniformément répartie est d'environ les $\frac{9}{10}$ de celle qui serait due à la charge concentrée équivalente.

Étude de la déformation et des moments fléchissants dans la poutre de rigidité. — Une fois les constantes connues, au moins d'une manière approchée, on peut résoudre l'équation différentielle obtenue précédemment. En posant $\frac{Q+q}{EI} = k^2$, elle peut s'écrire

$$\frac{d^2v}{dx^2} - k^2 v + \frac{\mu - qy + A + Bx}{EI} = 0.$$

Dans tous les cas de la pratique, μ est une fonction algébrique (généralement du premier ou du second degré) dans certains intervalles connus. De même, y est une fonction du second degré (généralement une simple parabole). L'intégration est donc facile.

On peut, d'ailleurs, substituer à cette équation différentielle une autre équation qui débarrasse de la considération des constantes A et B, et qui fait connaître directement le moment fléchissant M. Il suffit de la dériver deux fois par rapport à x. On obtient

$$\frac{d^4v}{dx^4} - k^2\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{EI}\frac{d(\mu - qy)}{dx^2} = 0.$$

On peut remplacer

$$\frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{par} \quad -\frac{M}{EI},$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} \quad \text{par} \quad -\frac{1}{EI}\frac{d^2M}{dx^2},$$

et il reste, en supprimant le facteur EI,

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - k^2 M - \frac{d(\mu - q\gamma)}{dx^2} = 0.$$

Supposons que, dans un certain intervalle l de la corde du câble, les surcharges se réduisent à une charge uniformément répartie p, on aura dans cet intervalle

$$\mu = a + bx - \frac{px^2}{2},$$

d'où

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -p.$$

D'autre part, si p' est la charge permanente, on a également

$$\frac{d^2\mu'}{dx^2} = -p',$$

et par suite

$$q\frac{d^2\gamma}{dx^2} = \frac{q}{Q}\frac{d^2\mu'}{dx^2} = -\frac{q}{Q}p'.$$

Par suite,

$$\frac{d(\mu - q\gamma)}{dx^2} = -\left(p - \frac{q}{Q}p'\right) = -r,$$

en posant

$$r = p - \frac{q}{Q}p'.$$

L'équation différentielle est donc, finalement, dans l'intervalle l,

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - k^2 M + r = 0.$$

Son intégrale générale est

$$M = A e^{kx} + B e^{-kx} + \frac{r}{k^2}.$$

Il en sera de même dans les autres intervalles, les quantités constantes r étant généralement différentes d'un intervalle à l'autre.

Quant aux deux séries de constantes A et B, elles seront déterminées de manière à assurer :

1° La continuité de la fonction M à la limite de deux intervalles consécutifs.

2° La continuité de l'effort tranchant $\frac{dM}{dx}$, s'il n'y a pas de charge isolée à la limite séparative de ces intervalles, ou bien, dans le cas contraire, l'égalité de cette charge isolée et de la différence des efforts tranchants de part et d'autre.

3° Les conditions assignées aux extrémités de la poutre de rigidité. Si celle-ci est simplement appuyée, on devra avoir $M = 0$ aux deux bouts. Si elle est encastrée, on devra satisfaire aux conditions

$$\int M \, dx = 0,$$

$$\int M x \, dx = 0.$$

a. A titre d'exemple, nous considérerons le cas d'une poutre simplement appuyée, portant une charge concentrée P à l'abscisse α, la charge permanente étant p' par mètre courant. On a deux intervalles à considérer, dans chacun desquels on a $r = -p'\frac{q}{Q}$. Les expressions de M sont respectivement dans ces deux intervalles :

$$M = A\, e^{kx} + B\, e^{-kx} + \frac{r}{k^2},$$

$$M = A'\, e^{kx} + B'\, e^{-kx} + \frac{r}{k^2}.$$

Supposons l'origine des coordonnées placée au droit de la charge, de sorte que les abscisses des extrémités de la poutre soient respectivement $-\alpha$ et $(l - \alpha) = \alpha'$.

Pour $x = 0$, les conditions de continuité donnent

$$\left.\begin{aligned} A + B &= A' + B', \\ A - B &= A' - B' + \frac{P}{k}, \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} A' &= A - \frac{P}{2k}, \\ B' &= B + \frac{P}{2k}. \end{aligned}\right.$$

Pour $x = -\alpha$ et pour $x = \alpha'$ on doit avoir $M = 0$, ce qui s'écrit

$$A\, e^{-k\alpha} + B\, e^{k\alpha} + \frac{r}{k^2} = 0,$$

$$A'\, e^{k\alpha'} + B'\, e^{-k\alpha'} + \frac{r}{k^2} = 0.$$

En éliminant A′ et B′, on a à résoudre les deux équations

$$A e^{k\alpha'} + B e^{-k\alpha'} - \frac{P}{2k}(e^{k\alpha'} - e^{-k\alpha'}) + \frac{r}{k^2} = 0,$$

$$A e^{-k\alpha} + B e^{k\alpha} + \frac{r}{k^2} = 0.$$

Finalement, on obtient

$$A(e^{kl} - e^{-kl}) = \frac{P}{2k} e^{k\alpha}(e^{k\alpha'} - e^{-k\alpha'}) - \frac{r}{k^2}(e^{k\alpha} - e^{-k\alpha'}),$$

$$B(e^{kl} - e^{-kl}) = -\frac{P}{2k} e^{-k\alpha}(e^{k\alpha'} - e^{-k\alpha'}) - \frac{r}{k^2}(e^{k\alpha'} - e^{-k\alpha'}),$$

A′ et B′ se déduisant d'ailleurs de B et A respectivement, en changeant α en α' et réciproquement.

b. On peut traiter d'une manière analogue le cas d'une surcharge uniformément répartie p, sur la longueur comprise entre les abscisses $\alpha - \beta$ et $\alpha + \beta$.

On a cette fois trois intervalles. Dans les deux extrêmes, on a

$$r = -p'\frac{q}{Q}.$$

Dans celui du centre, on a

$$r = p - p'\frac{q}{Q}.$$

Les expressions de M sont respectivement

$$M = A e^{kx} + B e^{-kx} - \frac{p'q}{k^2 Q},$$

$$M = A_1 e^{kx} + B_1 e^{-kx} + \frac{1}{k^2}\left(p - \frac{p'q}{Q}\right),$$

$$M = A' e^{kx} + B' e^{-kx} - \frac{p'q}{k^2 Q}.$$

Au point d'abscisse $-\beta$, les conditions de continuité donnent

$$A = A_1 + \frac{p}{2k^2} e^{k\beta},$$

$$B = B_1 + \frac{p}{2k^2} e^{-k\beta}.$$

Au point d'abscisse β, les conditions de continuité donnent de

même

$$A_1 = A' - \frac{p}{2k^2} e^{-k\beta},$$

$$B_1 = B' - \frac{p}{2k^2} e^{k\beta}.$$

On en déduit

$$A = A' + \frac{p}{2k^2}(e^{k\beta} - e^{-k\beta}),$$

$$B = B' - \frac{p}{2k^2}(e^{k\beta} - e^{-k\beta}).$$

Les conditions aux extrémités sont d'ailleurs exactement les mêmes que précédemment.

Il en résulte que, dans les expressions finales de A et B, les seules modifications à apporter sont celles qui proviennent des nouvelles relations établies entre A et B d'une part, et A′, B′ d'autre part. Le seul changement est le remplacement de $\frac{P}{2k}$ par l'expression

$$\frac{p}{2k^2}(e^{k\beta} - e^{-k\beta}) = \frac{P}{2k}\,\frac{e^{k\beta} - e^{-k\beta}}{2k\beta},$$

en désignant par P la surcharge totale $2p\beta$.

Lorsque $k\beta$ demeure petit, $\frac{e^{k\beta} - e^{-k\beta}}{2k\beta}$ est sensiblement égal à 1, de sorte que les coefficients A et B, et par suite A′ et B′, sont sensiblement les mêmes que si la surcharge était concentrée à l'abscisse α. Dans l'intervalle qui va de $\alpha - \beta$ à $\alpha + \beta$, la courbe de M a le caractère d'une courbe de raccordement. Toutefois, il ne faut pas oublier que la valeur de $k = \sqrt{\frac{Q+q}{EI}}$ n'est pas tout à fait la même dans les deux cas.

Indications sur la marche des calculs et sur le degré de précision nécessaire. — En général, on pourra se fixer *a priori* la section de métal ω, que l'on consent à attribuer à chaque platebande de la poutre de rigidité. La considération du contreventement horizontal du tablier fournira au moins un minimum. Le problème consiste donc à déterminer la hauteur H de la poutre. Cette hauteur elle-même, qui *a priori* devrait être la plus grande possible, pour accroître la rigidité, est limitée en fait par cette considération qu'on ne peut pas admettre de poutres trop grêles, susceptibles de

flamber, et par cette autre considération que la plate-bande supérieure cesserait très vite de jouer un rôle utile dans le contreventement, si la poutre n'avait pas une grande rigidité transversale.

Quoi qu'il en soit, nous admettrons que l'on ait *a priori* une limite H′ pour la hauteur de la poutre.

Nous admettrons aussi que le moment d'inertie puisse se calculer par la formule approchée

$$I = \frac{\omega H^2}{2},$$

et que par suite $\frac{1}{k} = \sqrt{\frac{EI}{Q+q}}$ soit ainsi proportionnel à A et à la racine carrée de ω.

Pour les différentes positions que l'on jugera intéressantes de la surcharge concentrée maxima, ou de la surcharge répartie incomplète, on calculera les valeurs approchées de q, et l'on aura, pour chaque cas, la limite supérieure de k. On prendra la valeur numérique simple la plus voisine de cette limite, et l'on déterminera les courbes des moments fléchissants M, ou tout au moins les valeurs maxima de M. Puis on en déduira la fatigue maxima $\frac{Mv}{I} = \frac{M}{\omega H}$ de la poutre de rigidité, et l'on vérifiera qu'elle ne dépasse pas un taux admissible. Si le contraire se présentait, on recommencerait les mêmes calculs pour une limite $H'' < H'$ et ensuite on déduirait par interpolation la valeur de H, à laquelle il convient de s'arrêter.

Voici d'ailleurs, en les généralisant, les résultats d'un certain nombre d'essais numériques faits sur des poutres simplement appuyées aux deux extrémités.

En essayant diverses valeurs de k, on constate que les moments fléchissants maxima varient à peu près comme $\frac{1}{k}$, mais cependant un peu plus vite. On peut donc les représenter par $\frac{\varphi}{k}$, φ étant une fonction très lentement croissante avec $\frac{1}{k}$.

Il en résulte que la fatigue maxima $\frac{Mv}{I}$ de la poutre de rigidité est proportionnelle à

$$\varphi \frac{H\sqrt{\omega}}{H\omega} = \frac{\varphi}{\sqrt{\omega}}.$$

Si φ était constant, cette fatigue ne dépendrait pas de H. Comme φ varie très lentement avec $\frac{1}{k}$, c'est-à-dire avec H et $\sqrt{\omega}$, il en résulte que la fatigue croît lentement avec H. Elle décroît d'ailleurs aussi d'une manière assez lente quand ω va en croissant.

En résumé, l'efficacité d'une poutre de rigidité est sensiblement proportionnelle à M_{max}, c'est-à-dire à $\frac{1}{k}$ ou à $\sqrt{I}$. Il y a donc intérêt à augmenter I, mais le gain n'est proportionnel qu'à la racine carrée de la section de la poutre. Il est, d'autre part, sensiblement proportionnel à H, qu'il faut augmenter le plus possible, jusqu'à la limite compatible avec les règles d'une bonne construction. Il suffit de vérifier que la hauteur choisie ne conduit pas à une trop grande fatigue dans la poutre de rigidité. Le fait que la fatigue croît lentement avec la hauteur dispense d'une très grande précision dans la recherche de celle-ci.

CHAPITRE XVIII.

RÈGLES SPÉCIALES AUX OUVRAGES EN MAÇONNERIE OU EN CIMENT ARMÉ.

I. — Ouvrages en maçonnerie.

Propriétés des maçonneries. — La maçonnerie est un assemblage d'éléments de nature différente, moellons ou cailloux et mortier, ce dernier résultant lui-même d'un assemblage de sable et gravier avec des grains de chaux ou de ciment. On ne doit pas s'attendre à ce que les lois de l'élasticité et la loi de répartition des efforts moléculaires s'appliquent aux particules infiniment petites de la masse. Ces lois ne peuvent être invoquées que pour des moyennes applicables à des volumes ou à des surfaces d'un ordre de grandeur supérieur, ou tout au moins comparable à celui des éléments constitutifs de la maçonnerie. Pour un massif en mortier pur ou en béton formé de cailloux fins, la condition d'homogénéité est remplie d'une manière assez complète. Elle l'est beaucoup moins dans une maçonnerie de gros moellons.

Dans les maçonneries, la limite de rupture par compression est généralement élevée. Elle peut atteindre 500^{kg} par centimètre carré, pour de bonnes maçonneries avec mortier de ciment. Elle ne tombe guère à moins de 100^{kg} par centimètre carré pour des maçonneries de chaux, après qu'elles ont fait prise. Par contre, la limite de rupture à la traction est faible; elle atteint rarement 15^{kg} par centimètre carré pour un béton riche en ciment, et peut s'abaisser, pour une maçonnerie jeune ou médiocrement exécutée, à 2^{kg} ou 3^{kg} par centimètre carré. Autant dire que dans certains cas elle tombe à zéro.

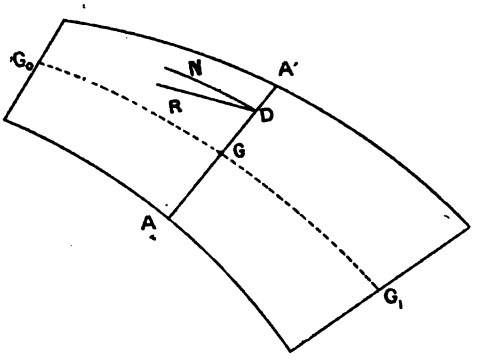
La prudence exige que dans les calculs de stabilité on suppose nulles, en même temps que la limite de rupture par traction, la limite d'élasticité et la limite de sécurité à la traction.

En ce qui concerne la résistance des maçonneries au glissement

ou au cisaillement, elle peut être très grande dans les maçonneries de blocage ou de béton; mais elle peut devenir nulle ou presque nulle pour des maçonneries assisées, c'est-à-dire formées de blocs de pierre taillés et collés les uns aux autres par un joint mince en mortier plus ou moins bien fait. Mais il arrive généralement que l'effort tranchant est faible par rapport à l'effort normal, et qu'on n'a pas à s'en préoccuper beaucoup. Même dans le cas de maçonneries assisées, la stabilité est généralement assurée sans que l'on ait à faire état de la résistance du mortier du joint, tout simplement parce que l'angle formé par la force extérieure avec le plan du joint est supérieur à l'angle de frottement. Nous ne nous occuperons pas, dans ce qui suit, de l'effort tranchant, car il est toujours très simple de s'assurer que la force extérieure remplit les conditions voulues pour qu'il n'y ait pas de glissement sur les joints.

Hypothèses sur la répartition des efforts. — Considérons un ouvrage dont la forme satisfasse à peu près à la définition des pièces

Fig. 162.



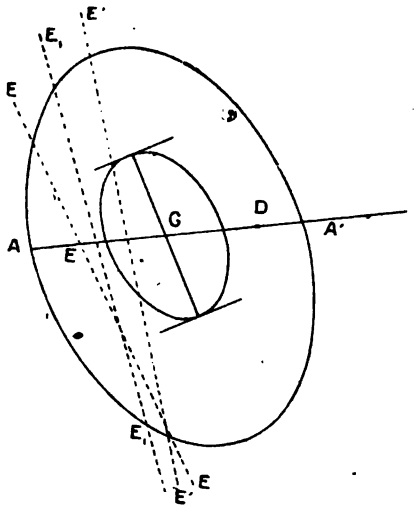
prismatiques, et soient G une section transversale, R la force extérieure rencontrant en D le plan de cette section, N la composante normale de la force extérieure.

Étant admis que dans la maçonnerie il ne peut se développer aucun effort moléculaire de traction, l'effort normal N est expressément supposé représenter une compression.

Représentons à part la section G et déterminons l'axe neutre EE correspondant au point de passage D de la force extérieure dans la

section. C'est l'antipolaire de D par rapport à l'ellipse centrale d'inertie.

Fig. 163.



Il pourra se présenter plusieurs cas :

1° *L'axe neutre* EE *ne coupe pas la section, cas qui suppose que le point* D *est à l'intérieur du noyau central de cette section.* — Tous les efforts dans l'étendue de la section seraient de même signe et seraient des efforts de compression si l'on appliquait la règle ordinaire de la Résistance des Matériaux. Il n'y a donc dans ce cas aucune contradiction, ni aucune méconnaissance de la nature intime des maçonneries, à supposer que cette règle s'applique. C'est ce que l'on fait, et alors l'ouvrage en maçonnerie se calcule indépendamment de son aptitude plus ou moins grande aux efforts de traction, ceux-ci n'ayant pas à intervenir.

2° *L'axe neutre* EE *coupe la section, mais ne coupe pas le noyau central, ce qui suppose que le point* D *est en dehors du noyau central, mais reste en général à l'intérieur de la section.* — Dans ce cas, l'axe neutre sépare la section en deux régions, dans l'une desquelles (EAE) il devrait se développer des efforts moléculaires de tension, si la règle habituelle de la Résis-

tance des Matériaux pouvait être suivie. Celle-ci doit donc être abandonnée. On la remplace par la suivante.

On suppose que toute la région EAE, qui n'offre aucune résistance à la traction, est inexistante au point de vue des réactions mutuelles des deux portions du massif situées de part et d'autre de la section G, et l'on cherche si la stabilité peut être assurée sans elle, même au cas où une fissure réelle se produirait dans toute son étendue. Autrement dit, on considère une *section qui serait réduite* à la région dans laquelle se trouve situé le point D, et l'on détermine un nouvel axe neutre E_1E_1.

Cet axe neutre E_1E_1 n'est pas forcément parallèle à EE, attendu que l'ellipse centrale d'inertie de la section réduite n'est pas du tout la même que celle de la section primitive.

Il coupe forcément la section réduite, dont il laissera à sa gauche une certaine étendue, qui sera à rejeter comme l'a été la section EAE, attendu qu'elle sera elle-même exposée à se fissurer. Mais ce nouveau déchet pourra être petit par rapport au précédent.

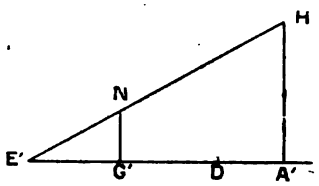
En recommençant l'opération plusieurs fois, on s'aperçoit que E_1E_1 tend rapidement vers une limite E'E'. Cette limite doit être telle que la section réduite correspondante ne soit plus coupée par elle, mais lui soit tangente en quelqu'un de ses points, autrement dit que le point D soit à la limite du noyau central de cette section réduite.

Tant que le point D est à l'intérieur de la section, il existe nécessairement une semblable section réduite. Cela résulte de ce que G est forcément entre D et E, et que par conséquent le centre de gravité G'_1 de la première section réduite va en se rapprochant de D.

Lorsque l'on a trouvé la position limite de E'E' et déterminé la section réduite limite qui lui correspond, on retombe sur le premier cas, puisque dans l'étendue de cette section réduite limite il ne peut plus se développer d'efforts de traction sous l'action de la force extérieure. Il est donc logique d'admettre (pour être conséquent avec l'hypothèse faite dans le premier cas) que la règle de la Résistance des Matériaux peut valablement être *appliquée à la section réduite limite*. Cette règle se simplifie d'ailleurs en ce que l'on connaît immédiatement la position de l'axe neutre,

sur lequel il n'y a ni traction ni compression. Pour avoir, dans ce cas, une représentation des efforts, il suffit de joindre le point E'

Fig. 164.



au point N marqué sur la verticale du centre de gravité de la section réduite et tel que $G'N = \frac{N}{S'}$, c'est-à-dire la poussée moyenne. C'est en cette représentation que consiste la règle *dite du triangle*.

On voit que dans ce cas il y a un problème préalable à résoudre, qui consiste dans la recherche de la section réduite limite, ou de la position limite de l'axe neutre, laquelle peut aussi être appelée la limite de la ligne de fissuration possible de la maçonnerie. Nous y reviendrons plus loin.

3° *Le point* D *est en dehors de la section.* — Tant qu'il ne s'agit que de maçonnerie proprement dite, c'est-à-dire sans armatures, ce cas est évidemment un cas d'instabilité, au moins si l'on suppose la section pleine et à contour convexe. En déduisant, comme dans le cas précédent, de la section primitive toutes les régions susceptibles de se fissurer, on arriverait à rejeter dans les déchets la section toute entière. Il ne saurait, en effet, y avoir de section réduite telle que le point D vienne à l'intérieur ou à la limite du noyau central, puisque ce dernier doit être intérieur à la section.

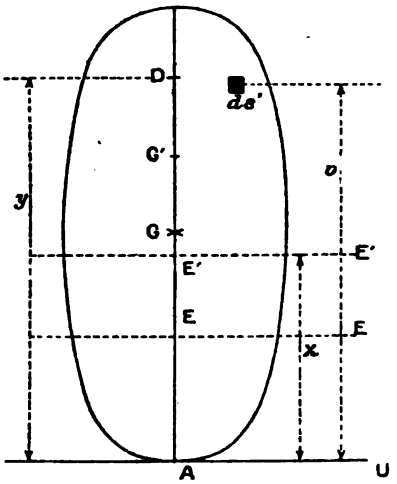
Il peut y avoir exception quand une section présente des évidements ou des refouillements, le noyau central d'une section réduite pouvant alors comprendre des points qui n'en font pas réellement partie. Mais il est sans intérêt d'insister là-dessus, car on verra toujours d'avance si l'on est dans ce cas d'exception, qui se traiterait alors comme le second cas envisagé précédemment.

Recherche de l'axe neutre limite. — Nous supposerons, pour

simplifier, que la section G du massif ait un axe de symétrie, et que le point D où la force extérieure rencontre la section soit sur cet axe de symétrie. Alors toutes les sections réduites ont le même axe de symétrie, auquel tous les axes neutres successifs sont perpendiculaires.

Après que l'on a vérifié que le point D est en dehors du noyau central, et que par suite l'antipolaire EE du point D coupe la section, il faut chercher la parallèle E'E' à EE qui remplisse cette

Fig. 165.



condition d'être l'antipolaire du point D par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la section réduite qu'elle détermine au-dessus d'elle.

Un premier moyen découle tout naturellement de la définition de l'axe neutre limite. On traitera la section réduite correspondant à EE de la même façon que la section primitive; on déterminera le nouvel axe neutre E_1E_1 qui lui correspond, puis la section réduite correspondant à E_1E_1, et ainsi de suite. On peut s'approcher ainsi assez rapidement de la limite E'E'. (Pour le béton armé, la convergence est très rapide.)

On peut aussi, pour différentes positions assignées d'avance au point E', déterminer les positions qui en résulteraient pour le point D, et obtenir ainsi la loi de correspondance entre les

points E′ et D, loi d'où l'on déduira inversement la position de E′ correspondant à une position connue du point D. Ce procédé indirect est de beaucoup le plus simple.

Rapportons toutes les distances à un axe AU perpendiculaire à l'axe de symétrie de la section et, pour le préciser, supposons-le tangent à cette section au droit de la fibre extrême A. Appelons y la distance DA, z la distance E′A et, d'une manière générale, v la distance à AU d'un élément de section dS. Puisque E′E′ est l'axe neutre limite, sur tout élément dS de *la section réduite correspondante* s'exercera un effort de compression proportionnel à $v - z$, de sorte qu'on aura

$$n = k(v - z)$$

dans l'étendue de cette section réduite. On a donc à déterminer les deux constantes K et z. Pour cela, on dispose des deux équations d'équilibre qui sont

$$N = \Sigma k(v - z)\, dS,$$
$$Ny = \Sigma kv(v - z)\, dS,$$

la sommation s'étendant à tous les éléments de la section réduite. Posons, *pour cette section réduite*,

$$\Sigma\, dS = S,$$
$$\Sigma v\, dS = H,$$
$$\Sigma v^2\, dS = J,$$

les deux équations d'équilibre deviennent

$$N = k(H - Sz),$$
$$Ny = k(J - Hz).$$

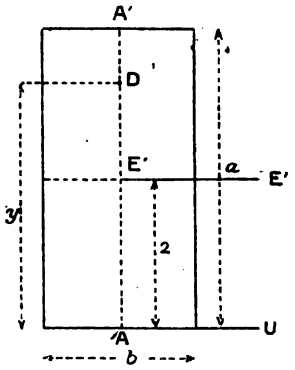
En les divisant membre à membre, on trouve

$$y = \frac{J - Hz}{H - Sz}.$$

Cette équation est la loi de correspondance cherchée entre y et z. Elle présente cette particularité qu'elle est toute résolue par rapport à y, les fonctions S, H et J étant des fonctions de z seulement.

a. Il existe un cas particulier très important pour lequel les fonctions S, H, J sont suffisamment simples pour que l'équation

Fig. 166.



puisse se résoudre aussi par rapport à z. C'est celui d'une section rectangulaire, de côtés a et b.

On a

$$S = b(a - z),$$

$$H = b\left(\frac{a^2 - z^2}{2}\right),$$

$$J = b\left(\frac{a^3 - z^3}{3}\right).$$

Par suite, l'équation devient

$$y = \frac{\dfrac{a^3 - z^3}{3} - \dfrac{a^2 - z^2}{2}z}{\dfrac{a^2 - z^2}{2} - (a - z)z} = \frac{1}{3}(2a + z),$$

d'où

$$z = 3y - 2a.$$

On peut mettre ce résultat sous une forme plus expressive en écrivant

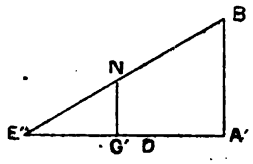
$$a - z = 3(a - y).$$

La distance de E' à A' est égale à trois fois celle du point D.

La pression moyenne G'N' au centre de gravité G', qui est le milieu de E'A', est égale à $\frac{N}{b \times E'A'}$, et la pression au droit de l'arête

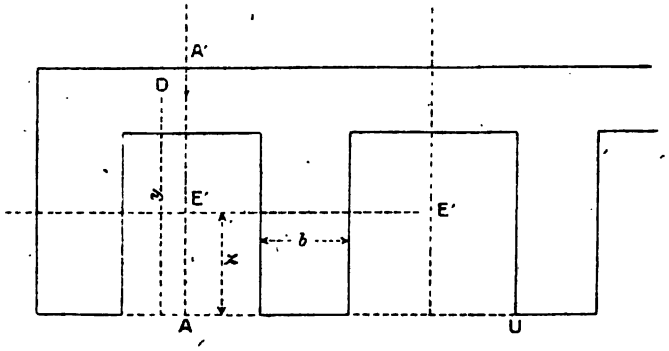
chargée A′ en est forcément le double. C'est là une règle pratique très connue.

Fig. 167.



b. Considérons en second lieu une section formée de rectangles, comme par exemple celle d'un mur à contreforts.

Fig. 168.



Appelons b la longueur des contreforts sur une tranche déterminée du mur, et soient S_0, H_0, J_0 les valeurs de S, H, J pour $z = 0$, c'est-à-dire pour la section primitive.

Pour une valeur donnée de z et à condition simplement que z reste inférieur à la hauteur des évidements entre contreforts, on aura

$$S = S_0 - bz,$$

$$H = H_0 - \frac{bz^2}{2},$$

$$J = J_0 - \frac{bz^3}{3}.$$

La loi de correspondance entre y et z, sous les conditions énoncées, est donc

$$y = \frac{J_0 - H_0 z + \frac{bz^3}{6}}{H_0 - S_0 z + \frac{bz^2}{2}}.$$

On peut encore la résoudre algébriquement par rapport à z puisqu'elle n'est que du troisième degré. Mais il sera généralement plus simple de calculer la valeur du second membre pour quelques valeurs simples de z et de procéder à une interpolation, aussitôt que l'on aura obtenu pour le second membre deux valeurs encadrant la valeur donnée de y.

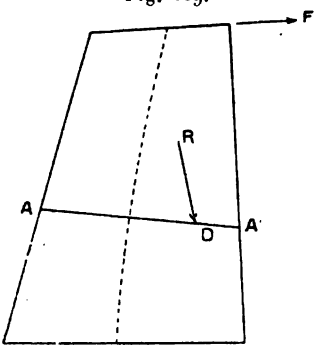
C'est ainsi que l'on aura à procéder dans le cas général; par exemple, quand il s'agit de massifs ronds ou elliptiques, ou bien n'ayant aucune forme géométrique simple. Une fois z déterminé, on pourra tirer k de l'une ou l'autre des deux équations d'équilibre, sous la forme ci-dessous :

$$N = k(H - Sz),$$
$$Ny = k(J - Hz)$$

ou bien encore, on pourra, si on le préfère, traiter la section réduite exactement comme on le fait en Résistance des Matériaux, c'est-à-dire chercher son centre de gravité et son moment d'inertie I par rapport à ce centre de gravité.

Étude d'un massif à axe sensiblement vertical, piles, culées, murs de soutènement, etc. — Dans un pareil massif, on peut géné-

Fig. 169.



ralement substituer aux sections normales à l'axe des sections horizontales telles que AA'. Rien ne serait plus facile, si l'axe était trop éloigné de la verticale, que de considérer les sections qui sont perpendiculaires à cet axe.

On suppose connues toutes les forces qui agissent sur les diffé-

rentes parties du massif, charges verticales appliquées à sa partie supérieure, efforts horizontaux appliqués soit à sa partie supérieure, soit le long de ses parements, et enfin poids des différentes parties. Dans ces conditions, le problème qui consiste à rechercher la force extérieure R qui correspond à une section particulière AA′ n'offre absolument rien de particulier.

On opérera méthodiquement en traçant une courbe des pressions qui, pour chacune des sections successivement envisagées, fournira la grandeur de la force extérieure et son point de passage D.

Il suffira ensuite de vérifier que le massif situé au-dessus de AA′ est stable, au moyen des principes qui viennent d'être exposés. Si la force extérieure tombe dans le tiers central de la section, on n'aura qu'à calculer la fatigue maxima de la maçonnerie, tout comme on le ferait pour un ouvrage métallique. Si elle tombe en dehors du tiers central, on aura d'abord à déterminer la limite de fissuration qui peut être atteinte, puis on traitera la section réduite restante comme si elle était elle-même parfaitement élastique.

Suivant les résultats obtenus, on appréciera si l'ouvrage se trouve dans de bonnes conditions de résistance, ou si au contraire certaines de ses dimensions doivent être corrigées et dans quel sens.

Étude d'une voûte en maçonnerie. — M. Résal a depuis longtemps enseigné qu'il n'y avait pas de différence essentielle entre le calcul d'une voûte en maçonnerie et celui d'un arc encastré. Le problème fondamental est ici, comme pour les arcs, la détermination des réactions d'appui, et il ne saurait y avoir de méthode rationnelle pour le calcul des réactions d'appui si cette méthode ne fait pas intervenir les lois de la déformation élastique.

L'étude des voûtes sera du reste faite dans le Cours des Ponts, et nous n'y insisterons pas.

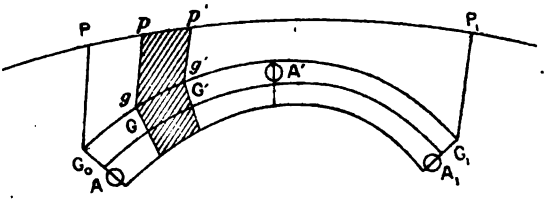
Nous ferons simplement observer que si la courbe des pressions obtenues en traitant la voûte comme un arc élastique ne sort nulle part du noyau central des sections normales, il ne peut y avoir aucune raison de supposer que la voûte se comporte autrement que l'arc élastique. Les efforts calculés correspondront partout aux efforts réels.

Si, au contraire, la courbe des pressions sort dans certaines régions du noyau central, il faudra, au point de vue de la résistance, supposer que la maçonnerie située en dehors des axes neutres, ou limites des fissurations, ne joue aucun rôle et sert simplement à charger la voûte. On peut prendre le parti de la supprimer, si l'on n'a pas besoin de la conserver à d'autres points de vue. Si on la supprime, on peut être conduit, au cas où les modifications ainsi faites seraient importantes, à recommencer avec les nouvelles dimensions une détermination des réactions d'appui et à tracer une nouvelle courbe des pressions, afin de vérifier que partout la stabilité est bien définitivement assurée.

Si on laisse subsister les sections primitives et si, d'autre part, on a constaté que les efforts moléculaires ne dépassent, pour aucune section, la limite de sécurité adoptée, on éprouve quelquefois le besoin de recommencer la détermination des réactions d'appui en supposant que la maçonnerie inutile est complètement désagrégée. C'est là une hypothèse qui nous paraît tout à fait excessive, les sections entières devant intervenir, à notre avis, dans les équations de déformation appliquées au calcul des réactions d'appui.

Voûtes de faible portée. Méthode dite de Méry. — Pour les voûtes peu importantes, on ne s'astreint généralement pas à une étude complète. On se borne à vérifier que la voûte est stable sous l'influence de la charge permanente, laquelle est la plupart du temps considérable par rapport aux surcharges. Cette vérification se fait sommairement, ainsi qu'il suit. On suppose que chaque élément $GG' = ds$ de la fibre moyenne supporte une charge égale au poids du voussoir correspondant, compris entre deux plans

Fig. 170.



normaux à l'intrados (ou à la fibre moyenne), et au poids $gg'pp'$ des maçonneries ou de la terre superposée à la voûte. On suppose,

en outre, que la voûte est articulée en trois points : 1° le point A', situé à la clef au tiers supérieur du joint ; 2° les points A_0 et A_1, situés aux tiers inférieurs des joints de retombée G_0 et G_1, si ces joints sont inclinés de plus de 30° sur l'horizontale, ou aux tiers inférieurs des joints faisant sensiblement cet angle de 30° avec l'horizontale, dans le cas contraire.

Avec cette hypothèse de la triple articulation, la détermination de la poussée devient très simple. $Q = \frac{\mu'}{y'}$, en désignant par μ le moment fléchissant dû aux charges dans une poutre droite de portée A_0A_1, et par y' la distance verticale de A' à la ligne A_0A_1.

Une fois la poussée connue, on trace la courbe des pressions qui passe par les trois points $A_0A'A_1$, et l'on vérifie qu'elle ne sort pas du noyau central, ou, si elle s'en écarte, que la résistance de la voûte n'en demeure pas moins assurée.

Cette hypothèse d'une triple articulation, ou, ce qui revient au même, de la connaissance préalable de trois points de la courbe des pressions, est assez arbitraire, *a priori*, mais elle repose sur l'observation de la manière dont une voûte se rompt généralement. En tout cas, on obtient de cette façon des renseignements suffisants pour apprécier les conditions de résistance d'une voûte peu importante.

Certains auteurs ont conseillé de procéder à divers essais en déplaçant arbitrairement les points d'articulation $A_0A'A_1$, la sécurité offerte par la voûte leur paraissant en rapport avec l'étendue des zones dans lesquelles ces déplacements pourraient s'opérer sans conduire à des efforts inadmissibles. Nous ne croyons pas utile d'insister sur un pareil procédé, très arbitraire et n'ayant même plus le mérite de la simplicité. Quand l'épure sommaire de Méry ne paraît pas suffisante, il est préférable d'aborder franchement l'étude de la voûte par les procédés ordinaires applicables à tous les arcs élastiques.

II. — Ouvrages en maçonnerie armée ou en ciment armé.

Depuis un certain nombre d'années, on a construit beaucoup d'ouvrages en maçonnerie armée, et surtout en béton, ou mortier de ciment armé. Ce sont le plus généralement des poutres prisma-

tiques dans lesquelles certaines fibres de maçonnerie ou de mortier sont remplacées par des tiges ou *armatures* en métal.

Les armatures en métal ont pour but et pour effet d'empêcher les pièces de se rompre, même quand on les soumet à des efforts de traction. Le mortier peut se fissurer, mais la pièce peut résister et durer si les armatures sont suffisantes.

Dans ces conditions, une poutre en ciment armé peut devenir stable, même quand la résultante des forces extérieures tombe en dehors de la section, pourvu que dans la région de cette section où se développent les efforts de traction il y ait des armatures de section convenable.

Il y a une variété considérable de méthodes proposées ou appliquées pour le calcul des poutres en ciment armé. Chaque constructeur a la sienne et n'en veut pas changer, en dépit d'une circulaire ministérielle du 20 octobre 1906 qui a cherché à mettre un peu d'ordre dans une question au fond très simple.

Ce qui est essentiel, c'est de s'entendre sur la façon dont doivent être calculées au point de vue mécanique les différentes sections des poutres, ou, si l'on veut, les quantités analogues à S, H, J, pour tenir compte de la présence des armatures.

Or, là-dessus, on est très près d'être d'accord, du moins du côté des constructeurs.

On admet que ceux des éléments dS de la section qui sont constitués par du métal équivalent au point de vue mécanique à des éléments $m\,dS$ de béton ou de mortier de ciment, m étant un coefficient numérique qui est théoriquement égal au rapport des coefficients d'élasticité du métal et du béton, lequel est voisin de 10. La circulaire admet que m varie entre 8 et 15, suivant les dispositions des armatures transversales, et les constructeurs admettent de préférence une valeur fixe comprise entre 12 et 15.

Si l'on était bien fixé, il n'y aurait presque aucune différence à faire entre le calcul d'un massif prismatique en béton armé et celui d'un massif prismatique en maçonnerie simple. Dans un cas comme dans l'autre, on devrait supposer que la maçonnerie ne saurait résister aux efforts de tension, même peu élevés, auxquels elle peut être soumise, et cela conduirait à distinguer deux cas : celui où la force extérieure passe dans le noyau central de la section et celui où il passe en dehors.

Dans le premier cas, tout se passe comme pour une section parfaitement élastique, comprimée sur toute son étendue.

Dans le second cas, la section est divisée en deux régions par l'axe neutre. Dans l'une de ces régions, le béton subirait des efforts de traction, et, comme il est supposé inapte à ce genre d'efforts, il doit être considéré comme inexistant ou comme fissuré jusqu'à une certaine limite que l'on a à rechercher. La seule différence avec la théorie précédemment exposée pour la maçonnerie provient de ce que les éléments de la section qui correspondent aux armatures, et qui sont situés dans la zone du béton tendu et fissuré, demeurent parties intégrantes des sections réduites successives et de la section réduite limite. Cela n'introduit aucune complication véritable et a simplement pour effet de limiter beaucoup l'écart entre l'axe neutre primitif EE et l'axe neutre définitif E′ E′.

Dans les deux cas, la loi de correspondance entre l'ordonnée y du point D de passage de la force extérieure, et l'ordonnée z de l'axe neutre définitif, est exprimée par une équation de même forme, lorsqu'il s'agit de sections symétriques, ce qui est à peu près le seul cas de la pratique. On résoudra cette équation par le même procédé indirect, déjà décrit.

Dans le cas de sections rectangulaires, ou composées de parties rectangulaires, l'équation est du troisième degré.

Pour les poutres en ciment armé, le point de passage D de la force extérieure dans la section peut être tout à fait quelconque, alors que pour les maçonneries simples il ne devait pas, en principe, sortir de la section. On a même très fréquemment, comme pour les poutres métalliques, à envisager le cas où le point D s'éloigne à l'infini et où l'effort normal devient nul, son produit Ny, demeurant fini et représentant le moment fléchissant M. C'est le problème de la flexion simple qui ne se posait pas pour les maçonneries. Si l'on fait $y = \infty$ dans l'équation

$$y = \frac{J - Hz}{H - Sz},$$

on voit que la valeur de z devra satisfaire à l'équation plus simple,

$$H - Sz = 0.$$

Lorsque l'on a affaire à une section rectangulaire, ou tout au

moins rectangulaire dans sa partie tendue, cette équation est du second degré et est par suite facile à résoudre. On a, en effet, comme précédemment

$$H = H_0 - \frac{bz^2}{2},$$

$$S = S_0 - bz.$$

Par suite, l'équation à résoudre est

$$\frac{bz^2}{2} - S_0 z + H_0 = 0.$$

On tirera k de l'équation

$$Ny = M = k(J - Hz).$$

et l'on aura finalement

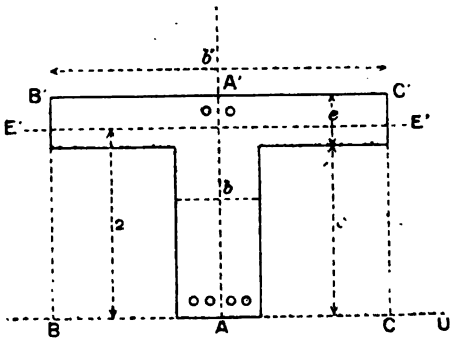
$$n = k(v - z) = \frac{M(v - z)}{J - Hz}.$$

En se reportant aux valeurs de J et de H, on a d'ailleurs dans ce cas

$$J - Hz = J_0 - H_0 z + \frac{bz^3}{6}.$$

Supposons, à titre d'exemple, le cas très fréquent d'une section en forme de T, comme ci-contre. Il est facile de voir que l'équation en z aura toujours deux racines positives. La somme et le produit

Fig. 171.



de ces racines sont positifs. En outre, elles sont toujours séparées par la hauteur h de la section. Substituons en effet cette hauteur h,

qui est égale à la somme $g+g'$ des distances du centre de gravité G aux points A et A′ respectivement. Nous trouverons comme résultat

$$\frac{bh^2}{2} - S_0 g - S_0 g' + H_0.$$

Or on a $H_0 - S_0 g = 0$, d'après la définition même du centre de gravité. Il reste donc

$$\frac{bh^2}{2} - S_0 g'.$$

Ce résultat est négatif, car $S_0 g'$ est le moment par rapport à A′ de la section entière, tandis que $\frac{bh^2}{2}$ est le moment de la nervure en béton, prolongée à travers la table supérieure. Ce n'est qu'une partie de $S_0 g'$. Il y a donc toujours une racine inférieure à h, et c'est la seule utile.

Cela posé, deux cas pourront se présenter suivant que l'axe neutre E′E′ coupera la nervure, ou coupera la table supérieure, c'est-à-dire suivant que l'équation fournira une racine utile inférieure ou supérieure à c, hauteur de la nervure. On les distinguera aisément en substituant c dans l'équation. Si le résultat est négatif, on est dans le premier cas, et la racine de l'équation écrite convient bien au problème.

Si le résultat est positif, on se trouve dans le second cas. Alors le plus simple est d'écrire une seconde équation analogue à la première, s'appliquant non plus à la section réelle, mais à une section fictive correspondant au rectangle total circonscrit BB′CC′. Les sections supplémentaires de béton introduites dans cette section fictive ne peuvent changer le résultat, puisqu'elles sont toutes entières comprises dans la zone de fissuration du béton. Les quantités S_0 et H_0 seront donc celles qui se rapportent à cette section fictive et b sera remplacé par b', largeur totale de la table supérieure.

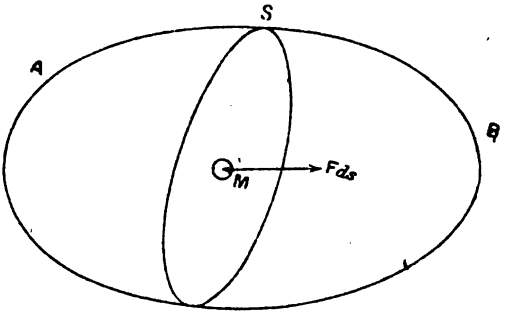
CHAPITRE XIX.

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉLASTICITÉ.

I. — Théorie des tensions intérieures.

Soit un corps naturel, limité par une surface fermée quelconque auquel est appliqué un système de forces en équilibre. Séparons le

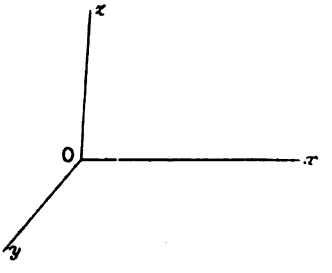
Fig. 171 *bis*.



corps par la pensée en deux parties A et B, par une surface quelconque S, par exemple un plan.

Sous l'action des forces appliquées, le corps aura subi une

Fig. 172.



certaine déformation et des efforts moléculaires intérieurs se seront développés dans la masse, assurant l'équilibre de chacune des

parties en lesquelles le corps peut être décomposé. En particulier, sur la surface de séparation S, il y aura des efforts moléculaires qui seront tels que chacune des parties A et B, envisagée isolément, soit en équilibre, d'une part sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées, et d'autre part sous l'action des efforts moléculaires représentant l'action de l'autre partie. La partie A notamment sera en équilibre sous l'action de toutes les forces qui lui sont appliquées et des efforts qu'elle subit de la part de B, à travers la surface S.

Les efforts exercés par B sur A, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, doivent être égaux et de signe contraire à ceux exercés par A sur B.

Si l'on considère les premiers efforts, on pourra en obtenir la résultante en appliquant à la partie A les théorèmes de la statique, mais on ne connaît rien *a priori* concernant la loi de leur distribution sur la surface S.

Soit dS un élément infiniment petit de la surface de séparation S, assimilable à un élément plan, dont le point M est le centre de gravité. A cet élément, considéré comme appartenant à A, nous supposerons appliqué un effort proportionnel à l'aire dS, et représenté par $F dS$. F est ainsi l'intensité de l'effort par unité de surface; c'est ce que nous appellerons, d'une manière générale, la *tension* par unité de surface au point M suivant le plan qui contient dS.

Si l'effort exercé par B sur A, à travers l'élément dS, est dirigé de A vers B, nous aurons un *effort de traction;* s'il est dirigé de B vers A, nous aurons un effort de *compression*.

L'effort exercé par A sur B à travers l'élément dS sera égal et de signe contraire. Il sera dirigé de B vers A si l'on a un effort de traction et de A vers B si l'on a un effort de compression.

La tension n'est pas forcément normale à l'élément dS, elle a en général une composante normale et une composante tangentielle égale à sa projection sur le plan de l'élément dS.

Rapportons la figure à trois axes de coordonnées rectangulaires. $Oxyz$, et soient x, y, z les coordonnées du point M. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément dS, considéré comme appartenant à la partie A du corps. La face positive de cet élément dS appartenant à A est supposée tournée vers l'extérieur

de A, de sorte que la direction positive sur la normale est celle qui va vers l'extérieur de A et pénètre dans B. Cette convention est importante pour éviter des erreurs de signe.

Soient X, Y, Z les composantes de la tension sur l'élément dS, ainsi précisé.

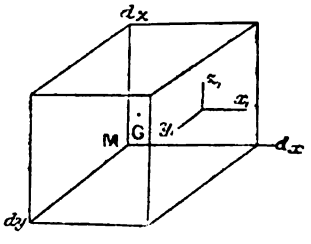
Les trois composantes X, Y, Z sont en général des fonctions des variables x, y, z, coordonnées du point M, car elles varient avec la position de ce point. Ce sont aussi des fonctions des variables α, β, γ, car elles varient avec l'orientation de dS. (Elles dépendraient en outre du temps, si le corps avait été supposé soumis à des forces variables avec le temps. Mais nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi et que le temps n'intervient pas.)

Nous allons établir que ces trois fonctions de six variables peuvent se ramener à la détermination de six fonctions des trois variables x, y, z seulement, et que, d'autre part, ces six fonctions sont liées par trois équations aux dérivées partielles, linéaires et du premier ordre.

Cette dépendance et ces relations résultent d'abord du principe dit de continuité, en vertu duquel on suppose : 1° que les forces directement appliquées, soit à la surface du corps, soit à son intérieur, sont réparties d'une manière continue, et 2° qu'il en est de même des tensions intérieures. A cela se joint cette considération qu'une portion quelconque du corps doit être en équilibre sous l'action des tensions exercées sur sa surface et des forces qui sollicitent sa masse.

Équilibre du parallélépipède élémentaire. — Considérons un

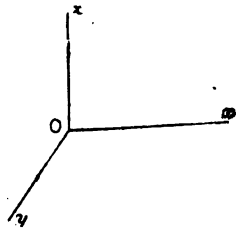
Fig. 173



parallélépipède élémentaire compris d'une part entre les plans parallèles $Oxyz$ correspondant aux abscisses x et $x + dx$, les plans

parallèles à Ozx, définis par les coordonnées y et $y+dy$, et enfin les plans parallèles à Oxy, définis par les coordonnées z et $z+dz$.

Fig. 174.



Désignons par X_0, Y_0, Z_0 les composantes de la force appliquée à l'unité de volume, aux environs du point M. La force appliquée au centre de gravité du parallélépipède aura pour composantes

$$X_0\,dx\,dy\,dz, \qquad Y_0\,dx\,dy\,dz, \qquad Z_0\,dx\,dy\,dz.$$

Désignons par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la tension qui s'exerce au point M sur la face positive de l'élément plan perpendiculaire à Ox, c'est-à-dire sur la face tournée vers Ox; par X_2, Y_2, Z_2 les composantes de la tension qui s'exerce au point M sur l'élément plan perpendiculaire à Oy et tourné vers Oy; par X_3, Y_3, Z_3 les quantités analogues pour l'élément plan perpendiculaire à Oz et tourné vers Oz.

Nous allons écrire les six conditions d'équilibre du parallépipède en égalant à zéro d'une part la somme des composantes par rapport aux trois axes, et d'autre part la somme des moments des forces par rapport aux trois axes.

Considérons d'abord les composantes suivant Ox.

Sur la face perpendiculaire à Ox passant par le point M, et dont l'aire est $dy\,dz$, la tension a pour composante $-X_1\,dy\,dz$, cette face étant tournée vers les x négatifs.

Sur la face parallèle, située à la distance dx, la tension a pour composante

$$\left[X_1 + \frac{dX_1}{dx}\,dx\right] dy\,dz.$$

Ces tensions sont dirigées en sens contraire l'une de l'autre. La

somme est

$$\frac{dX_1}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Sur la face perpendiculaire à Oy passant par M, la composante est

$$-X_2\,dz\,dx.$$

Sur la face parallèle, elle devient

$$\left[X_2+\frac{dX_2}{dy}\,dy\right]dz\,dx.$$

Leur somme est

$$\frac{dX_2}{dy}\,dx\,dy\,dz.$$

Enfin sur les faces perpendiculaires à Oz on trouverait comme somme

$$\frac{dX_3}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

On a donc à écrire l'équation

$$\frac{dX_1}{dx}\,dx\,dy\,dz+\frac{dX_2}{dx}\,dx\,dy\,dz+\frac{dX_3}{dx}\,dx\,dy\,dz+X_0\,dx\,dy\,dz=0;$$

ou, en divisant par dx, dy, dz, on trouve la première des trois équations suivantes, les deux dernières s'en déduisant par permutation :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{dX_1}{dx}+\frac{dX_2}{dy}+\frac{dX_3}{dz}+X_0=0,\\&\frac{dY_1}{dx}+\frac{dY_2}{dy}+\frac{dY_3}{dz}+Y_0=0,\\&\frac{dZ_1}{dx}+\frac{dZ_2}{dy}+\frac{dX_3}{dz}+Z_0=0.\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant les sommes des moments par rapport aux axes, et pour simplifier nous supposerons ces axes *passant par le centre de gravité du parallélépipède.*

Prenons les moments par rapport à Ox.

La force appliquée à l'élément du volume a un moment nul, puisqu'elle est appliquée au centre de gravité.

Les forces appliquées aux deux faces perpendiculaires Ox ont

également un moment nul, puisqu'elles sont appliquées aux centres de gravité de ces faces et rencontrent l'axe.

Sur les faces perpendiculaires à Oy, les deux forces correspondant à X_2 et $X_2 + \frac{dX_2}{dx} dx$ ont des moments nuls, puisqu'elles sont parallèles à l'axe Ox. Les deux forces correspondant à Y_2 ont également un moment nul, car elles rencontrent l'axe. Il reste seulement les forces correspondant à Z_2, qui équivalent à un couple $Z_2\, dx\, dz \times dy$ à un infiniment petit près.

Sur les faces perpendiculaires à Oz, on réduirait de même la somme des moments par rapport à Ox à $-Y_3\, dx\, dy\, dz$.

On doit donc avoir

$$Z_2 = Y_3.$$

Par permutation, on trouverait deux équations analogues correspondant aux moments pris par rapport à Oy et Oz. Ce sont

$$X_3 = Z_1,$$
$$Y_1 = X_2.$$

Ces dernières équations montrent que, sur les neuf composantes envisagées, il n'y en a que six distinctes, puisque trois d'entre elles sont égales aux trois autres.

Pour exprimer ce dernier résultat, il n'est besoin que de faire un changement de notations. On désignera par les lettres N_1, N_2, N_3 les composantes X_1, Y_2, Z_3 qui ne figurent pas dans ces égalités et qui représentent les composantes normales des tensions sur les plans perpendiculaires aux axes, et par T_1, T_2, T_3 les composantes tangentielles, la loi de correspondance résultant des deux Tableaux ci-dessous :

		Composantes parallèles à		
		Ox.	Oy.	Oz.
Faces perpendiculaires à	Ox	X_1	Y_1	Z_1
	Oy	X_2	Y_2	Z_2
	Oz	X_3	Y_3	Z_3

,

		Composantes parallèles à		
		Ox.	Oy.	Oz.
Faces perpendiculaires à	Ox	N_1	T_3	T_2
	Oy	T_3	N_2	T_1
	Oz	T_2	T_1	N_3

.

On composera facilement le deuxième Tableau en écrivant les N sur la diagonale principale dans l'ordre de leurs indices, puis les T, dans l'ordre également de leurs indices, en suivant les cases restantes d'un même côté de la diagonale; enfin en complétant le Tableau symétriquement par rapport à cette diagonale.

Avec ces notations, les équations (1) s'écrivent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + X_0 = 0,\\ &\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + Y_0 = 0,\\ &\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + Z_0 = 0.\end{aligned}\right.$$

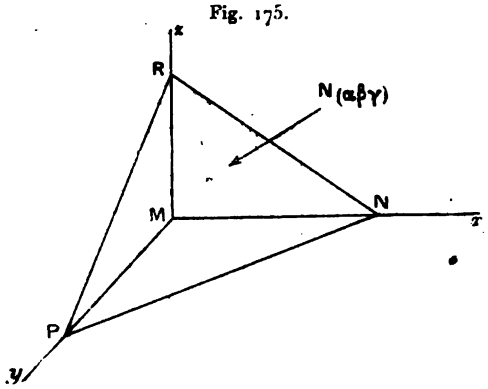
On a bien obtenu le résultat annoncé; il reste six fonctions de trois variables, liées par trois équations différentielles.

Les équations (2) s'appellent les équations *générales* de l'équilibre du milieu considéré.

Équilibre du tétraèdre élémentaire. — On peut déduire de la connaissance de ces six fonctions la connaissance des tensions sur des éléments plans obliques par rapport aux axes.

Soit M un point du corps. Cherchons la valeur de la tension sur

Fig. 175.



un plan passant par M et défini par les cosinus directeurs α, β, γ de sa normale. Il s'agit, bien entendu, de la face du plan tournée vers le point de coordonnées α, β, γ.

Menons un plan parallèle et infiniment voisin. Il coupera les parallèles aux axes menés par le point M aux points N, P, R et formera avec les trois plans parallèles aux plans coordonnés un petit tétraèdre qui devra être en équilibre.

Soient X, Y, Z les composantes de la tension sur le plan oblique passant en M; à des infiniment petits près, les composantes de la force exercée sur la face NPR seront

$$X\,dS, \quad Y\,dS, \quad Z\,dS$$

en appelant dS l'aire du triangle NPR.

Les composantes de la force exercée sur la face MPR perpendiculaire à Ox, dont l'aire est $\alpha\,dS$, seront

$$-N_1\alpha\,dS, \quad -T_3\alpha\,dS, \quad -T_2\alpha\,dS.$$

Sur la face MNR perpendiculaire à Oy, dont l'aire est $\beta\,dS$, on aurait de même

$$-T_3\beta\,dS, \quad -N_2\beta\,dS, \quad -T_1\beta\,dS.$$

Enfin, sur MNP perpendiculaire à Ox, dont l'aire est $\gamma\,dS$, on aurait

$$-T_2\gamma\,dS, \quad -T_1\gamma\,dS, \quad -N_3\gamma\,dS.$$

En égalant à zéro la somme des composantes relatives à chacun des axes, on a les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ Z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{cases}$$

Ces équations sont faciles à retenir ou à retrouver, les composantes N et T y étant disposées exactement comme dans le Tableau ci-dessus.

Les équations (3) sont appelées les équations d'*équilibre à la surface* du milieu considéré, lorsqu'on les applique à un élément dS de la surface de ce milieu. Les cosinus directeurs α, β, γ sont ceux de la normale à la surface dirigée vers l'extérieur.

Ellipsoïde des tensions. — Si l'on porte à partir du point M dans la direction de la tension un vecteur égal à cette tension, l'ensemble

des extrémités de ces vecteurs définit un ellipsoïde. Les composantes de ce vecteur sont X, Y, Z, et l'on aura l'équation de la surface décrite par l'extrémité du vecteur en éliminant α, β, γ entre les trois équations (3), qui sont linéaires, et la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

On peut déduire de la considération de cet ellipsoïde l'existence de trois tensions principales, dirigées suivant les axes de l'ellipsoïde et qui, par raison de symétrie, doivent être perpendiculaires aux plans formés par les autres axes. Mais on obtient des notions plus précises à cet égard en envisageant une autre surface définie de la manière suivante.

Surface directrice des tensions. — Projetons la tension, dont les composantes sont X, Y, Z, et relative au plan défini par les trois cosinus α, β, γ, sur la normale à un second plan défini par les trois cosinus α', β', γ'.

Cette projection aura pour valeur

$$(4) \quad X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma' = N_1\alpha\alpha' + N_2\beta\beta' + N_3\gamma\gamma' + T_1(\beta\gamma' + \gamma\beta') + T_2(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + T_3(\alpha\beta' + \beta\alpha'),$$

et l'on peut observer en passant que cette expression ne change pas quand l'on permute les deux systèmes de cosinus $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$. *La projection de la tension relative à l'un des plans sur la normale à l'autre plan ne change pas quand l'on permute les deux plans.*

Si l'on projette en particulier la tension sur la normale au plan où elle s'exerce, on obtient sa composante normale au plan. Si l'on désigne cette composante normale par N, on a l'expression

$$(5) \quad N = N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2T_1\beta\gamma + 2T_2\gamma\alpha + 2T_3\alpha\beta.$$

La tension sera une traction ou une compression, suivant que cette valeur de N sera positive ou négative.

Supposons maintenant que, sur la normale au plan, on porte à partir de M un vecteur MN dont le carré représente la valeur absolue de $\frac{1}{N}$, les coordonnées de N seront (si l'on suppose l'ori-

gine des coordonnées au point M), données par les relations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm N}}.$$

L'équation du lieu du point N s'obtiendra en éliminant α, β, γ entre ces relations et l'équation (5). On trouve

$$N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2T_1 yz + 2T_2 zx + 2T_1 xy = \pm 1.$$

C'est donc une surface du second degré, *que l'on appelle surface directrice des tensions.*

C'est un ellipsoïde, si N a partout le même signe. Ce sera le système de deux hyperboloïdes conjugués si N est tantôt positif et tantôt négatif.

Les propriétés de cette surface présentent un grand intérêt, mais nous n'en retiendrons que la suivante.

Si l'on prend pour axes coordonnés les trois axes de la surface directrice, les termes rectangles doivent disparaître de son équation, de sorte que, dans ce système d'axes, on doit avoir

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

Autrement dit, les composantes tangentielles sont nulles sur les plans perpendiculaires à ces axes, ou encore, sur ces trois plans les tensions sont normales.

Il y a donc en tout point du corps trois plans sur lesquels les tensions sont normales. Ces trois tensions sont dites *tensions principales.*

Remarque. — Nous avons dit plus haut l'importance que présente l'adoption d'un système de conventions bien défini en ce qui concerne les faces des éléments plans sur lesquelles les tensions s'exercent. Nous avons supposé expressément que $X_1 Y_1 Z_1$, $X_2 Y_2 Z_2, \ldots, X_3 Y_3 Z_3$ sont les forces qui s'exercent sur les éléments plans respectivement perpendiculaires à Ox, Oy, Oz et du côté des x, y, z positifs. De cette façon, quand X_1 par exemple est positive, elle représente une tension dirigée de O vers x, c'est-à-dire une traction. Dans le cas contraire, c'est une compression. Les valeurs positives de N_1, N_2, N_3 représentent donc des tractions, les valeurs négatives des compressions.

On trouve quelquefois intérêt à modifier cette règle, de manière à faire correspondre des compressions aux valeurs positives de N_1, N_2, N_3. Mais il faut alors se rendre bien compte que la convention ordinaire est modifiée et que tout revient à envisager les tensions qui s'exercent sur les faces négatives des éléments plans.

Si l'on désigne ces dernières tensions par des lettres accentuées, il est bien clair que l'on a $X'_1 = -X_1$, $Y'_1 = -Y_1$, $Z'_1 = -Z_1$, etc., et de même $N'_1 = -N_1, \ldots$, et que le résultat cherché est obtenu, puisque à une valeur négative de X_1, par exemple, correspond une valeur positive de X'_1, et qu'à celle-ci correspond une compression.

Il est aisé de voir que, si l'on recommençait dans ce nouveau système les raisonnements relatifs à l'équilibre du parallélépipède élémentaire, on retrouverait les équations (1) dans lesquelles toutes les composantes des tensions seraient accentuées et changées de signe. Il reviendra au même de changer les signes de X_0, Y_0, Z_0, et il ne faut pas oublier de le faire.

De même, si l'on envisage l'équilibre du tétraèdre élémentaire, on devra se rappeler que les équations (3) ne sont conservées qu'à la condition de faire correspondre à la face que l'on considère sur un élément plan donné les cosinus directeurs de la normale à la face opposée. En particulier, si l'on envisage un élément de la *surface extérieure* d'un corps, il faut faire correspondre à cet élément les cosinus directeurs de la normale dirigée vers *l'intérieur du corps*.

Il est à remarquer que l'inobservation de cette règle n'entraînerait aucune erreur dans l'évaluation de la composante normale N, puisque dans la formule (5) les cosinus directeurs n'interviennent que par leurs carrés ou leurs produits; mais il n'en serait pas de même dans les autres formules déduites des équations (3).

II. — Théorie des déplacements dans un système continu.

Considérons un système de points infiniment rapprochés rapportés à trois axes rectangulaires. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque N. Soient u, v, w les composantes de son déplacement.

Considérons maintenant un point N, infiniment voisin de M, dont les coordonnées soient $x+h$, $y+k$, $z+l$; les composantes

de son déplacement, u', v', w', seront données par les expressions

$$(6)\quad \begin{cases} u' - u = \dfrac{du}{dx}h + \dfrac{du}{dy}k + \dfrac{du}{dz}l, \\ v' - v = \dfrac{dv}{dx}h + \dfrac{dv}{dy}k + \dfrac{dv}{dz}l, \\ w' - w = \dfrac{dw}{dx}h + \dfrac{dw}{dy}k + \dfrac{dw}{dz}l. \end{cases}$$

Ces expressions représentent aussi les accroissements δh, δk, δl subis par les composantes h, k, l du vecteur MN.

Si l'on considère l'ensemble des points N situés sur une certaine surface $f(hkl) = 0$ entourant le point M, ces points seront, après déformation, sur une surface entourant le point M déplacé, dont l'équation sera

$$f(h + \delta h,\ k + \delta k,\ l + \delta l) = 0.$$

Ce sera une équation de même degré que $f(hkl) = 0$, puisque les accroissements δh, δk, δl sont linéaires en h, k, l.

Ainsi les points primitivement situés sur un plan resteront sur un plan, les points primitivement situés sur une surface du second degré demeureront sur une surface du second degré.

Décomposition du déplacement relatif. — Les formules (6) montrent que le déplacement relatif d'un point quelconque N par rapport au point M est déterminé par les valeurs que présentent au point M les neuf dérivées partielles des composantes du déplacement u, v, w, par rapport à x, y, z. On peut substituer à ces neuf dérivées neuf autres coefficients dont l'interprétation géométrique est plus facile.

Posons

$$(7)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{du}{dx}, & a_2 = \dfrac{dv}{dy}, & a_3 = \dfrac{dw}{dz}, \\ 2b_1 = \dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}, & 2b_2 = \dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}, & 2b_3 = \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}, \\ 2p_1 = \dfrac{dw}{dy} - \dfrac{dv}{dz}, & 2p_2 = \dfrac{du}{dz} - \dfrac{dw}{dx}, & 2p_3 = \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{du}{dy}. \end{cases}$$

On se rappellera la formation de ces coefficients en formant le

Tableau

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

analogue à celui donné pour les tensions et en le comparant au Tableau des neuf dérivées partielles

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} & \frac{dw}{dy} & \frac{dw}{dz} \end{vmatrix}.$$

Les a sont les dérivées contenues dans la diagonale principale, les b sont les demi-sommes des éléments symétriques par rapport à la diagonale, les p sont les demi-différences.

Avec ces nouvelles notations, les équations (6) pourront s'écrire :

$$(8)\qquad \begin{cases} dh = u' - u = (a_1 h + b_3 k + b_2 l) + p_2 l - p_3 k, \\ dk = v' - v = (b_3 h + a_2 k + b_1 l) + p_3 h - p_1 l, \\ dl = w' - w = (b_2 h + b_1 k + a_3 l) + p_1 k - p_2 h, \end{cases}$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier en introduisant dans ces dernières expressions les valeurs indiquées pour les nouveaux coefficients.

Les termes en p représentent une rotation autour du point M, les composantes de cette rotation étant p_1, p_2, p_3. Un semblable mouvement ne produit aucune déformation, puisqu'il est commun à tous les points situés au voisinage du point M.

Les déformations du milieu autour du point M sont donc fonctions des seules quantités $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, que l'on appellera les *déformations élémentaires*, en raison des propriétés qui vont suivre.

Dilatation linéaire.— On appelle *dilatation linéaire* le rapport de l'accroissement d'une longueur à sa valeur primitive.

Évaluons la dilatation linéaire suivant la direction MN. Le seg-

ment MN a pour longueur r et l'on a

$$r^2 = h^2 + k^2 + l^2.$$

On en déduit

$$r\,dr = h\,dh + k\,dk + l\,dl.$$

Si l'on remplace dh, dk, dl par leurs valeurs (8), les coefficients p disparaissent, ainsi que l'on pouvait s'y attendre, et il reste :

$$r\,dr = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2b_1 kl + 2b_2 lh + 2b_3 hk.$$

Si l'on appelle α, β, γ les cosinus directeurs de MN et $a = \frac{dr}{r}$ la dilatation linéaire suivant MN, on trouvera en divisant par r^2

$$(9) \qquad a = a_1\alpha^2 + b_2\beta^2 + a_3\gamma^2 + 2b_1\beta\gamma + 2b_2\gamma\alpha + 2b_3\alpha\beta.$$

Si l'on suppose que MN est parallèle à Ox, on a

$$\beta = \gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 1,$$

d'où

$$a = a_1;$$

a_1 est donc la dilatation linéaire suivant la parallèle à Ox.

De même a_2 et a_3 seraient les dilatations linéaires suivant des parallèles à Oy et Oz respectivement.

Cela fixe la signification de ces trois quantités.

Dilatation angulaire. — Soient deux points N_1 et N_2 infiniment voisins de M et soient $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ les cosinus directeurs des directions MN_1 MN_2, et V l'angle N_1MN_2.

On a

$$\cos V = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$$

ou

$$r_1 r_2 \cos V = h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2.$$

On en déduit par différentiation

$$\cos V\, d(r_1 r_2) - r_1 r_2 \sin V\, dV = h_2\,dh_1 + k_2\,dk_1 + l_2\,dl_1 + h_1\,dh_2 + k_1\,dk_2 + l_1\,dl_2.$$

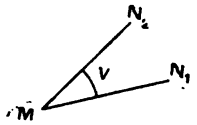
Lorsque l'angle V est droit, $\cos V = 0$ et le premier terme du

premier membre s'annule. Dans le deuxième terme, sin V est égal à 1.

Si l'on remplace les différentielles dh, dk, dl par leurs valeurs tirées des équations (8), on obtient

$$-\frac{1}{2} r_1 r_2 \, dV = a_1 h_1 h_2 + a_2 k_1 k_2 + a_3 l_1 l_2 + b_1(k_1 l_2 + l_1 k_2) + b_2(l_1 h_2 + h_1 l_2) + b_3(h_1 k_2 + k_1 h_2).$$

Fig. 176.



Si l'on pose $\frac{1}{2} dV = b$ et si l'on divise par $r_1 r_2$, ce qui ramène les cosinus directeurs, on trouve

$$(10) \qquad b = a_1 \alpha_1 \alpha_2 + a_2 \beta_1 \beta_2 + a_3 \gamma_1 \gamma_2 + b_1(\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) + b_2(\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) + b_3(\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2).$$

Cette formule donne donc la moitié de la diminution qu'éprouve dans la déformation l'angle V, primitivement droit, des deux directions $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$.

Si l'on suppose que MN_1 est confondu avec Oy et MN_2 avec Oz, on a

$$\alpha_1 = 0 = \gamma_1 \quad \text{avec} \quad \beta_1 = 1,$$
$$\alpha_2 = 0 = \beta_2 \quad \text{avec} \quad \gamma_2 = 1.$$

Tous les termes disparaissent à l'exception du terme $b_1 \beta_1 \gamma_2 = b_1$. On en déduit que la quantité $2b_1$ représente la diminution éprouvée par l'angle YOZ. De même on verrait que $2b_2$ et $2b_3$ représentent respectivement les diminutions des angles ZOX et XOY.

Ces quantités $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$ s'appellent *distorsions* ou *glissements*.

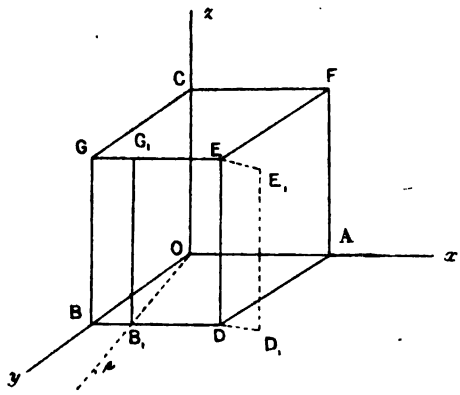
La raison de cette dernière appellation est la suivante.

Supposons que l'origine des coordonnées étant portée au point M, on prenne sur Ox et Oy deux longueurs OA et OB égales à l'unité, et considérons le carré OABD comme la base d'un prisme dont les arêtes soient parallèles à Oz.

Supposons que la distorsion $2b_3$ existe seule et que OA demeure

fixe, le point B viendra en B_1, point situé sur BD à un infiniment petit près d'ordre supérieur, puisque l'angle $B_1OB' = 2b_3$ est

Fig. 177.



infiniment petit. L'arête BG viendra en B_1G_1. De même l'arête DE viendra en D_1E_1, de sorte que la déformation consistera uniquement en un *glissement relatif* de la face BDEG du prisme par rapport à la face opposée OAFC supposée fixe. Seules les faces perpendiculaires à Oz sont altérées et se transforment en *parallélogrammes*. La valeur du glissement est, d'ailleurs, à l'unité de distance :

$$BB_1 = \tang \widehat{BOB_1} = 2b_3.$$

Surface des dilatations. — Reprenons la formule qui donne la dilatation linéaire. Elle est toute semblable, comme forme, à celle qui nous avait donné la composante normale de la tension sur un plan perpendiculaire à la direction $\alpha\beta\gamma$. On peut donc en faire une représentation semblable.

Si l'on porte sur la direction $\alpha\beta\gamma$, à partir du point M, un vecteur MN dont le carré représente la valeur absolue de l'inverse $\frac{1}{a}$, les coordonnées x, y, z de l'extrémité du vecteur seront données par les relations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm a}},$$

le signe étant + ou — suivant que a est positif ou négatif.

En éliminant $\alpha\beta\gamma$ entre ces équations et celle qui donne a, équation (9), on obtient l'équation du lieu du point N

$$(11) \qquad a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy = \pm 1.$$

C'est une surface du deuxième degré, qui sera un ellipsoïde s'il y a partout *dilatation* ou *contraction*, et qui sera l'ensemble de deux hyperboloïdes conjugués s'il y a dilatation dans certaines directions, contraction dans d'autres.

Si l'on prend pour axes coordonnés les trois axes de la surface, les termes rectangles disparaissent de son équation, de sorte que l'on a

$$b_1 = 0 = b_2 = b_3.$$

Il en résulte que, *en tout point d'un solide qui subit une déformation, il existe trois directions rectangulaires telles que les angles de ces directions, prises deux à deux, restent droits après la déformation.*

Les dilatations dans ces trois directions sont dites *principales*.

Dilatation cubique. — Considérons un élément parallélépipédique ayant un sommet au point M et dont les arêtes soient dans la direction des dilatations principales. Désignons par a'_1, a'_2, a'_3 ces dilatations principales.

Par la déformation, les arêtes sont respectivement multipliées par $1 + a'_1$, $1 + a'_2$, $1 + a'_3$. De plus, les angles restent droits. Donc le volume de l'élément est multiplié par

$$(1 + a'_1)(1 + a'_2)(1 + a'_3) = 1 + a'_1 + a'_2 + a'_3$$

en négligeant les termes du second ordre.

Il en résulte que la dilatation cubique est donnée par l'expression

$$\theta = a'_1 + a'_2 + a'_3.$$

La somme des trois dilatations principales est d'ailleurs égale à la somme des trois dilatations relatives à trois axes rectangulaires quelconques.

Si l'on reprend, en effet, la formule générale qui donne la dilatation dans la direction $\alpha\beta\gamma$,

$$a = a_1 \alpha^2 + a_2 \beta^2 + a_3 \gamma^2 + 2 b_1 \beta\gamma + 2 b_2 \gamma\alpha + 2 b_3 \alpha\beta$$

et qu'on y introduise les cosinus directeurs $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ des trois directions rectangulaires, puis qu'on fasse la somme, en tenant compte des relations qui lient les cosinus directeurs, on trouve

$$a_1 + a_2 + a_3.$$

On en déduit que, d'une manière générale,

$$\theta = a_1 + a_2 + a_3. \tag{12}$$

III. — Relations entre les tensions et les déformations d'un solide élastique a partir de l'état naturel.

Nous admettons qu'il existe un état du solide dans lequel les tensions intérieures sont nulles; c'est ce que l'on appelle *l'état naturel*. Si, le corps étant en cet état, on vient à lui appliquer certaines forces extérieures, il se déformera, et en même temps des tensions intérieures prendront naissance.

Si l'on admet la loi de Hooke généralisée, en supposant bien entendu qu'il ne s'agisse que de déformations très petites, dont on peut négliger les secondes puissances, et d'autre part qu'il ne s'agisse que de tensions intérieures notablement inférieures à la limite d'élasticité, on sera conduit à poser ce principe *que les six composantes des tensions* N *et* T *sont des fonctions linéaires et homogènes des six déformattons élémentaires a et b, et inversement.*

Nous aurons donc des équations de la forme

$$\mathrm{N} = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 n_3 + p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 = \varphi(a_1, \ldots).$$
$$\mathrm{T} = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + q_1 b_1 + q_2 b_2 + q_3 b_3 = \psi(a_1, \ldots).$$

Les coefficients m, n, p, q portent d'une manière générale le nom de *coefficients d'élasticité*. Si l'on exprimait les déformations a et b en fonction des N et T, les coefficients seraient ce que Rankine appelle des *coefficients de souplesse*.

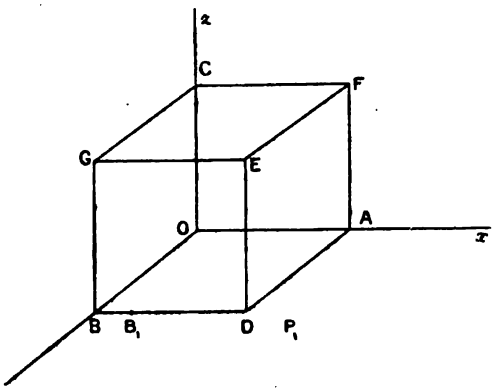
Il y a en tout trente-six coefficients d'élasticité, qui dépendent de la constitution du milieu autour du point M. Si cette constitution varie d'un point à un autre, ils peuvent être des fonctions de x, y, z; mais si nous supposons le milieu homogène, ce seront des constantes.

Le nombre des coefficients se réduit notablement quand le milieu possède dans son état naturel certains éléments de symétrie. Il se réduit à deux pour un milieu homogène et isotrope.

Réduction des coefficients à deux dans un milieu homogène et isotrope. — Considérons un cube élémentaire dont les arêtes sont parallèles aux axes coordonnés, et supposons que la seule déformation de ce cube consiste d'abord en une dilatation a_1 dans la direction Ox.

Il n'y a aucune raison pour qu'il se produise des efforts tan-

Fig. 178.



gentiels sur les faces, puisque leurs angles mutuels ne sont pas altérés. Donc *a priori* on peut dire que les tensions tangentielles T ne dépendent pas des dilatations suivant les axes.

En ce qui concerne les tensions normales, elles seront proportionnelles à a_1, mais le coefficient de proportionnalité sera différent pour N_1 qui est parallèle à la dilatation a_1 et pour les deux autres qui lui sont perpendiculaires. On pourra donc poser

$$N_1 = A a_1,$$
$$N_2 = N_3 = B a_1.$$

On raisonnerait de même pour chacune des dilatations a_2 et a_3, les coefficients de proportionnalité A et B demeurant les mêmes en vertu de l'homogénéité et de l'isotropie supposées de la matière.

En superposant ces trois dilatations, on obtiendra des expressions de la forme

$$(13)\quad \begin{cases} N_1 = Aa_1 + B(a_2 + a_3) = \lambda\theta + 2\mu a_1, \\ N_2 = Aa_2 + B(a_3 + a_1) = \lambda\theta + 2\mu a_2, \\ N_3 = Aa_3 + B(a_1 + a_2) = \lambda\theta + 2\mu a_3, \end{cases} \qquad T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

Supposons maintenant que le cube soit déformé par le seul glissement $2b_3$, qui fait glisser la face BDGE sur elle-même. Cette déformation ne peut provoquer de tensions normales. Elle ne peut influer que sur T_3, action tangentielle qui s'exerce sur la face BDGE parallèlement à la direction BD de son glissement. On raisonnerait de même pour les deux autres glissements, de sorte que, en superposant les trois glissements, on sera conduit aux formules suivantes :

$$(14)\qquad N_1 = N_2 = N_3 = 0 \qquad \begin{cases} T_1 = Gb_1, \\ T_2 = Gb_2, \\ T_3 = Gb_3. \end{cases}$$

Enfin, la déformation la plus générale conduira à la réunion des formules (13) et (14).

On démontre d'ailleurs que l'on a $G = 2\mu$. En effet, considérons, comme plus haut, l'effet du glissement simple $2b_3$. Il équivaut à une dilatation suivant la bissectrice OD et à une contraction suivant la bissectrice AB. La dilatation suivant OD s'obtient d'ailleurs en faisant $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\gamma = 0$ dans la formule générale (9) qui donne la dilatation linéaire et qui se réduit ici au terme en b_3. On trouve

$$a = 2b_3\alpha\beta = b_3.$$

De même, la contraction suivant AB serait $a' = -b_3 = -a$.

D'un autre côté, l'angle droit formé par les deux diagonales demeure droit après la déformation, le carré s'étant simplement transformé en losange, et on le vérifierait d'ailleurs facilement par la formule générale (10).

Dans ces conditions, les deux diagonales sont des directions principales dans la déformation considérée et les tensions N et N′ qui s'exercent sur les plans correspondants leur sont normales.

Enfin, dans cette déformation, on a $\theta = 0$, puisque

$$\theta = a_1 + a_2 + a_3,$$

et que tous ces termes sont supposés nuls.

On doit donc avoir entre N et a (comme d'ailleurs entre N′ et a') la relation simplifiée

$$N = \lambda\theta + 2\mu a = 2\mu a = 2\mu b_3.$$

La valeur de N est d'ailleurs facile à obtenir par la formule générale (5), qui se réduit ici à

$$N = 2T_3\alpha\beta = T_3,$$

les tensions autres que T_3 étant nulles d'après les formules (14). Il est donc nécessaire que T_3 soit lié à b_3 par la relation

$$T_3 = 2\mu b_3.$$

Cela exige que l'on ait $G = 2\mu$.

Si, maintenant, dans les formules résultant de la combinaison de (13) et (14), on remplace les a et b par leurs valeurs en fonction des dérivées des déplacements, on parvient aux formules suivantes :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, & T_1 &= \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),\\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, & T_2 &= \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right),\\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}, & T_3 &= \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, θ est la dilatation cubique et a pour valeur

$$(16)\qquad A = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Il en résulte la relation, très utile à connaître,

$$N_1 + N_2 + N_3 = (3\lambda + 2\mu)\theta.$$

Les deux coefficients λ et μ qui subsistent dans les relations précédentes sont appelés *coefficients de Lamé*. Ces relations sont elles-mêmes souvent désignées sous le nom d'*équations de Lamé*.

Réduction des deux coefficients à un seul dans le cas des corps isotropes. — Divers savants, et notamment Navier, Poisson, Cauchy et de Saint-Venant, ont démontré que l'on devait avoir $\lambda = \mu$, dans le cas des corps isotropes, lorsqu'on suppose que les tensions intérieures résultent d'attractions entre les molécules de la matière et que celles-ci sont simplement fonctions de la distance entre ces molécules. Pour le détail de la controverse qui s'est élevée sur ce point, nous renvoyons à la longue Note que Saint-Venant a insérée dans son édition annotée de l'Ouvrage de Navier. On objectait que l'hypothèse faite au sujet de la constitution de la matière et des attractions de ses molécules n'était peut-être pas conforme à la nature des choses; mais on objectait surtout que la relation $\lambda = \mu$ conduisait à certaines conséquences en désaccord avec certains résultats d'expérience. Saint-Venant faisait observer, au contraire, que ces prétendus désaccords étaient en somme petits, de l'ordre de grandeur de ceux que l'on rencontre toujours quand on confronte une théorie avec l'expérience et qu'ils étaient fort explicables soit par des imperfections des méthodes expérimentales employées, soit par le défaut d'isotropie des échantillons observés.

Malgré tout, l'usage a prévalu de conserver les deux coefficients de Lamé, et nous nous y conformerons, malgré les complications que cet usage entraîne et dont l'utilité n'est pas bien démontrée. Dans beaucoup de recherches théoriques, uniquement destinées à mettre en évidence le sens des phénomènes et non leur mesure, il n'y aurait que des avantages, à notre avis, à accepter la simplification $\lambda = \mu$.

IV. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations générales d'équilibre élastique d'un corps. Nous avons trouvé précédemment les équations différentielles (2) auxquelles les tensions intérieures doivent satisfaire en tout point de l'intérieur d'un corps, et les équations (3) auxquelles elles doivent satisfaire en tout point de sa surface, et cela indépendamment de toute considération sur les déformations produites. Mais l'ensemble de ces conditions nécessaires n'est pas suffisant, en général, pour déterminer les six tensions inconnues.

Admettons maintenant que le corps soit élastique, ce qui veut dire, d'une part, que les déformations sont exprimables en fonction des dérivées partielles des déplacements et que les tensions intérieures sont elles-mêmes exprimables en fonction de ces mêmes dérivées partielles, conformément aux résultats qui viennent d'être obtenus. Dans ces conditions, nous pourrons transformer les équations générales d'équilibre en des équations différentielles par rapport aux trois seules fonctions inconnues u, v, w, et le problème deviendra déterminé.

Prenons, par exemple, la première équation générale d'équilibre (2) :

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + X_0 = 0.$$

En tenant compte des expressions de N_1, T_3, T_2 et θ, nous l'écrirons successivement

$$\lambda \frac{d\theta}{dx} + 2\mu \frac{d^2 u}{dx^2} + \mu \left[\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dx\,dy}\right] + \mu \left[\frac{d^2 w}{dx\,dz} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right] + X_0 = 0,$$

$$\lambda \frac{d\theta}{dx} + \mu \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dx\,dy} + \frac{d^2 w}{dx\,dz}\right] + \mu \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right] + X_0 = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta u + X_0 = 0$$

en représentant par le symbole ΔF l'opération

$$\Delta F = \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2}.$$

On opérerait de même pour les deux autres équations, de sorte qu'on obtiendra le système suivant :

$$(A) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dx} + \mu \Delta u + X_0 = 0, \\ &(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dy} + \mu \Delta v + Y_0 = 0, \\ &(\lambda + \mu) \frac{d\theta}{dz} + \mu \Delta w + Z_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations sont les équations générales *d'équilibre élastique*. On les appelle aussi les équations *indéfinies* d'équilibre pour rappeler qu'elles sont applicables en tout point du corps.

Quant aux équations d'équilibre à la surface (3), on pourrait

de la même façon les transformer et l'on remplacerait, par exemple, la première d'entre elles par celle-ci :

$$X = \lambda\theta\alpha + \mu\left[2\alpha\frac{du}{dx} + \beta\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\right].$$

On aurait ainsi trois équations différentielles auxquelles u, v, w doivent satisfaire sur la surface limite du corps considéré. On les appelle les *équations à la surface*. Mais habituellement nous les considérerons sous leur forme primitive, plus facile à retenir, et nous les écrirons ici

$$(B)\qquad \begin{cases} X = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ Y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ Z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma, \end{cases}$$

étant entendu que les N, T sont exprimables en fonction des dérivées partielles de u, v, w et que X, Y, Z sont les composantes de la force extérieure.

Remarque. — Lorsqu'on a quelque intérêt à faire correspondre des compressions aux valeurs positives de $N_1 N_2 N_3$, il faut se rappeler que cela revient à inverser tous les signes des tensions, de manière à considérer celles qui s'exercent sur les faces négatives des éléments plans. On arrive au même résultat en changeant dans les équations (A) les signes de $X_0 Y_0 Z_0$, et en prenant dans les équations (B), pour α, β, γ, les cosinus directeurs de la demi-normale qui est dirigée vers l'intérieur de la surface.

Remarque sur les solutions des équations de l'équilibre élastique. — Le système des équations (A) forme un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. On démontre, en Analyse, qu'il admet une solution générale dans laquelle interviennent six fonctions arbitraires.

Ces six fonctions arbitraires devront satisfaire aux trois équations à la surface (B). Mais cela ne suffit pas encore à déterminer entièrement les fonctions u, v, w. Cela tient évidemment à ce que le corps, dans son état déformé, peut occuper une situation quelconque dans l'espace et qu'on peut ajouter à u, v, w des termes arbitraires représentant le déplacement le plus général d'un corps solide, c'est-à-dire une translation et uue rotation arbitraires. Mais

si l'on fait abstraction de ce déplacement d'ensemble, on peut dire que le problème est entièrement déterminé. On le démontre de la façon suivante.

Supposons qu'on ait trouvé un système de fonctions u, v, w satisfaisant à la fois aux équations (A) et aux équations (B). Il représentera un état élastique *possible*, et ce système sera même le *seul* possible.

Supposons, en effet, qu'il y ait une seconde solution $u'v'w'$, remplissant les mêmes conditions. Les différences $u'' = u - u'$, $v'' = v' - v$, $w'' = w' - w$ correspondraient à un troisième état d'équilibre élastique possible, mais dans lequel toutes les forces appliquées seraient nulles.

On aurait, en effet,

$$\theta'' = \theta' - \theta \qquad \text{et} \qquad \Delta u'' = \Delta u' - \Delta u, \qquad \ldots.$$

Les équations générales (A) donneraient

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta''}{dx} + \mu\,\Delta u'' = 0$$

et deux autres relations analogues. La troisième solution s'appliquerait donc à l'hypothèse $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$.

D'un autre côté, on aurait

$$N'' = N' - N \qquad \text{et} \qquad T'' = T' - T.$$

A la surface du corps, en particulier, on aurait

$$X'' = X' - X = 0$$

et deux autres relations analogues, de sorte que la troisième solution s'appliquerait à l'hypothèse où toutes les forces extérieures appliquées à la surface seraient nulles.

Ainsi, cette troisième solution $u''v'w''$ correspondrait à un état élastique résultant lui-même de forces extérieures nulles tant à l'intérieur du corps qu'à sa surface. Cet état élastique ne peut être que l'état naturel du corps. Autrement dit, on doit avoir $u'' = v'' = w'' = 0$, identiquement. Les deux solutions uvw et $u'v'w'$ doivent, par suite, se confondre.

Ce raisonnement ne suppose pas nécessairement qu'il n'y a aucune action moléculaire dans l'état naturel, mais simplement

que les actions moléculaires développées par un système de forces extérieures, seules en question ici, disparaissent avec ces forces elles-mêmes, condition impliquée par la notion d'état élastique.

Remarque. — On est parfois amené à considérer des problèmes dans lesquels, au lieu d'avoir comme données les forces extérieures qui s'exercent à la surface du corps, on se pose la condition que la surface ne se déforme pas, ou bien se déforme d'une manière donnée à l'avance. Dans ces conditions, les fonctions arbitraires contenues dans la solution générale des équations (A) se déterminent par identification. Les équations (B) ne jouent plus aucun rôle, si ce n'est pour trouver après coup les réactions inconnues de la surface.

Réduction des équations générales. Disparition des composantes X_0, Y_0, Z_0. — Lamé a fait remarquer que l'on pouvait, en général, faire abstraction des termes en X_0, Y_0, Z_0 dans les équations (A), et il en a donné deux raisons.

La première consiste en ce que, dans les corps solides et rigides, les intensités des forces extérieures appliquées aux éléments de volume sont la plupart du temps petites et négligeables au regard des intensités des forces appliquées à la surface de ces corps ou au regard des tensions intérieures. Il y a cependant des cas où il en est autrement.

La seconde raison consiste en ce que les équations sont linéaires et que leur solution générale se composera toujours par l'addition d'une solution particulière u_0, v_0, w_0 des équations complètes avec la solution générale des mêmes équations privées des termes en X_0, Y_0, Z_0.

Or, il est presque toujours possible de trouver à part la solution particulière u_0, v_0, w_0 dont on a besoin. En effet, le plus souvent X_0, Y_0, Z_0 se réduisent aux composantes de la pesanteur. Plus généralement, on peut supposer qu'elles proviennent d'attractions ou de répulsions émanant de centres extérieurs fixes et suivant la loi de l'inverse du carré des distances. Plus généralement encore, elles peuvent être supposées égales aux dérivées partielles d'une même fonction F_0, qui sera par exemple le potentiel de masses attirantes situées soit à l'extérieur, soit à l'intérieur du solide,

comme si celui-ci était par exemple électrisé point par point, suivant une distribution fixe.

Supposons donc

$$X_0 = \frac{dF_0}{dx}, \qquad Y_0 = \frac{dF_0}{dy}, \qquad Z_0 = \frac{dF_0}{dz},$$

et que F_0 soit une fonction telle que

$$F_0 = \int\int\int \frac{f(\alpha\beta\gamma)}{R}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Dans cette expression, $f(\alpha\beta\gamma)$ serait la densité électrique au point $\alpha\beta\gamma$, de sorte que $f(\alpha\beta\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ serait la masse attirante contenue dans l'élément de volume $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$.

On a d'ailleurs

$$R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

Posons maintenant

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\int\int\int f(\alpha\beta\gamma)\, R\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

et prenons

$$u_0 = k\frac{d\varphi_0}{dx}, \qquad v_0 = k\frac{d\varphi_0}{dy}, \qquad w_0 = k\frac{d\varphi_0}{dz},$$

k étant un coefficient indéterminé. Puis cherchons sous quelles conditions les équations générales seraient satisfaites par ces expressions.

On trouve d'abord

$$\Delta\varphi_0 = \frac{1}{2}\int\int\int f(\alpha\beta\gamma)\, \Delta R\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma = F_0.$$

En effet, on a, comme on sait,

$$\frac{dR}{dx} = \frac{x-\alpha}{R}, \qquad \frac{d^2R}{dx^2} = \frac{R^2-(x-\alpha)^2}{R^3}, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$\Delta R = \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2R}{dy^2} + \frac{d^2R}{dz^2} = \frac{3R^2 - R^2}{R^3} = \frac{2}{R}.$$

D'autre part, on a

$$\Delta u_0 = k \frac{d}{dx} \Delta\varphi_0 = k \frac{dF_0}{dx},$$

$$\Delta v_0 = k \frac{dF_0}{dy},$$

$$\Delta w_0 = k \frac{dF_0}{dz}$$

et enfin

$$\theta_0 = k \Delta\varphi_0 = k F_0.$$

La première équation générale d'équilibre s'écrit donc

$$(\lambda + \mu) k \frac{dF_0}{dx} + \mu k \frac{dF_0}{dx} + \frac{dF_0}{dx} = 0.$$

Elle est donc satisfaite, pourvu que l'on ait

$$(\lambda + \mu) k + \mu k + 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad k = -\frac{1}{\lambda + 2\mu}.$$

Il en sera alors de même pour les deux autres.

La solution particulière cherchée est donc

$$u_0 = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{d\varphi_0}{dx}, \qquad v_0 = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{d\varphi_0}{dy}, \qquad w_0 = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{d\varphi_0}{dz}.$$

On en déduirait

$$\theta_0 = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} F_0.$$

Quant aux composantes des tensions, on les obtiendrait par des expressions de la forme

$$N_1 = \lambda\theta_0 + 2\mu \frac{du_0}{dx} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} F_0 - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2\varphi_0}{dx^2},$$

$$T_3 = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2\varphi_0}{dx\,dy}.$$

Les dérivées secondes de φ_0 qui figurent dans ces expressions peuvent d'ailleurs se calculer directement sans passer par l'intermédiaire de la fonction φ_0 elle-même, ce qui est parfois avantageux.

Si en particulier X_0, Y_0, Z_0 étaient des constantes a, b, c, il faudrait supposer des masses attirantes rejetées à l'infini. Mais on évite toute complication en prenant dans ce cas, comme solution

particulière, $F_0 = ax + by + cz$ avec

$$u_0 = -\frac{ax^2}{2(\lambda+2\mu)}, \qquad v_0 = -\frac{by_0}{2(\lambda+2\mu)}, \qquad w_0 = -\frac{cz^2}{2(\lambda+2\mu)}.$$

On a, en effet,

$$\theta_0 = -\frac{1}{\lambda+2\mu}(ax+by+cz);$$

$$\Delta u_0 = -\frac{a}{\lambda+2\mu}, \qquad \Delta v_0 = -\frac{b}{\lambda+2\mu}, \qquad \Delta w_0 = -\frac{c}{\lambda+2\mu},$$

et l'on vérifie facilement que les équations générales sont bien satisfaites.

On trouve, pour les composantes des tensions,

$$N_1 = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(ax+by+cz) - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}ax,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

Nous traiterons plus loin un autre cas, celui où il s'agit d'un massif illimité dans tous les sens et où X_0, Y_0, Z_0 sont nuls en général, sauf dans une région limitée.

Caractères généraux des solutions des équations générales réduites. — Différentions les trois équations générales réduites respectivement par rapport à x, y et z et ajoutons-les, il viendra

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{d^2\theta}{dy^2}+\frac{d^2\theta}{dz^2}\right)+\mu\left[\frac{d}{dx}\Delta u+\frac{d}{dy}\Delta v+\frac{d}{dz}\Delta w\right]=0,$$

équation qui revient à

$$(16) \qquad (\lambda+2\mu)\Delta\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\theta = 0.$$

Telle est la condition à laquelle doit nécessairement satisfaire la dilatation cubique.

Reprenons les trois équations générales et appliquons à la première les différentiations marquées par le symbole

$$\Delta = \frac{d}{dx^2}+\frac{d}{dy^2}+\frac{d}{dz^2},$$

nous obtiendrons

$$(\lambda+\mu)\frac{d}{dx}\Delta\theta + \mu\Delta\Delta u = 0$$

ou

$$\Delta\,\Delta u = 0. \tag{17}$$

On obtiendrait des conditions semblables pour v et w.

Enfin, si l'on observe que les composantes N et T des tensions sont des fonctions linéaires à coefficients constants des dérivées partielles de u, v, w, il s'ensuit encore que ces composantes N et T vérifient également l'équation

$$\Delta\,\Delta\mathfrak{p} = 0.$$

Tel est donc le caractère général des fonctions qui expriment, soit les composantes du déplacement moléculaire, soit les composantes des tensions dans un corps solide isotrope, lorsqu'il est en équilibre d'élasticité, en négligeant les forces appliquées à sa masse. Ces conditions sont appelées *conditions de Lamé*.

Il est à remarquer que

$$N_1 + N_2 + N_3 = (3\lambda + 2\mu)\theta$$

et que, par suite, cette somme satisfait comme θ à la condition plus simple

$$\Delta(N_1 + N_2 + N_3) = 0.$$

On peut généraliser ces résultats et les appliquer même aux équations complètes toutes les fois que l'on a

$$X_0 = \frac{dF_0}{dx}, \qquad Y_0 = \frac{dF_0}{dy}, \qquad Z_0 = \frac{dF_0}{dz}$$

et que F_0 se trouve être elle-même une fonction satisfaisant à la condition $\Delta F_0 = 0$. On a en effet, dans le cas des équations complètes, en reprenant les mêmes calculs que plus haut,

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta\theta \quad + \Delta F_0 = 0,$$
$$(\lambda + \mu)\frac{d}{dx}\,\Delta\theta + \mu\,\Delta\Delta u + \Delta X_0 = 0.$$

Il suffit donc que $\Delta F_0 = 0$ pour que les mêmes résultats subsistent. On arrive à la même conclusion en remarquant qu'il suffit d'obtenir ces résultats pour une solution particulière $u_0\, v_0\, w_0\, \theta_0$ des équations complètes. C'est le cas ordinaire, et notamment celui où X_0, Y_0, Z_0 sont des constantes,

Indications sur les solutions des équations générales réduites.— Les équations générales réduites sont toujours les mêmes, quel que soit le problème particulier que l'on envisage. Si leur solution générale était connue et susceptible d'être introduite dans des calculs, il suffirait en principe de disposer des fonctions arbitraires qu'elle contient pour que les équations à la surface soient satisfaites, lorsqu'on lui ajoute la solution particulière obtenue pour les équations générales complètes. Mais cette solution échappe à l'analyse par sa trop grande généralité. Aussi en est-on réduit à composer dans chaque cas, en s'inspirant des circonstances, des solutions particulières, et à les combiner par voie d'addition de manière à composer des solutions de plus en plus générales permettant de satisfaire aux conditions à la surface soit exactement, soit d'une manière approchée.

La recherche de ces solutions particulières est intimement liée, d'après ce que nous avons vu, à la résolution des équations des types (16) et (17) :

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta\Delta\varphi = 0.$$

On connaît des classes très étendues de fonctions satisfaisant à ces équations.

Lamé a remarqué que la première était satisfaite par toute fonction potentielle de la forme

$$F = \int\int\int \frac{f(\alpha\beta\gamma)}{R}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

dans laquelle $f(\alpha\beta\gamma)$ est une fonction quelconque, représentant la densité d'une masse attirante placée au point $\alpha\beta\gamma$ et où $R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$. Si tous les points α, β, γ sont contenus dans un domaine extérieur au solide considéré, on a en tout point de celui-ci

$$\Delta F = 0.$$

Si le domaine des points α, β, γ comprenait le solide, on aurait $\Delta F = -4\pi f(xyz)$.

Cela posé, Lamé a montré que la seconde équation $\Delta\Delta\varphi = 0$ était vérifiée par l'intégrale triple

$$\varphi = \frac{1}{2}\int\int\int f(\alpha\beta\gamma)\, R\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

On trouve en effet, en recommençant un calcul déjà fait plus haut,

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\int\int\int f(\alpha\beta\gamma)\,\Delta R\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma = F$$

et, par suite,

$$\Delta\,\Delta\varphi = \Delta F = 0.$$

Les fonctions telles que φ ont été, d'après Lamé, appelées *potentiels directs*, ou *potentiels de seconde espèce*, par opposition aux fonctions F, qui sont des potentiels ordinaires.

Pour trouver une solution particulière, on peut donc choisir θ parmi les potentiels ordinaires de masses attirantes extérieures, et u, v, w parmi les potentiels de seconde espèce. Mais il est bien évident que ces quatre fonctions ne sont pas indépendantes, puisque d'une part elles doivent satisfaire aux trois équations générales, et que d'autre part on doit avoir la relation

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

On ne peut même pas choisir θ d'une manière tout à fait arbitraire parmi les potentiels ordinaires. En effet, θ étant choisi, on pourrait bien, au moins en théorie, trouver trois fonctions u, v, w satisfaisant respectivement aux trois équations générales. La première de celles-ci donne, en effet,

$$\Delta u = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\theta}{dx},$$

et ce serait le potentiel d'une distribution fixe de masses attirantes, ayant en chaque point pour densité $\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\frac{d\theta}{dx}$. Mais la relation

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

ne s'ensuivrait pas nécessairement.

On en est donc réduit à composer par tâtonnement certaines solutions simples, qu'on utilise au mieux des circonstances, après avoir reconnu leurs caractères particuliers. En voici quelques exemples :

1° Supposons qu'on essaye une solution de la forme

$$u = k\frac{d\varphi}{dx}, \qquad v = k\frac{d\varphi}{dy}, \qquad w = k\frac{d\varphi}{dz},$$

k étant une constante. On en déduira

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = k\,\Delta\varphi.$$

D'autre part, on a

$$\Delta u = k\frac{d}{dx}\Delta\varphi.$$

La première équation générale exige alors que l'on ait

$$k(\lambda + 2\mu)\frac{d}{dx}\Delta\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dx}\Delta\varphi = 0.$$

Les deux autres équations fourniraient de même les conditions

$$\frac{d}{dy}\Delta\varphi = 0, \qquad \frac{d}{dz}\Delta\varphi = 0,$$

de sorte qu'une solution de cette forme exige que $\Delta\varphi$ soit une constante. Il en est alors de même de θ. Ces conditions peuvent convenir dans certains cas, comme nous le verrons, et il en résulte des simplifications notables.

2° Lamé a montré que toute fonction de la forme

$$\varphi = A e^{r(z-c)} \cos p(x-a) \cos q(y-b)$$

satisfait à la condition $\Delta\varphi = 0$ et que toute fonction de la forme

$$\varphi = [A + B(z-c)]\, e^{r(z-c)} \cos p(x-a) \cos q(y-b)$$

satisfait à la condition $\Delta\Delta\varphi = 0$, a, b, c, p, q, r, A, B étant des constantes, pourvu que l'on ait la relation

$$r^2 = p^2 + q^2.$$

Il est bien évident qu'il en est de même pour une somme de semblables fonctions, et qu'il en serait encore de même si l'un des cosinus (ou tous les deux) était remplacé par un sinus, et enfin qu'il en serait de même si l'on permutait z en x par exemple, en permutant en même temps r et p.

Pour simplifier, on peut supposer que l'origine des coordonnées

soit portée au point (abc). On a alors, pour la première fonction,

$$\varphi = A\, e^{rz} \cos px \cos qy.$$

Un calcul des plus faciles montre que l'on a alors

$$\Delta\varphi = A(r^2 - p^2 - q^2)\varphi.$$

On aura donc bien $\Delta\varphi = 0$ si $r = \pm\sqrt{p^2+q^2}$.

En ce qui concerne la deuxième fonction, il est évident que son terme facteur de A reproduit simplement la première et qu'il suffit de s'occuper du terme en B, qui s'écrit

$$\varphi' = B(z\varphi).$$

Or on a

$$\frac{d(z\varphi)}{dz} = \varphi + z\frac{d\varphi}{dz},$$

$$\frac{d^2(z\varphi)}{dz^2} = 2\frac{d\varphi}{dz} + z\frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

On trouvera donc

$$\Delta\varphi' = z\,\Delta\varphi + 2\frac{d\varphi}{dz} = z\,\Delta\varphi + 2r\varphi = 2r\varphi.$$

Par suite,

$$\Delta\,\Delta\varphi' = 2r\,\Delta\varphi = 0,$$

toujours sous la même condition $r^2 = p^2 + q^2$.

Voyons maintenant comment on peut constituer une solution simple en partant d'une valeur telle que

$$\theta = A\, e^{rz} \cos px \cos qy.$$

Pour que la première équation générale soit satisfaite, on doit avoir

$$\Delta u = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\theta}{dx} = \frac{\lambda+\mu}{\mu} A\, p\, e^{rz} \sin px \cos qy.$$

Par suite, on peut prendre pour u une expression telle que

$$u = \frac{\lambda+\mu}{\mu} A \frac{pz}{2r} e^{rz} \sin px \cos qy + L\, e^{rz} \sin px \cos qy,$$

L étant une constante arbitraire, car le second terme satisfait à l'équation

$$\Delta\varphi = 0.$$

On trouverait de même

$$v = \frac{\lambda+\mu}{\mu} A \frac{qz}{2r} e^{rz} \cos px \sin qy + M e^{rz} \cos px \sin qy,$$

$$w = -\frac{\lambda-\mu}{\mu} A \frac{rz}{2r} e^{rz} \cos px \cos qy + N e^{rz} \cos px \cos qy,$$

M et N étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Il faut maintenant satisfaire à la relation

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Or, on a

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu} A \frac{p^2 z}{2r} + Lp \right] e^{rz} \cos px \cos qy,$$

$$\frac{dv}{dy} = \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu} A \frac{q^2 z}{2r} + Mq \right] e^{rz} \cos px \cos qy,$$

$$\frac{dw}{dz} = \left[-\frac{\lambda+\mu}{\mu} A \frac{r^2 z}{2r} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{A}{2} + Nr \right] e^{rz} \cos px \cos qy.$$

En faisant la somme, les termes contenant $p^2 q^2 r^2$ se détruisent puisque $r^2 = p^2 + q^2$, de sorte que la condition d'identification se réduit à

$$Lp + Mq + Nr - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{A}{2} = A$$

ou

$$Lp + Mq + Nr = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu} A,$$

ce qui détermine A en fonction de $Lp + Mq + Nr$. En remplaçant A par sa valeur dans les expressions de u, v, w et θ, on aurait une solution simple sous une forme entièrement explicite. Cette solution renferme cinq constantes arbitraires, savoir : p et q d'une part, et L, M, N d'autre part.

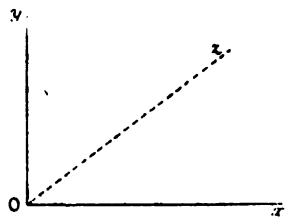
On peut en construire une infinité de semblables et les combiner par voie d'addition, en vue de satisfaire exactement ou approximativement aux conditions à la surface.

CHAPITRE XX.

ÉLASTICITÉ PLANE OU A DEUX DIMENSIONS.

Premier problème. Prisme indéfini. — Supposons que le corps élastique considéré soit un prisme ou un cylindre indéfini dont les génératrices soient parallèles à Oz (axes disposés comme ci-dessous) et supposons que toutes les forces extérieures, aussi bien celles qui sont appliquées aux éléments de volume que celles qui

Fig. 179.



sont appliquées aux éléments de surface latérale, soient contenues dans des plans perpendiculaires à Oz, et soient constantes tout le long de parallèles à Oz, c'est-à-dire soient indépendantes de la coordonnée z. On aura en particulier $Z_0 = 0$ pour tout élément de volume, et $Z = 0$ pour tout élément de surface latérale.

Par raison de symétrie, les composantes des déplacements et les composantes des tensions seront indépendantes de z, et l'on aura même $w = 0$.

Dans ces conditions, il n'y a plus que deux fonctions inconnues, u et v, fonctions de x et de y seulement, et la coordonnée z n'intervient pas dans leur détermination.

En effet, considérons d'abord les équations générales d'équilibre (A). La troisième d'entre elles se réduit à $\frac{d\theta}{dz} = 0$. Elle exprime que θ ne dépend pas de z, ce qui est, du reste, bien évident. L'expression de θ se réduit, du reste, à $\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$. Les deux

autres équations (A) sont indépendantes de z et les symboles Δ y ont simplement la signification $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$.

Quant aux équations sur la surface latérale, elles se réduisent aussi à deux, savoir

$$X = N_1\alpha + T_3\beta,$$
$$Y = T_3\alpha + N_2\beta.$$

En effet, on a $Z = 0$ et $\gamma = 0$. De plus, on a nécessairement partout $T_1 = T_2 = 0$, en vertu des expressions générales (15). Les tensions N_1, N_2, T_3 sont d'ailleurs évidemment exprimables, en vertu de ces mêmes équations, au moyen des seules dérivées partielles de u et v en fonction de x et y.

En ce qui concerne les composantes des tensions, il n'y en a plus, en réalité, que trois qui soient utiles à considérer, savoir : N_1, N_2, T_3. Nous venons de voir que $T_1 = T_2 = 0$. La sixième tension N_3 n'est pas nulle, mais elle est dépendante des trois premières. En effet, toujours en vertu des équations (15), on a

$$N_3 = \lambda\theta.$$

D'autre part, en vertu de la relation générale

$$N_1 + N_2 + N_3 = (3\lambda + 2\mu)\theta,$$

on déduit

$$(1) \qquad N_1 + N_2 = 2(\lambda + \mu)\theta = 2\frac{\lambda + \mu}{\lambda} N_3.$$

N_3 sera donc connu aussitôt que N_1 et N_2 le seront, et l'on peut même observer que l'inégalité $\frac{\lambda + \mu}{\lambda} > 1$ entraîne la suivante :

$$|N_1 + N_2| > 2|N_3|.$$

La valeur absolue de N_3 est inférieure à l'une au moins des valeurs absolues de N_1 et N_2. On peut donc en faire abstraction, au moins provisoirement.

Dans ces conditions, on peut généralement se passer de la considération des déplacements u et v, quand ils ne servent que d'intermédiaires pour la détermination des tensions. On peut, en effet, déterminer directement N_1, N_2, T_3.

Ces trois tensions satisfont d'abord aux deux équations générales d'équilibre conservées sous leur forme initiale (2) du

Chapitre précédent, lesquelles se réduisent à

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT_3}{dy} + X_0 = 0, \\ \dfrac{dT_3}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} + Y_0 = 0. \end{cases}$$

Ensuite, de la condition spéciale $\Delta(N_1 + N_2 + N_3) = 0$, établie dans le cas général, on déduit ici

$$(3)\qquad \Delta(N_1 + N_2) = 0.$$

En effet, d'après (1), la tension N_3 est proportionnelle à $N_1 + N_2$. On peut dire aussi que N_3 est proportionnel à θ, qui satisfait lui-même à la condition $\Delta\theta = 0$. Le symbole Δ a d'ailleurs ici la signification réduite indiquée plus haut, toutes les dérivées en z étant nulles.

On a donc, pour trouver les trois fonctions inconnues N_1, N_2, T_3, fonctions de x et de y seulement, un système de trois équations différentielles, auxquelles s'adjoindront, bien entendu, les équations à la surface écrites plus haut. *Les coefficients d'élasticité n'y interviennent pas. Il n'y a que la tension* N_3 *qui dépendra de ces coefficients.*

Il est essentiel de s'assurer qu'une solution quelconque des équations (2) et (3) correspond bien à un état élastique, c'est-à-dire que, s'il en est besoin, on pourra trouver deux fonctions u et v représentant les composantes des déplacements. Pour déterminer celles-ci, on a les trois équations suivantes, dans lesquelles on a $\theta = \dfrac{N_1 + N_2}{2(\lambda + \mu)}$:

$$2\mu\frac{du}{dx} = N_1 - \lambda\theta,$$

$$2\mu\frac{dv}{dy} = N_2 - \lambda\theta,$$

$$2\mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right) = 2T_3.$$

Ces trois équations sont compatibles.

En effet, de la dernière, différentiée par rapport à y, on tire :

$$2\mu\frac{d^2u}{dy^2} = 2\frac{dT_3}{dy} - 2\mu\frac{d^2v}{dx\,dy} = 2\frac{dT_3}{dy} - \frac{dN_2}{dx} + \lambda\frac{d\theta}{dx}.$$

Pour que cette équation soit compatible avec la première et permette de trouver une fonction u, il faut, puisque $\frac{d^2 u}{dx\,dy^2} = \frac{d^2 u}{dy^2\,dx}$, que l'on ait

$$\frac{d^2 N_1}{dy^2} - \lambda \frac{d^2 \theta}{dy^2} = 2\frac{d^2 T_3}{dx\,dy} - \frac{d^2 N_2}{dx^2} + \lambda \frac{d^2 \theta}{dx^2}.$$

Les termes en θ disparaissent à cause de la condition $\Delta\theta = 0$, et il reste comme condition

$$2\frac{d^2 T_3}{dx\,dy} - \frac{d^2 N_1}{dy^2} - \frac{d^2 N_2}{dx^2} = 0.$$

Or, cette condition est satisfaite si N_1, N_2, T_3 satisfont aux trois équations données. En effet, en différentiant les deux premières par rapport à x et y respectivement et en les ajoutant, on trouve :

$$2\frac{d^2 T_3}{dx\,dy} + \frac{d^2 N_1}{dx^2} + \frac{d^2 N_2}{dy^2} + \frac{dX_0}{dx} + \frac{dY_0}{dy} = 0.$$

Or si l'on suppose, comme on le fait toujours, que $\frac{dX_0}{dx} + \frac{dY_0}{dy} = 0$, cette équation est identique à la précédente, en tenant compte de ce que

$$\Delta(N_1 + N_2) = 0.$$

Il est utile, en second lieu, de montrer comment on pourra parvenir à une solution des équations données.

Supposons qu'on ait

$$X_0 = \frac{dF_0}{dx}, \qquad Y_0 = \frac{dF_0}{dy} \qquad \text{avec} \qquad \Delta F_0 = 0,$$

on trouvera d'abord une solution particulière en prenant

$$N_1^0 = -F_0, \qquad N_2^0 = -F_0, \qquad T_3^0 = \text{const.}$$

Il suffira ensuite d'envisager les équations réduites

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} = 0,$$
$$\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} = 0$$

avec

$$\Delta(N_1 + N_2) = 0.$$

Supposons trouvée une solution particulière de cette dernière

équation, on pourra en déduire les valeurs correspondantes de $N_1 - N_2$ d'une part, et de T_3 d'autre part, en opérant de la manière suivante.

Éliminons T_3 entre les deux équations d'équilibre, différentiées respectivement par rapport à x et y. Nous obtenons la relation

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} - \frac{d^2 N_2}{dy^2} = 0.$$

En utilisant les deux identités

$$2N_1 = (N_1 + N_2) + (N_1 - N_2),$$
$$2N_2 = (N_1 + N_2) - (N_1 - N_2),$$

cette relation devient

$$\Delta(N_1 - N_2) = \frac{d^2(N_1 + N_2)}{dy^2} - \frac{d^2(N_1 + N_2)}{dx^2}$$

et son second membre est entièrement connu.

En ce qui concerne T_3, on peut utiliser les relations déjà trouvées, savoir :

$$2\frac{d^2 T_3}{dx\,dy} = \frac{d^2 N_1}{dy^2} + \frac{d^2 N_1}{dx^2} = -\left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} + \frac{d^2 N_2}{dy^2}\right),$$

ou encore la relation suivante qu'on obtient, en différentiant la première équation d'équilibre par rapport à y, la seconde par rapport à x, et en les ajoutant :

$$\Delta T_3 = -\frac{d^2(N_1 + N_2)}{dx\,dy}. \tag{5}$$

Le second membre est encore une fonction connue.

Plus simplement, on pourra former des solutions particulières des deux équations réduites d'équilibre en posant

$$N_1 = \frac{d^2 H}{dy^2}, \qquad N_2 = \frac{d^2 H}{dx^2}, \qquad T_3 = -\frac{d^2 H}{dx\,dy},$$

H désignant une fonction arbitraire quelconque. Si l'on veut que la condition $\Delta(N_1 + N_2) = 0$ soit en outre remplie, il faut que H satisfasse à la condition $\Delta\Delta H = 0$.

On voit donc que les solutions sont toujours intimement liées à la solution générale des équations différentielles de la forme

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta\Delta\varphi = 0,$$

la dernière équivalant à ces deux autres :

$$\Delta\varphi = F \qquad \text{avec} \qquad \Delta F = 0.$$

Des solutions simples de la première équation seront fournies par toute expression de la forme $Ae^{qy}\sin px$, avec la condition $q^2 = p^2$, le sinus pouvant d'ailleurs être remplacé par un cosinus, et l'origine des coordonnées étant arbitraire.

Des solutions de la seconde équation seront, dans les mêmes conditions, fournies par toute expression de la forme

$$(A + By)\, e^{\pm py} \sin px.$$

Remarque sur certains problèmes relatifs à des prismes limités. — Supposons qu'au lieu d'avoir un prisme indéfini dans le sens Oz on ait un prisme limité, toutes les conditions imposées aux forces extérieures appliquées aux éléments de volume ou à la surface latérale demeurant les mêmes. Il pourra arriver que la solution correspondant au prisme indéfini demeure applicable.

Il en sera ainsi toutes les fois que l'on pourra maintenir en place les bases du prisme limité en faisant intervenir, sur ces bases, des réactions convenables. Sur la base tournée vers Oz, ces réactions seraient précisément égales et opposées aux valeurs de N_3.

Il sera même permis d'ajouter à N_3 une constante indéterminée. Nous verrons plus loin que, lorsqu'on exerce sur les bases d'un prisme une traction, ou une compression, uniforme, les tensions N_1, N_2, T_3 sont nulles. Il suffit alors d'appliquer le principe de superposition. On peut reconnaître d'ailleurs que la théorie précédente n'implique pas nécessairement l'existence de la relation (1). Il suffit, d'une part, que l'on ait $\frac{d\theta}{dz} = 0$, et, d'autre part, une relation linéaire entre N_3 et θ, ou, ce qui revient au même, entre N_3 et $N_1 + N_2$. Pour qu'il en soit ainsi, il n'est pas nécessaire de supposer w nul, ou constant, mais seulement linéaire en z. En effet, si l'on a

$$w = kz + k',$$

on a

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz} = \lambda\theta + 2\mu k = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(N_1 + N_2 + N_3) + 2\mu k,$$

et, d'autre part, $\Delta w = 0$, de sorte que la troisième équation générale d'équilibre (A) se réduit à $\frac{d\theta}{dz} = 0$.

Dans ces conditions, on a toujours $\Delta N_3 = 0$, et par suite

$$\Delta(N_1 + N_2) = 0.$$

Il faut observer que l'on n'aura plus ici d'une manière générale

$$|N_1 + N_2| > 2|N_3|,$$

car on a simplement

$$N_1 + N_2 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda} N_3 - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda} 2\mu k.$$

Toutefois, cela aura lieu encore au moins pour les valeurs négatives de k.

Second problème d'élasticité plane. Tranches minces. — Un problème un peu différent se présente lorsque, au lieu d'étudier un prisme de longueur indéfinie, on envisage au contraire une tranche mince isolée découpée dans ce prisme par deux plans normaux à l'axe Oz, et qu'il n'y a, d'autre part, aucune force appliquée aux deux bases.

Dans ces conditions, on est conduit à admettre que les déplacements u v et w sont peu variables avec z le long d'une perpendiculaire aux deux bases. Pour préciser, supposons que l'on ait pris pour plan xOy le plan moyen de la tranche mince, on aura pour ces fonctions des développements de la forme

$$u = u(xyO) + \frac{z}{1} u'(xyO) + \frac{z^2}{1.2} u''(xyO) + \ldots,$$

$$v = v(xyO) + \frac{z}{1} v'(xyO) + \frac{z^2}{1.2} v''(xyO) + \ldots,$$

$$w = w(xyO) + \frac{z}{1} w'(xyO) + \frac{z^2}{1.2} w''(xyO) + \ldots.$$

Si l'on regarde z comme infiniment petit, et si l'on s'en tient aux deux premiers termes de ces développements, on reconnaîtra que u et v doivent se réduire à leurs premiers termes, car, par raison de symétrie, u' et v' sont nuls. On les traitera donc comme de simples fonctions de x et de y. Il n'en est pas de même pour w,

qui doit être une fonction impaire en z. On aura

$$w(xyO) = w''(xyO) = 0 \qquad \text{et} \qquad w'(xyO) \not\equiv 0.$$

On en déduit

$$\frac{dw}{dz} = w'(xyO),$$

indépendant de z, au même degré d'approximation.

On retrouvera donc la condition $\frac{d\theta}{dz} = 0$.

On a d'ailleurs sur les deux bases identiquement

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz} = \lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{dw}{dz} = 0,$$

et, toujours au même degré d'approximation, cette relation sera valable sur toute l'épaisseur, puisqu'elle est indépendante de z. Il en résulte

$$(\lambda + 2\mu)\frac{dw}{dz} = -\lambda\left(\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dz}\right)$$

et

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right).$$

Dans ces conditions, la troisième équation générale d'équilibre (A), laquelle se réduit à $\Delta w = 0$, ne sert plus effectivement qu'à la détermination de w. Elle se trouve d'ailleurs remplacée par l'équation plus simple déterminant $\frac{dw}{dz}$ en fonction de $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$, ou en fonction de θ.

Il ne reste donc, comme précédemment, qu'à considérer les deux premières équations générales (A), pour déterminer les deux fonctions inconnues u et v, fonctions de x et y seuls. On leur adjoindra les deux premières équations à la surface, qui conservent encore la même forme réduite. La troisième équation à la surface, laquelle se réduit à

$$T_2\alpha + T_1\beta = 0,$$

n'est plus, à vrai dire, une identité; mais, au degré d'approximation admis, on a $T_1 = T_2 = 0$, car ces tensions sont nulles sur les deux bases, et d'ailleurs elles le sont aussi sur les plans médians. En tout cas, cette équation ne fait aucunement intervenir u et v,

mais seulement w, en vertu des équations (15) du Chapitre précédent.

Toutefois, il faut bien remarquer que la fonction θ qui figure dans les équations conservées n'est pas, comme dans le premier cas, égale à $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}$, mais égale à cette même expression multipliée par le coefficient $\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}$.

La solution analytique demeure la même en apparence, à ce détail près.

On peut encore se passer généralement de la considération de u et v, et déterminer directement N_1, N_2, T_3, qui sont encore, en vertu des équations (15), de simples fonctions de x et de y.

On a encore pour cela exactement les mêmes équations, savoir : les deux équations générales (2), conservées dans leur forme initiale, et l'équation (3)

$$\Delta(N_1+N_2)=0$$

qui résulte ici directement de l'hypothèse $N_3=0$.

Les coefficients d'élasticité λ et μ n'ont donc pas à intervenir dans la détermination des tensions N_1, N_2, T_3. Ils n'interviendront que si l'on veut, après coup, établir des rapprochements entre les composantes des tensions et celles des déplacements. Il faudra alors tenir compte de l'expression de θ, et l'on aura, par exemple,

$$N_1=\lambda\theta+2\mu\frac{du}{dx}=\left[\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}+2\mu\right]\frac{du}{dx}+\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{dv}{dy},$$

au lieu d'avoir simplement

$$N_1=(\lambda+2\mu)\frac{du}{dx}+\lambda\frac{dv}{dy}.$$

Tout se passe comme si le coefficient d'élasticité λ était changé et avait pour valeur effective

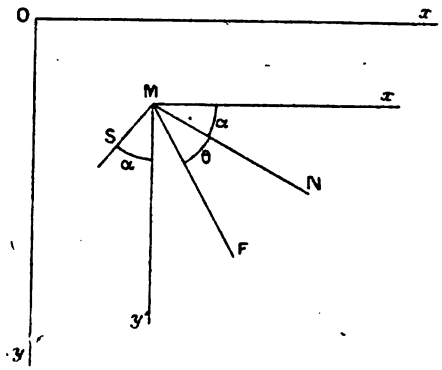
$$\lambda'=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\lambda.$$

Ce problème des tranches minces offre un premier exemple de solutions approximatives. Nous en rencontrerons plusieurs autres dans des questions d'un très haut intérêt.

Étude détaillée des tensions dans un milieu à deux dimensions.

— Si l'on suppose connues les trois fonctions N_1, N_2, T_3, qui définissent en chaque point les composantes utiles des tensions, on peut assez facilement poursuivre l'étude complète des conditions dans lesquelles se trouve placée la matière au point de vue des efforts.

Fig. 180.



Nous rappelons, une fois pour toutes, que l'on fait abstraction de N_3, soit parce qu'il est nul comme dans le second problème, soit parce que sa valeur absolue est inférieure à celle de N_1 ou de N_2, dans le premier problème.

Soit un élément plan MS, dont la direction est définie par l'angle α que fait avec Ox sa normale *associée* MN. Par cette expression, il faut entendre ici : 1° que sur MN la direction positive est celle qui va de M vers N, et 2° que, en conséquence, la direction positive sur l'élément MS lui-même sera celle qui va de M vers S et qui fait avec Ox l'angle $\frac{\pi}{2} + \alpha$, ou encore qui fait avec Oy l'angle α.

Dans ces conditions, si l'on appelle X et Y les composantes de l'effort F qui s'exerce sur la face de MS qui regarde vers N, on a les formules générales

$$X = N_1 \cos\alpha + T_3 \sin\alpha,$$
$$Y = T_3 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha.$$

Si l'on désigne par N et T les projections de F respectivement sur les directions positives MN (cosinus directeurs $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$) et MS (cosinus directeurs $-\sin\alpha$ et $\cos\alpha$), on a aussi les formules

absolument générales

$$N = N_1 \cos^2\alpha + N_2 \sin^2\alpha + 2T_3 \sin\alpha\cos\alpha,$$
$$T = (-N_1 + N_2)\sin\alpha\cos\alpha + T_3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

En introduisant l'angle 2α, on peut encore écrire ces dernières formules :

$$N = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\alpha + T_3 \sin 2\alpha,$$
$$T = \frac{N_2 - N_1}{2}\sin 2\alpha + T_3 \cos 2\alpha.$$

Avant d'aller plus loin, il est utile de remarquer que ces formules demeureraient toutes les mêmes si, afin de considérer comme positives les compressions, on avait déterminé N_1, N_2, T_3 d'après les équations générales, en renversant les signes de X_0 Y_0, de manière à leur faire représenter les efforts s'exerçant respectivement sur les faces négatives des éléments parallèles aux axes Ox et Oy. Bien entendu, dans ce cas, l'effort F serait lui-même supposé s'exerçant sur la face négative de MS, celle qui est à l'opposé de la normale MN.

Il est utile aussi de se rendre compte que, si l'on fait $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dans la formule qui donne T, on trouve pour l'élément plan MS, dans le prolongement de x'M,

$$T = -T_3,$$

de sorte que, si T_3 est positif, il sera porté dans la direction Ox, comme cela doit être.

a. Directions des tensions principales. — Quand F est une tension principale, sa composante normale N est maxima ou minima ou, ce qui revient exactement au même, d'après les expressions de N et de T, sa composante tangentielle T doit être nulle. L'angle α qui lui correspond s'obtient donc en égalant à zéro l'une ou l'autre des expressions données pour T.

Si l'on prend la première, on trouve, en divisant par $\cos^2\alpha$,

$$T_3 \operatorname{tang}^2\alpha + (N_1 - N_2)\operatorname{tang}\alpha - T_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{N_2 - N_1 \pm \sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}}{2T_3},$$

formule qui est souvent utile.

Elle fournit notamment l'équation différentielle des lignes dites *isostatiques* qui, par définition, *ont en chaque point leur tangente dirigée suivant une des tensions principales.* Il suffit, en effet, de remplacer dans la formule le coefficient angulaire tang α de la tension principale par $\frac{dy}{dx}$.

Si l'on prend la seconde expression de T, qui est la plus simple, on obtient

$$\tang 2\alpha = \frac{2T_3}{N_1 - N_2}.$$

Le second membre est positif ou négatif, suivant les signes de T_3 et de $N_1 - N_2$. Mais il y a toujours une solution, que nous désignerons par β, et telle que 2β soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, telle par conséquent que β soit compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$.

On aurait une seconde solution utile, correspondant à l'autre direction principale, en prenant

$$2\beta' = 2\beta + \pi \qquad \text{ou} \qquad \beta' = \beta + \frac{\pi}{2}.$$

Toutes les autres solutions n'en différeront que par des multiples de $\frac{\pi}{2}$.

Si l'on avait exceptionnellement $N_1 - N_2 = 0$, on aurait pour β et β' les valeurs $\pm\frac{\pi}{4}$. Les tensions principales s'exerceraient sur les plans bissecteurs des axes.

b. Valeurs des tensions principales. — Nous appellerons première tension principale celle qui correspond à l'angle β et qui fait ainsi avec Ox un angle inférieur à $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue. Elle se trouvera toujours associée à N_1, et nous la désignerons par la lettre a.

La seconde tension principale, désignée par la lettre b, fera avec Ox l'angle $\beta' = \beta + \frac{\pi}{2}$ et sera associée à N_2.

On trouvera les expressions de a et b en faisant α égal, soit à β, soit à β' dans la seconde expression de N.

On a d'ailleurs $\cos 2\beta' = -\cos 2\beta$ et $\sin 2\beta' = -\sin 2\beta$:

$$\operatorname{tang} 2\beta = \operatorname{tang} 2\beta' = \frac{2T_3}{N_1 - N_2}.$$

En substituant d'abord β, on trouve

$$a = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\beta + T_3 \sin 2\beta.$$

En remplaçant T_3 par sa valeur en fonction de β, on a la formule générale

$$a = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2}(\cos 2\beta + \sin 2\beta \operatorname{tang} 2\beta)$$
$$= \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2}\frac{1}{\cos 2\beta}.$$

D'autre part, on a, puisque 2β est compris entre $\pm\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{\cos 2\beta} = +\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\beta} = \pm\frac{\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}}{N_1 - N_2}.$$

Il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que $N_1 - N_2$ est positif ou négatif. On obtient donc finalement, dans les mêmes conditions :

$$a = \frac{N_1 + N_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}.$$

On obtiendra de même la valeur de b en inversant les signes de $\sin 2\beta$ et $\cos 2\beta$ dans l'expression initiale, de sorte que l'expression finale obtenue pour a convient encore pour b, à condition de prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que $N_1 - N_2$ sera négatif ou positif.

Dans le cas particulier où l'on aurait $N_1 - N_2 = 0$, ces expressions se simplifient et l'on a simplement pour les tensions principales, orientées comme on l'a vu à 45° par rapport à Ox et Oy, l'expression double a ou $b = N_1 \pm T_3$, le signe à prendre pour a étant déterminé par celui de l'angle $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$.

Il peut même arriver que l'on ait $N_1 = N_2 = 0$. Dans ce cas, les tensions principales, toujours orientées à 45° sur les axes, ont pour valeur $\pm T_3$. Elles sont égales en valeur absolue à T_3.

Si l'on n'a aucune raison de distinguer les deux tensions prin-

cipales l'une de l'autre, on voit aisément qu'elles sont toutes les deux racines d'une même équation du second degré, qui s'écrit, en désignant l'inconnue par F,

$$\left(F - \frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2]$$

ou, en simplifiant,

$$F^2 - (N_1 + N_2)F + (N_1 N_2 - T_3^2) = 0.$$

On en déduit que

$$a + b = N_1 + N_2,$$
$$ab = N_1 N_2 - T_3^2 :$$

autrement dit, que $N_1 + N_2$ et $N_1 N_2 - T_3^2$ sont des invariants pour tout groupe de deux plans perpendiculaires tels que le sont Ox et Oy.

On en déduit encore cet autre résultat utile :

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (N_1 + N_2)^2 + 4T_3^2.$$

Ces différents résultats s'obtiennent du reste facilement en partant des expressions de a et de b.

Les tensions principales sont utiles à considérer en elles-mêmes, parce que c'est d'elles que dépend la plus grande fatigue de la matière soit à la traction, soit à la compression. La discussion qu'on en devra faire dépendra d'ailleurs de la nature du milieu considéré, et aussi de la convention faite sur les signes des tensions.

Supposons, par exemple, que l'on regarde comme positives les compressions et qu'il s'agisse d'un matériau, tel que la maçonnerie, qui soit considéré comme incapable de supporter des efforts de tension.

Il faudra d'abord que a et b soient positifs. Cela exige que ab et $a + b$ le soient aussi. Il faut pour cela que

$$N_1 > 0, \qquad N_2 > 0$$

et que

$$N_1 N_2 - T_3^2 > 0.$$

Ensuite, si $N_1 > N_2$, la valeur de la plus grande compression sera a. Dans le cas contraire, ce serait b.

D'un autre côté, les tensions principales peuvent servir avanta-

geusement d'intermédiaires, soit en pratique, soit en théorie, pour la plupart des calculs et raisonnements se rapportant à d'autres quantités.

Si l'on prend pour axes de coordonnées deux droites parallèles aux tensions principales, en faisant correspondre à Ox celle qui est définie par l'angle aigu β, et à Oy celle qui est définie par l'angle $\beta + \frac{\pi}{2}$, et si l'on désigne par ω l'angle que fait la normale MN avec la première direction principale, on aura

$$\omega = \alpha - \beta.$$

Cet angle ω est également celui que forme, avec la seconde direction principale, l'élément plan MS.

Cela posé, les composantes normale et tangentielle N et T ont dans le nouveau système des expressions simplifiées, qui sont évidentes et qui dérivent des expressions générales en faisant :

$$N_1 = a, \qquad N_2 = b, \qquad T_3 = 0.$$

Ce sont :

$$N = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\omega,$$

$$T = \frac{b-a}{2}\sin 2\omega.$$

c. Directions des plus grands efforts tangentiels T *et leur valeur.* — Puisque l'on a

$$T = \frac{b-a}{2}\sin 2\omega,$$

le maximum de T en valeur absolue correspondra à la condition $\sin 2\omega = \pm 1$, d'où

$$\omega = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Les plus grands efforts tangentiels correspondent donc aux deux plans bissecteurs des deux directions principales. Les normales à ces plans font avec Ox des angles

$$\gamma = \beta \pm \frac{\pi}{4}$$

et ces plans font eux-mêmes des angles égaux à γ avec l'axe Oy.

La valeur maxima de T a pour expression

$$T_{max} = \pm \frac{b-a}{2}$$

en fonction des tensions principales. Son expression en fonction de N_1, N_2, N_3 est par suite

$$T_{max} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}.$$

Quand on aura besoin de connaître non seulement la valeur absolue, mais aussi la direction de T, il faudra, bien entendu, avoir égard au signe de $\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$ d'après la situation du plan considéré par rapport à la première direction principale.

Quand il s'agit de matériaux pouvant résister aussi bien à des efforts de traction qu'à des efforts de compression, on admet généralement que T_{max} définit la fatigue de la matière au *cisaillement*, et que les plans pour lesquels il y a la plus forte tendance à la rupture sont précisément les plans bissecteurs des directions principales.

Si l'on trace, dans le milieu, des lignes telles que leur tangente en chaque point soit dirigée suivant le plan où l'effort tangentiel est maximum, ces lignes seront en quelque sorte les *lignes de rupture* possibles par *cisaillement simple*. Lorsqu'on aura tracé les lignes isostatiques dont la définition a été donnée plus haut et dont les tangentes sont en chaque point confondues avec les directions principales, on aura les lignes de rupture dont il s'agit en traçant tout simplement des courbes les coupant sous des angles de 45°.

d. Directions les plus exposées aux glissements; valeurs des cisaillements effectifs dans les milieux incapables de supporter des efforts de traction. — Quand un milieu est supposé incapable de supporter des efforts de traction, on est amené à faire intervenir, dans les conditions d'équilibre des éléments pressés les uns contre les autres, le frottement mutuel qui s'exerce sur leurs surfaces de contact. Si l'on désigne par φ l'angle de frottement, caractéristique de la matière, on admet que l'équilibre est réalisé non pas quand la valeur maxima de T est inférieure à une certaine limite C, définissant la cohésion de la matière, mais aussitôt que

la condition

$$|T| - |N \operatorname{tang} \varphi| < C$$

est satisfaite pour un élément plan d'orientation quelconque. C'est la condition dite de Coulomb, que M. Résal a prise comme base de sa théorie des terres cohérentes.

Dans d'autres cas, on suppose que la limite C est nulle, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune cohésion, et la condition précédente se réduit à

$$|T| - |N \operatorname{tang} \varphi| < 0$$

ou

$$\left|\frac{T}{N}\right| < \operatorname{tang} \varphi.$$

Si l'on désigne par θ l'angle que fait l'effort F avec la normale MN à l'élément plan sur lequel il s'exerce, on a d'une manière générale

$$\frac{T}{N} = \operatorname{tang} \theta$$

et la condition qui précède peut encore s'écrire

$$\theta < \varphi$$

pour un élément d'orientation quelconque.

Nous allons examiner ces deux cas, le second n'étant évidemment qu'un cas particulier du premier.

1° *Massifs cohérents.* — Il convient d'étudier la valeur maxima que peut atteindre au point considéré l'expression

$$|T| - |N| \operatorname{tang} \varphi.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on regarde les compressions comme positives et que l'on ait $N_1 > N_2$, et par suite $a > b$.

Supposons aussi que l'angle ω, dont la valeur peut varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, soit d'abord pris positif. On aura dans ce cas

$$|T| = \frac{a-b}{2} \sin 2\omega,$$

$$|N| = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\omega$$

des angles égaux à

$$\beta \pm \omega_1.$$

Elles dépendent du rapport $\frac{a}{b}$, en chaque point.

En ce qui concerne l'expression du maximum de $\tang\theta$, on trouve facilement

$$\sin 2\omega_1 = \sqrt{1 - \cos^2 2\omega_1} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b},$$

$$a + b + (a - b)\cos 2\omega_1 = \frac{4ab}{a+b}.$$

Par suite,

$$\max \tang\theta = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}{N_1 N_2 - T_3^2}}.$$

On a un résultat un peu plus simple en envisageant le maximum de $\sin\theta$ en valeur absolue. On a en effet

$$\max \sin\theta = \pm \frac{\tang\theta}{\sqrt{1 + \tang^2\theta}} = \pm \frac{a-b}{a+b} = \pm \frac{\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}}{N_1 + N_2}.$$

La condition de stabilité, qui est ici

$$\max\theta < \varphi,$$

peut donc s'exprimer par l'inégalité

$$\frac{a-b}{a+b} < \sin\varphi$$

ou

$$(a+b)\sin\varphi - (a-b) > 0.$$

Il est bien évident que si l'on avait fait l'hypothèse $b > a$, il faudrait changer le signe du second terme et qu'on aurait une condition générale s'appliquant à tous les cas en écrivant l'inégalité sous la forme suivante :

$$(a+b)^2 \sin^2\varphi - (a-b)^2 > 0.$$

Si on la transforme pour y introduire N_1, N_2, T_3, elle devient

$$(N_1 + N^2)^2 \sin^2\varphi - [(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2] > 0.$$

C'est la condition de Rankine.

Il ne faut pas oublier qu'elle équivaut, en réalité, à la double

inégalité

$$\sin\varphi = \pm \frac{a-b}{a+b},$$

le signe + devant être adopté quand on a $a > b$, et le signe — dans le cas contraire.

Représentation graphique. — On peut trouver des représentations graphiques de ces résultats dans la considération de l'ellipse des tensions ou de la conique directrice des tensions. Mais la représentation la plus expressive et la plus simple en pratique est la suivante, dont le principe est dû à M. d'Ocagne.

Supposons que l'on connaisse au point M les trois composantes N_1, N_2, T_3 des tensions. Les composantes de l'effort F_1 s'exerçant sur l'élément plan Oy seront N_1 et T_3. Celles de l'effort F_2 s'exerçant sur Ox' $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ seront N_2 et $-T_3$.

Sur une droite indéfinie OX, portons $ON_1 = N_1$, et sur la perpendiculaire élevée en N_1 (le sens positif est défini par OY), portons $N_1F_1 = T_3$. Le vecteur OF_1 représentera F_1. Portons de même $ON_2 = N_2$ et $N_2F_2 = -T_3$, le vecteur OF_2 représentera F_2.

Cela posé, tirons F_1F_2. Cette droite coupera OX au point C, milieu de N_2N_1, et l'on aura évidemment, en grandeur et en signe,

$$OC = \frac{N_1 + N_2}{2},$$

$$CN_1 = -CN_2 = \frac{N_1 - N_2}{2}.$$

D'autre part, l'angle aigu $\widehat{F_1CN_1}$, compté à partir de CF_1 dans le sens des aiguilles d'une montre, représentera toujours, en grandeur et en signe, l'angle 2β, car on a en valeur absolue

$$\operatorname{tang}\widehat{N_1CF_1} = \frac{2T_3}{N_1 - N_2}$$

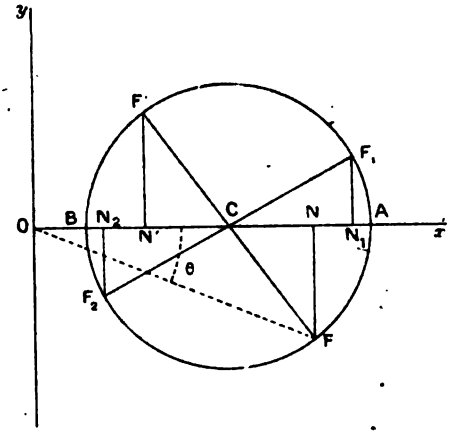
et la correspondance des signes est facile à vérifier dans les différents cas.

Si maintenant on décrit de C comme centre une circonférence avec CF_1 pour rayon, cette circonférence coupera OX en deux points A et B, le point A tombant par rapport à C du même côté que N_1 et le point B du côté de N_2.

Dans ces conditions, quelle que soit la disposition particulière de la figure, on aura

$$OA = a, \qquad OB = b.$$

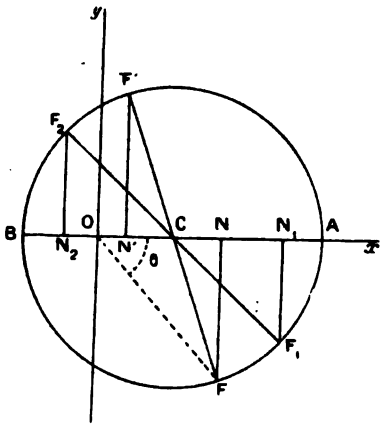
Fig. 181 (1).



Prenons, par exemple, le cas des figures (1) et (2), on aura toujours

$$OA = OC + CA.$$

Fig. 181 (2).



Or

$$OC = \frac{N_1 + N_2}{2} \qquad \text{et} \qquad CA = \frac{CN_1}{\cos 2\beta} = \frac{N_1 - N_2}{2\cos 2\beta}.$$

Par suite,

$$OA = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} \frac{1}{\cos 2\beta}.$$

De même on aurait

$$OB = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{N_1 - N_2}{2} \frac{1}{\cos 2\beta}.$$

Inversement, si l'on connaissait les deux vecteurs OA et OB qui représentent les tensions principales, ainsi que l'angle β que fait a avec la direction de l'axe OX, il suffirait de faire avec la direction CA un angle $\widehat{ACF_1} = -2\beta$, compté dans le sens des aiguilles d'une montre, pour trouver la position du point F_1 et en déduire N_1 et T_3.

D'une manière plus générale, si l'on veut déterminer les composantes N et T de l'effort F qui s'exerce sur un élément plan dont la normale fait un angle ω avec la direction de la tension principale a, on tracera la droite CF faisant avec OX l'angle 2ω, compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre. En abaissant la perpendiculaire FN, on aura évidemment

$$ON = OC + CN = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\omega = N,$$

$$NF = -\frac{a-b}{2} \sin 2\omega = T.$$

Le vecteur OF représentera l'effort $F = \sqrt{N^2 + T^2}$, et l'angle θ qu'il fait avec OX est tel que, compté de OF vers OA, le sens positif étant celui des aiguilles d'une montre, on ait $\operatorname{tang} \theta = \frac{T}{N}$.

Il est égal à l'angle que fait l'effort F avec la normale MN à l'élément plan sur lequel il s'exerce.

Si l'on rapporte les angles, non plus à la direction de la tension principale a, mais à la direction Ox, il faut, au lieu des angles ω, considérer les angles α liés aux premiers par la relation

$$\alpha = \omega + \beta,$$

et il est clair que l'angle FCF_1, compté à partir de CF_1, représente précisément 2α.

On peut retrouver facilement sur les figures (1) ou (2) tous les

résultats précédemment déduits des formules, et suivre pour ainsi dire à vue les variations de tous les éléments utiles à considérer.

On reconnaît, par exemple, qu'à deux plans rectangulaires, dont l'un est défini par l'angle ω et l'autre par l'angle $\omega + \frac{\pi}{2}$, correspondent des angles 2ω, ou des angles 2α, différant de π, et par suite deux points F et F′ situés aux extrémités d'un même diamètre. A ces deux plans correspondent des valeurs de T, égales et de signe contraire. On a de plus les relations évidentes suivantes :

$$OC = \frac{ON + ON'}{2}, \quad \text{d'où} \quad N + N' = a + b;$$

$$\overline{CF}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{FN}^2, \quad \text{d'où} \quad (N - N')^2 + 4T^2 = (a + b)^2.$$

Enfin, on voit que les angles θ correspondant à F et F′ ne sont pas égaux en général et ont toujours des signes différents.

Si l'on veut maintenant suivre les variations des composantes des tensions ou des diverses quantités qui s'y rattachent, on n'a qu'à faire varier ω entre o et $\pm \frac{\pi}{2}$, et à voir ce qui se passe quand le point F décrit la moitié inférieure ou supérieure de la circonférence. Il n'y a au fond que deux cas distincts à considérer, suivant que a et b sont de même signe ou de signes différents, le point O étant à l'extérieur du cercle dans le premier cas, et à l'intérieur dans le second.

En ce qui concerne la composante normale N, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre a et b. Elle peut devenir nulle quand a et b sont de signes contraires (*fig.* 2). L'angle ω correspondant à $N = 0$ est alors tel que, en valeur absolue,

$$\cos 2\omega = \frac{a + b}{a - b}$$

et l'on a alors

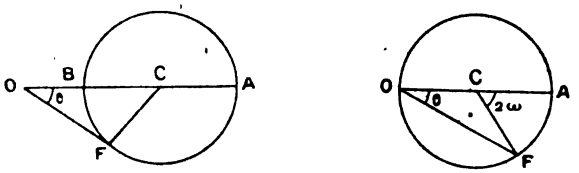
$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

En ce qui concerne la composante tangentielle T, elle part de zéro, quand F est en A, passe par un maximum égal en valeur absolue à $\frac{a - b}{2}$, rayon de la circonférence, lorsque $\omega = \pm \frac{\pi}{4}$. Ensuite, T décroît pour redevenir nul quand F est en B.

En ce qui concerne l'angle θ, il faut distinguer le cas de la figure (1) du cas de la figure (2).

Dans le premier cas, lorsque ω croît de o à $\frac{\pi}{2}$, l'angle θ part de

Fig. 182.



zéro, va en croissant et atteint son maximum lorsque le point F coïncide avec le point de contact de la tangente issue du point O. A ce moment, on a

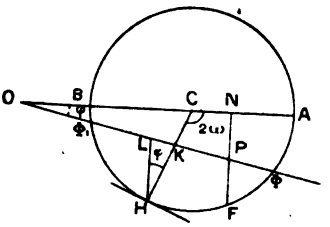
$$\sin\theta = \frac{a-b}{a+b}.$$

Ensuite θ diminue et redevient nul pour $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Dans le second cas, l'angle θ va constamment en croissant; il atteint la valeur $\frac{\pi}{2}$ lorsque $N = o$, et atteint la valeur π quand F arrive au point B.

Enfin, supposons que l'on veuille étudier les variations de l'ex-

Fig. 183.



pression $|T| - |N| \operatorname{tang}\varphi$, dans laquelle φ représente un angle donné. Cette recherche n'a d'ailleurs d'utilité que dans le cas de la figure (1). On mènera par le point O une droite OΦ faisant avec OX l'angle φ. Si cette droite ne coupe pas la circonférence, on aura partout

$$|T| - |N| \operatorname{tang}\varphi < o.$$

Si, au contraire, elle la coupe en deux points tels que Φ et Φ', l'expression deviendra positive lorsque F sera dans la zone $\Phi\Phi'$ et sa valeur sera représentée par le segment FP = FN — PN. Son maximum correspondra au point H que l'on obtiendrait en menant une tangente parallèle à OΦ. L'angle 2ω correspondant serait évidem-

ment égal à $\frac{\pi}{2} + \varphi$, de sorte que l'angle ω serait

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

Le maximum de l'expression serait d'ailleurs

$$HL = \frac{1}{\cos\varphi} HK = \frac{1}{\cos\varphi}(CH - CK).$$

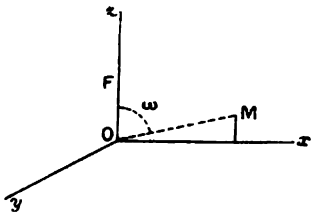
Or, on a

$$CH = \frac{a-b}{2}, \qquad CK = OC \sin\varphi = \left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\varphi.$$

Nous n'insisterons pas davantage.

Nous dirons cependant un mot de quelques cas particuliers. Supposons $N_1 = -N_2$. Le point O sera confondu avec le point C (*fig.* 2). Dans ce cas, on aurait $a = -b$, et sur deux plans rectangulaires quelconques on aura $N = -N'$. Sur les deux plans bissecteurs des directions principales, on aurait $N = 0$ avec $T = \pm a$. Enfin, on aurait constamment la relation $\theta = 2\omega$. Dans ce cas rentre celui où l'on aurait $N_1 = N_2 = 0$ avec $T_3 \neq 0$. On aurait alors $a = \pm T_3$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Fig. 184.



Le cas particulier où l'une des tensions principales s'annule mérite aussi une mention spéciale (voir *fig.* 182). Supposons, par exemple, $b = 0$, et par suite le point O confondu avec B. On aura constamment $\theta = \omega$. La direction de la tension demeure donc constante, quelle que soit l'orientation ω de l'élément plan. Ce cas se reconnaît à ce que $ab = N_1 N_2 - T_3^2 = 0$. On a alors, d'après la formule générale,

$$N = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos 2\omega = a\cos^2\omega.$$

On a en particulier $N_1 = a\cos^2\beta$, d'où $a = \frac{N_1}{\cos^2\beta}$.

CHAPITRE XXI.

DIVERS PROBLÈMES SIMPLES.

I. — Compression normale et uniforme.

Supposons un solide qui soit soumis sur toute sa surface à une pression normale et uniforme P. Appelons α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface. Les composantes de la pression sont respectivement $-P\alpha$, $-P\beta$, $-P\gamma$, et les équations à la surface s'écrivent :

$$\begin{aligned} -P\alpha &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ -P\beta &= T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ -P\gamma &= T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'origine des coordonnées reste fixe, de manière à ne tenir compte que des déformations. Nous allons montrer que les déplacements u, v, w peuvent être représentés par les fonctions

$$u = ax, \qquad v = ay, \qquad w = az,$$

a étant un coefficient constant à déterminer.

Les équations indéfinies d'équilibre sont évidemment satisfaites, car on a

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 3a, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\theta}{dx} = 0,$$

et, d'autre part, on a

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0.$$

Partant de ces valeurs, on peut calculer les N et T. On a

$$N_1 = \lambda\theta = 2\mu\frac{du}{dx} = a(3\lambda + 2\mu),$$

et l'on trouve la même valeur pour N_2 et N_3. Quant aux tensions tangentielles, on a

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

Pour satisfaire aux équations à la surface, il suffit donc de déterminer a par la condition

$$-P = a(3\lambda + 2\mu), \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{-P}{3\lambda + 2\mu}.$$

On en déduit pour la dilatation cubique

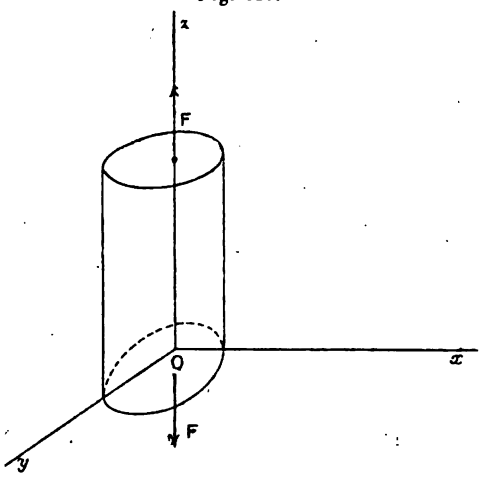
$$\theta = 3a = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu}.$$

Le coefficient $\frac{3}{3\lambda + 2\mu}$ est appelé coefficient de dilatation cubique. On a essayé de le déterminer directement pour certains corps, au moyen de pressions très considérables. Ces expériences montrent qu'un corps solide peut supporter sans se rompre, et même sans s'altérer, des compressions intérieures uniformes extrêmement grandes.

II. — Extension longitudinale d'un prisme ou d'un cylindre.

Considérons un solide prismatique ou cylindrique dont les arêtes soient parallèles à Oz, et soit F la traction uniforme, rapportée à l'unité de surface qui agit sur chacune de ses bases.

Fig. 185.



Nous supposerons que l'une des bases, celle située dans le plan xOy, reste fixe, et nous vérifierons que les déplacements

peuvent être représentés par les fonctions simples

$$u = -ax, \qquad v = -ay, \qquad w = cz,$$

a et c désignant des constantes convenablement choisies.

On a ici

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = c - 2a,$$

et, d'autre part,

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0.$$

Par suite, les équations indéfinies d'équilibre sont satisfaites.

Calculons maintenant les tensions. On a

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

D'autre part, on a

$$N_1 = N_2 = \lambda(c - 2a) - 2\mu a = \lambda c - 2(\lambda + \mu)a,$$
$$N_3 = \lambda(c - 2a) + 2\mu c = (\lambda + 2\mu)c - 2\lambda a.$$

Il s'agit de satisfaire avec ces valeurs aux équations à la surface qui sont de deux espèces. Sur la surface latérale du prisme, il n'y a aucune force extérieure. Comme on a $\gamma = 0$, en même temps que les T sont nuls, ces équations se réduisent à

$$N_1 = N_2 = 0,$$

d'où la condition

$$(1) \qquad \lambda c - 2(\lambda + \mu)a = 0.$$

Sur les bases du prisme, on a $X = Y = 0$ et $Z = F$, et, d'autre part, $\alpha = \beta = 0$ avec $\gamma = 1$. Les équations à la surface se réduisent donc à

$$N_3 = F,$$

d'où la seconde condition

$$(2) \qquad (\lambda + 2\mu)c - 2\lambda a = F.$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$c = \frac{(\lambda + \mu)F}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \qquad a = \frac{\lambda F}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Dans le sens des arêtes du prisme, il se produit une dilatation

égale à c par unité de longueur. Si l'on pose $c = \frac{F}{E}$, E désignant le coefficient d'élasticité, on voit que l'on a la relation

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \qquad \text{ou bien} \qquad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

D'autre part, dans le sens perpendiculaire aux arêtes, il se produit une contraction transversale uniforme, dont la valeur est donnée par a. Ce résultat est conforme à ceux que mettent en évidence des essais de traction sur des barreaux de métal.

Le rapport de la contraction transversale à la dilatation longitudinale a pour valeur

$$\eta = \frac{a}{c} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Ce rapport η est appelé le coefficient de Poisson. Il est déterminable par l'expérience, et c'est au nom d'expériences faites sur des matériaux considérés comme isotropes que l'on a été amené à regarder comme généralement inexacte la relation $\lambda = \mu$, qui ramènerait à un seul les deux coefficients de Lamé. Cette relation conduirait pour η à la valeur constante $\eta = \frac{1}{4} = 0,25$. Or, il semble que pour les métaux essayés, la valeur de η se rapproche plutôt de $\frac{3}{10} = 0,30$. Pourvu que l'on admette que μ est positif, on a nécessairement $\eta < \frac{1}{2}$.

Les deux coefficients E et η, coefficient d'élasticité et coefficient de Poisson, qui sont directement déterminables par l'expérience, sont souvent substitués dans les formules d'élasticité aux coefficients λ et μ de Lamé. Cela ne procure pas une grande simplification en général; cependant, cette substitution facilite quelquefois l'interprétation des résultats obtenus, ainsi que les applications numériques. Pour l'opérer, il suffit de connaître les expressions de λ et μ en fonction de E et de η. En résolvant les équations de définition de E et de η, on trouve facilement

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \eta)}, \qquad \lambda = \frac{E\eta}{(1 + \eta)(1 - 2\eta)}.$$

On s'évite quelques difficultés de calcul en se faisant d'avance un tableau des valeurs de quelques fonctions simples, par exemple

le suivant :

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}=\frac{1}{E},\qquad \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\eta,\qquad \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}=\frac{\eta}{E};$$

$$1-\eta=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)},\qquad \frac{1-\eta}{E}=\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)};$$

$$1+\eta=\frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)},\qquad \frac{1+\eta}{E}=\frac{1}{2\mu};$$

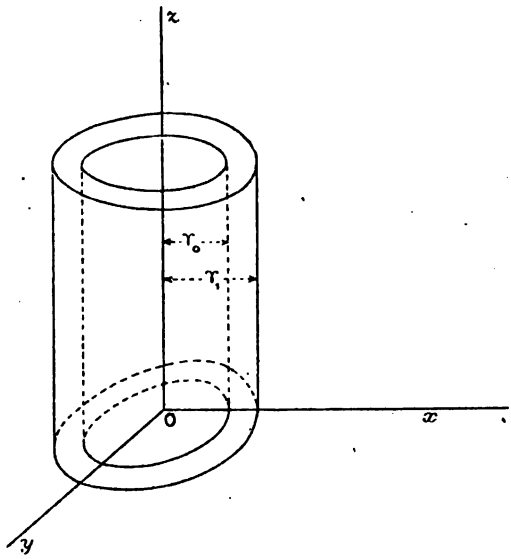
$$1-2\eta=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\qquad \frac{1-2\eta}{E}=\frac{1}{3\lambda+2\mu}.$$

Il est bien évident que le cas d'un prisme comprimé, au lieu d'être tendu, se traiterait absolument de la même façon, et qu'il suffirait dans les résultats d'inverser le signe de F.

III. — Équilibre d'une couche cylindrique.

Soit un solide limité par deux cylindres de révolution concentriques à Oz, et par deux plans perpendiculaires aux arêtes. Ce

Fig. 186.



solide est supposé soumis sur chacune des surfaces cylindriques, de rayon r_0 et r_1, respectivement à des pressions normales et uni-

formes, qui seront P_0 et P_1, et en outre sur chacune de ses bases, à une traction uniforme, de valeur F, parallèle à Oz.

Nous supposerons que la base inférieure, située dans le plan xOy, demeure immobile. Par raison de symétrie, le déplacement d'un point M (xyz) s'effectue dans le plan méridien qui le contient, et il est naturel d'essayer une solution de la forme

$$u = \varepsilon x, \qquad v = \varepsilon y, \qquad w = cz,$$

C étant une constante et ε étant une fonction ne dépendant que de la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ du point M à l'axe de révolution. Nous allons vérifier que ε est de la forme

$$\varepsilon = a + \frac{b}{r^2},$$

a et b étant des constantes.

En ce qui concerne les équations indéfinies d'équilibre, nous commencerons par observer que les expressions assignées à u, v, w en font les dérivées partielles d'une même fonction φ.

En effet, en tenant compte de ce que $\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$ et $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$, ou bien de ce que $r\,dr = x\,dx + y\,dy$, on a

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varepsilon r\,dr + cz\,dz.$$

C'est la différentielle totale de la fonction $\varphi = \int \varepsilon r\,dr + \frac{cz^2}{2}$.

Dans ces conditions, nous avons vu au Chapitre XIX qu'il suffit, pour satisfaire aux équations indéfinies, que la dilatation cubique θ soit constante. Or, il en est bien ainsi. On a, en effet,

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon + x\frac{d\varepsilon}{dr}\frac{dr}{dx} = \varepsilon - \frac{2bx^2}{r^4},$$
$$\frac{dv}{dy} = \varepsilon - \frac{2by^2}{r^4},$$
$$\frac{dw}{dz} = c.$$

En additionnant, on trouve

$$\theta = 2\varepsilon - \frac{2b}{r^2} + c = 2a + c.$$

Il reste donc à montrer que l'on peut déterminer les trois cons-

tantes a, b, c, de manière à satisfaire aux équations à la surface. Calculons d'abord les composantes des tensions. Nous avons d'une manière générale :

$$N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\varepsilon - \frac{2bx^2}{r^4}\right), \qquad T_1 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

$$N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\varepsilon - \frac{2by^2}{r^4}\right), \qquad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) = 0,$$

$$N_3 = \lambda(2a + c) + 2\mu c, \qquad T_3 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 2\mu\frac{xy}{r}\frac{d\varepsilon}{dr}.$$

Si l'on suppose, en particulier, que le point $M(xyz)$ est dans le méridien zOx, on peut faire $x = r$ et $y = 0$. Dans ces conditions T_3 devient nul, comme T_1 et T_2, et l'on a pour les composantes normales, qui sont les tensions principales :

$$N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(a + \frac{b}{r^2} - \frac{2b}{r^2}\right) = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu}{r^2}b,$$

$$N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(a + \frac{b}{r^2}\right), \qquad = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu}{r^2}b,$$

$$N_3 = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c.$$

Nous avons ici trois surfaces à considérer :

1° Le cylindre intérieur, sur lequel s'exerce la pression P_0. Les équations s'y réduisent à $N_1 = -P_0$, car $X = +P_0$ $Y = Z = 0$ et $\alpha = -1$ $\beta = \gamma = 0$, les T étant d'ailleurs nuls.

Cette condition s'écrit

$$(1) \qquad 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu}{r_0^2}b = -P_0.$$

2° De même sur le cylindre extérieur, les équations se réduisent à

$$N_1 = -P_1,$$

ce qui donne

$$(2) \qquad 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu}{r_1^2}b = -P_1.$$

3° Enfin, sur la base supérieure, où l'on a $\alpha = \beta = 0$ $\gamma = 1$, on doit avoir $N_3 = F$, d'où

$$(3) \qquad 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c = F.$$

Les trois équations (1), (2), (3) qui sont linéaires en a, b, c

résolvent la question, toutes les conditions du problème se trouvant remplies.

Les deux premières équations donnent par soustraction

$$2\mu b\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)=P_0-P_1,$$

d'où

$$b=\frac{P_0-P_1}{2\mu}\,\frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}.$$

Il en résulte

$$2(\lambda+\mu)a+\lambda c=\frac{2\mu b}{r_0^2}-P_0=\frac{P_0 r_0^2-P_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}.$$

En combinant cette dernière équation avec l'équation (3), on trouve

$$a=\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left[\frac{P_0 r_0^2-P_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}\right]-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}F,$$

$$c=\frac{2(\lambda+\mu)}{2\mu(3\lambda+2\mu)}F-\frac{2\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left[\frac{P_0 r_0^2-P_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}\right].$$

La dernière partie de ce calcul est inutile en ce qui concerne les tensions. On a en effet $N_3=F=$ const. partout. Quant à N_1 et N_2, leur valeur ne dépend que de celle des deux quantités

$$2(\lambda+\mu)a+\lambda c \qquad \text{et} \qquad \frac{2\mu b}{r^2},$$

dont les expressions sont données plus haut. Il est à remarquer que ces quantités sont indépendantes en fait des coefficients d'élasticité, et l'on pouvait s'y attendre, car le problème traité est au fond un problème d'élasticité à deux dimensions (1er problème), puisque l'on a posé à l'origine la condition $w=cz$, c étant une constante.

On trouve explicitement

$$N_1=\frac{P_0 r_0^2-P_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}-\frac{P_0-P_1}{r^2}\,\frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2-r_0^2},$$

$$N_2=\frac{P_0 r_0^2-P_1 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}+\frac{P_0-P_1}{r^2}\,\frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2-r_0^2}.$$

En groupant les termes en P_0 et en P_1, et en tenant compte de ce que l'on a $r_0<r<r_1$, on voit facilement que N_1 est toujours négatif et représente toujours, par suite, une compression. Il n'en est pas de même pour N_2 qui peut être tantôt une tension, tantôt

une compression, suivant les valeurs relatives de P_0 et de P_1. Lorsque N_2 est une tension, c'est elle surtout qu'il faut prendre en considération, car elle tend à produire une rupture ou une fissuration dans le plan méridien. Si l'on a $P_0 > P_1$, le maximum de N_2 a toujours lieu lorsque r est le plus petit possible, c'est-à-dire atteint la valeur r_0. Ce maximum est

$$N_2 = \frac{P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{(P_0 - P_1) r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Application aux corps cylindriques des chaudières à vapeur, ou aux conduites d'eau sous pression. — Dans ce cas on suppose $P_1 = 0$, en négligeant la pression atmosphérique. Si l'on désigne par P la pression intérieure, et par r le rayon intérieur, et si l'on suppose que l'épaisseur e du métal est relativement petite, on pourra poser $r_1 = r + e$ et prendre approximativement $r_1^2 = r^2 + 2re$.

Dans ces conditions, l'expression du maximum de N_2 devient

$$N_2 = \frac{P r^2 + P(r^2 + 2re)}{2re} = P \frac{r}{e}\left(1 + \frac{e}{r}\right)$$

et l'on pourra, la plupart du temps, négliger le terme $\frac{e}{r}$ devant l'unité.

Il est intéressant de calculer l'augmentation du rayon intérieur de la chaudière, indépendamment bien entendu de la dilatation causée par la chaleur. On a

$$u = \varepsilon r = ar + \frac{b}{r}.$$

Pour calculer le terme en a, il faut tenir compte de la valeur de F. Si les fonds de la chaudière sont des demi-sphères, ou des demi-ellipsoïdes de révolution, on a pour la pression totale sur ces fonds $\pi r^2 P$, et cette pression se répartira sur la surface $2\pi re$. D'où $F = \frac{Pr}{2e}$.

On en déduit

$$ar = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{P r^2}{2re} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{P r^2}{2e} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{P r^2}{2e}.$$

Si l'on substitue aux coefficients de Lamé le coefficient d'élas-

ticité et le coefficient de Poisson, cette expression devient

$$ar = \frac{1-2\eta}{E}\,\frac{Pr^2}{2e}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{b}{r} = \frac{P}{2\mu}\,\frac{r^2}{2re} = \frac{1}{2\mu}\,\frac{Pr^2}{2e} = \frac{1+\eta}{E}\,\frac{Pr^2}{2e}.$$

Finalement, on trouve

$$u = \frac{Pr^2}{2e}\left[\frac{1-2\eta}{E} + \frac{1+\eta}{E}\right] = \frac{2-\eta}{E}\,\frac{Pr^2}{2e}.$$

Application au frettage des canons. — Nous mentionnerons seulement cette application.

Application aux cylindres comprimés en béton fretté. On appelle *béton fretté* un matériau composé de béton et de barres de fer ou d'acier, disposées non pas parallèlement à l'axe de la pièce pour se substituer à des fibres de béton, mais sous forme de spires contenant une série d'anneaux près du contour des sections droites. En éprouvant jusqu'à la rupture des poteaux ainsi constitués, on a reconnu qu'ils pouvaient supporter des charges beaucoup supérieures à celles que supporterait un poteau de béton non fretté. On peut chercher dans la théorie qui précède une explication sommaire de ce fait.

Supposons un poteau cylindrique non fretté supportant sur ses bases une compression uniforme F, ou une traction — F. Il serait sur toute sa longueur soumis aux tensions principales suivantes :

$$N_1 = N_2 = 0, \qquad N_3 = -F.$$

La contraction suivant l'axe serait

$$c = -\frac{F}{E}.$$

La dilatation suivant un rayon serait

$$a = \frac{\eta F}{E}.$$

Supposons maintenant le même poteau muni de frettes, sous

forme d'anneaux d'épaisseur e, compris entre les rayons r et $r_1 = r + e$. Ces anneaux sont supposés séparés les uns des autres par des intervalles très petits, de manière qu'ils ne puissent se transmettre de l'un à l'autre aucune compression longitudinale. Lorsque la compression F s'exercera sur le poteau, il se développera une pression P à la surface de contact des anneaux et du béton, suivant le cylindre de rayon r. Cette pression P est proportionnelle à F et peut se calculer en écrivant que le déplacement u est le même pour le béton et pour le métal, suivant le cylindre de rayon r.

Pour le béton, on aura $u = ar + \frac{b}{r}$, et les valeurs de a et b se déduiront des formules générales en faisant $P_0 = 0$, $r_0 = 0$, $P_1 = P$, $r_1 = r$, avec $F = -F$. On en déduit $b = 0$, puis

$$a = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P + \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F = -\frac{1 - \eta}{E} P + \frac{\eta}{E} F,$$

d'où

$$u = ar = r\left[\frac{\eta}{E} F - \frac{1 - \eta}{E} P\right].$$

Pour le métal, les valeurs de a et b s'obtiendront en faisant $P_0 = P$, $r_0 = r$, $P_1 = 0$, $r_1 = r + e$, avec $F = 0$. On en déduit

$$b = \frac{P}{2\mu'} \frac{r^2(r+e)^2}{(r+e)^2 - r^2} = \frac{1 + \eta'}{E'} P \frac{r^2(r+e)^2}{(r+e)^2 - r^2},$$

$$a = \frac{\lambda' + 2\mu'}{2\mu'(3\lambda' + 2\mu')} P \frac{r^2}{(r+e)^2 - r^2} = \frac{1 - \eta'}{E'} P \frac{r^2}{(r+e)^2 - r^2}.$$

Par suite,

$$u = ar + \frac{b}{r} = \frac{Pr}{E'}\left[\frac{(r+e)^2 + r^2}{(r+e)^2 - r^2} + \eta'\right].$$

Si l'on pose $\frac{E'}{E} = m$, on obtient pour déterminer P l'équation

$$P\left[\frac{(r+e)^2 + r^2}{(r+e)^2 - r^2} + \eta' + m(1 - \eta)\right] = F m \eta.$$

Pour simplifier, nous prendrons l'exemple numérique suivant :

$$m = 10, \qquad \eta = \eta' = \frac{3}{10}, \qquad e = \frac{r}{10}.$$

On trouve alors $P = 0,17\,F$ environ.

Cela posé, le massif de béton est soumis, sur toute sa longueur, aux tensions principales suivantes :

$$N_1 = -P, \qquad N_2 = -P, \qquad N_3 = -F.$$

Ces tensions sont toutes des compressions, tandis que sans frettage on avait des compressions nulles dans le sens transversal. On peut en inférer que les conditions de résistance sont améliorées, certaines causes de désagrégation accidentelles près de la surface pouvant disparaître, et le massif se rapprochant en quelque sorte d'un corps soumis à une compression extérieure uniforme pouvant supporter des efforts considérables.

Certains auteurs pensent, d'ailleurs, que le danger de rupture d'un poteau en béton est fonction, moins des valeurs absolues des efforts de compression qu'il supporte que sa dilatation dans le sens transversal, c'est-à-dire du coefficient a.

Or, à l'état naturel, on a pour ce coefficient

$$a = \frac{\eta F}{E}.$$

Après frettage, il devient

$$a = \frac{\eta}{E} F - \frac{1-\eta}{E} P = \frac{\eta}{E} F \left[1 - \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right) \frac{P}{F} \right].$$

Il se trouve donc diminué. Si nous reprenons l'exemple numérique considéré ci-dessus, le rapport des deux coefficients est 0,61 environ

Le coefficient de contraction suivant l'axe, qui, dans l'état naturel, serait $c = -\frac{F}{E}$, devient d'ailleurs après frettage

$$c = -\frac{F}{E} + \frac{2\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P = -\frac{F}{E} + \frac{2\eta}{E} P = -\frac{F}{E} \left[1 - 2\eta \frac{P}{F} \right].$$

Il se trouve lui aussi diminué en valeur absolue. Dans l'exemple numérique choisi, on aurait $1 - 2\eta \frac{P}{F} = 0,90$ environ, comme si le coefficient d'élasticité E avait été majoré de $\frac{1}{10}$.

La théorie précédente, sans être complète, rend donc compte du sens des phénomènes et peut fournir des évaluations approximatives. Elle peut mettre en évidence aussi quelques points d'un caractère général. Il y a intérêt à augmenter le plus possible le

rapport $\frac{P}{F}$. On y parviendra, dans une certaine mesure, en augmentant le rapport $m = \frac{E'}{E}$, c'est-à-dire en recourant à du métal ayant un coefficient d'élasticité aussi grand que possible. On devra chercher aussi à prendre le rapport $\frac{r}{e}$ aussi petit que possible. Pour une quantité de métal employé, il y a un rapport optimum entre la grosseur des anneaux et leur espacement.

IV. — Équilibre d'une couche sphérique.

On considère ici une couche homogène comprise entre deux sphères concentriques de rayon r_0 et r_1 ($r_1 > r_0$). La surface intérieure est soumise à une pression P_0 et la surface extérieure à une pression P_1.

En supposant le centre immobile, le déplacement d'un point doit s'effectuer suivant le rayon et l'on pourra poser

$$u = \varepsilon x, \qquad v = \varepsilon z, \qquad w = \varepsilon z,$$

ε étant une fonction de la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ du point M (xyz) au centre.

En suivant la même marche que pour la couche cylindrique, on vérifiera que ε est de la forme

$$\varepsilon = a + \frac{b}{r^3},$$

a et b étant des constantes.

En ce qui concerne les équations indéfinies d'équilibre, on observera que u, v, w sont les dérivées partielles de la fonction $\varphi = \int \varepsilon r\, dr$ dont la différentielle totale est

$$\varepsilon r\, dr = \varepsilon(x\, dx + y\, dy + z\, dz).$$

Il suffit donc encore de vérifier que la dilatation cubique θ est une constante. Or, on a

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon + x\frac{d\varepsilon}{dr}\frac{dr}{dx} = \varepsilon - \frac{3bx^2}{r^5},$$

$$\frac{dv}{dy} = \varepsilon - \frac{3by^2}{r^5},$$

$$\frac{dw}{dz} = \varepsilon - \frac{3bz^2}{r^5}.$$

En additionnant, on trouve

$$\theta = 3\varepsilon - \frac{3b}{r^3} = 3a.$$

En ce qui concerne les équations à la surface, il suffit de les écrire pour un point, celui qui correspond à l'axe Ox, par exemple. Alors, par raison de symétrie, on a

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

D'autre part, on a, d'une manière générale,

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx} = 3a\lambda + 2\mu\left(\varepsilon - \frac{3bx^2}{r^5}\right),$$
$$N_2 = 3a\lambda + 2\mu\left(\varepsilon - \frac{3by^2}{r^5}\right),$$
$$N_3 = 3a\lambda + 2\mu\left(\varepsilon - \frac{3bz^2}{r^5}\right).$$

Pour le point $x = r$, $y = z = 0$, on obtient

$$N_1 = 3\lambda a + 2\mu\left(a + \frac{b}{r^3} - \frac{3b}{r^3}\right) = (3\lambda + 2\mu)a - \frac{4\mu}{r^3}b,$$
$$N_2 = N_3 = 3\lambda a + 2\mu\left(a + \frac{b}{r^3}\right) = (3\lambda + 2\mu)a + \frac{2\mu}{r^3}b.$$

Sur la sphère intérieure on doit avoir $N_1 = -P_0$, et sur la sphère extérieure $N_1 = -P_1$, en tenant compte du sens de la normale extérieure. Il en résulte, pour déterminer a et b, les deux conditions

$$(3\lambda + 2\mu)a - \frac{4\mu}{r_0^3}b = -P_0,$$
$$(3\lambda + 2\mu)a - \frac{4\mu}{r_1^3}b = -P_1.$$

On en déduit facilement

$$4\mu b = \frac{(P_0 - P_1)r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}, \qquad (3\lambda + 2\mu)a = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}.$$

Et, par suite, les expressions des tensions pour le point $x = r$, $y = z = 0$ deviennent

$$N_1 = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} - \frac{(P_0 - P_1)r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}\,\frac{1}{r^3},$$
$$N_2 = N_3 = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{(P_0 - P_1)r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}\,\frac{1}{2r^3}.$$

Ces expressions ne dépendent pas des coefficients d'élasticité.

Quant au déplacement du même point, qui se réduit à sa seule composante $u = \varepsilon r = ar + \frac{b}{r^2}$, on l'obtiendra en portant dans cette expression les valeurs de a et b, qui, elles, dépendent de λ et de μ.

Si l'on suppose $P_1 = 0$ et $P_0 = P$, et si l'on fait $r = r_0$, on obtient les résultats suivants pour la surface sphérique intérieure :

$$N_1 = -P, \qquad N_2 = \frac{Pr_0^3}{r_1^3 - r_0^3}\left(1 + \frac{r_1^3}{2r_0^3}\right).$$

Si l'on suppose relativement petite l'épaisseur $e = r_1 - r_0$, on pourra remplacer r_1^3 par $r_0^3 + 3er_0^3$ et l'on obtiendra, en supprimant l'indice de r_0,

$$N_2 = \frac{Pr}{2e}\left(1 + \frac{e}{r}\right)$$

et l'on pourra la plupart du temps négliger le terme $\frac{e}{r}$ devant l'unité.

Si l'on compare cette formule à la formule analogue trouvée pour les enveloppes cylindriques, on voit que la tension N_2 est ici deux fois plus faible et que, à égalité de fatigue, on pourrait, pour une chaudière composée d'un cylindre et de deux demi-sphères, prendre une épaisseur deux fois moindre pour les sphères que pour le cylindre.

Calculons l'augmentation du rayon intérieur, dans les mêmes conditions. On a

$$a = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{Pr}{3e} = \frac{1 - 2\eta}{E}\,\frac{Pr}{3e},$$

$$b = \frac{1}{4\mu}\,\frac{Pr(r^2 + 3er^2)}{3e} = \frac{1 + \eta}{2E}\,\frac{Pr^4}{3e}\left(1 + \frac{3e}{r}\right) = \frac{1 + \eta}{2E}\,\frac{Pr^4}{3e}$$

approximativement.

On en déduit

$$u = ar + \frac{b}{r^2} = \left[\frac{1 - 2\eta}{E} + \frac{1 + \eta}{2E}\right]\frac{Pr^2}{3e} = \frac{3}{2}\,\frac{1 - \eta}{E}\,\frac{Pr^2}{3e}.$$

Comparons à la formule analogue trouvée pour une enveloppe cylindrique, et cherchons la condition pour qu'une enveloppe sphérique d'épaisseur e' se dilate comme une enveloppe cylindrique

du même rayon, et d'épaisseur e, nous trouverons

$$\frac{2-\eta}{E}\frac{Pr^2}{2e}=\frac{3}{2}\frac{1-\eta}{E}\frac{Pr^2}{3e'},$$

d'où

$$e'=\frac{1-\eta}{2-\eta}e.$$

Si l'on suppose $\eta=\frac{3}{10}$, on trouve

$$e'=\frac{7}{17}e.$$

On serait donc conduit, quand on a à construire un bouilleur formé d'un cylindre et de deux demi-sphères, et qu'on veut éviter des dilatations inégales suivant les lignes de raccordement, à prendre pour les sphères une épaisseur de métal inférieure à la moitié de l'épaisseur du cylindre. Dans ces conditions, si les sphères travaillent au taux de fatigue maximum admissible, le cylindre aura un taux de fatigue un peu moindre, en vertu des formules qui expriment N_2.

En pratique, on suit d'autres règles, notamment pour des raisons d'économie; mais alors il se développe des réactions transversales suivant les lignes de raccordement, et les calculs simples des enveloppes sphériques ou cylindriques isolées ne sont plus rigoureux, pas plus qu'ils ne le sont dans le cas de calottes sphériques substituées aux demi-sphères.

CHAPITRE XXII.

PROBLÈME DE SAINT-VENANT.

Énoncé et conditions générales. — On doit à Saint-Venant la solution d'un problème qui présente, au point de vue des applications, une très grande importance. Il s'agit de déterminer l'équilibre élastique d'une pièce prismatique ou cylindrique très longue par rapport aux dimensions de sa section transversale et soumise uniquement à des forces appliquées sur ses deux bases. C'est en quelque sorte le problème inverse du problème des tranches minces envisagé au Chapitre XX.

L'axe du prisme étant supposé parallèle à Oz, la solution de Saint-Venant consiste à admettre que les deux tensions normales dirigées suivant Ox et Oy sont nulles, c'est-à-dire que

$$N_1 = N_2 = 0$$

et qu'il n'y a pas non plus de force tangentielle parallèle à Oxy, dans les plans parallèles à Oz, c'est-à-dire que $T_3 = 0$.

Il résulte évidemment de ces hypothèses, pour les fonctions u, v, w et θ, des conditions plus restrictives que celles qui correspondent au cas général.

Récrivons les équations qui lient les composantes des tensions aux composantes des déplacements, savoir :

$$(E)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, & T_1 &= \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),\\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, & T_2 &= \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),\\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}, & T_3 &= \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right),\end{aligned}\right.$$

et les équations générales d'équilibre :

$$(A)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\,\Delta u=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\,\Delta v=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\,\Delta w=0. \end{cases}$$

De la supposition $N_1=0$ et $N_2=0$, on déduit d'abord

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\lambda}{2\mu}\theta,$$
$$\frac{dv}{dy}=-\frac{\lambda}{2\mu}\theta=\frac{du}{dx}.$$

Comme on a, d'autre part, d'une manière générale,

$$N_1+N_2+N_3=(3\lambda+2\mu)\theta$$

on a dans le cas actuel

$$N_3=(3\lambda+2\mu)\theta$$

et, par suite,

$$\frac{dw}{dz}=\frac{N_3-\lambda\theta}{2\mu}=\frac{\lambda+\mu}{\mu}\theta.$$

Or θ satisfait en général à la condition $\Delta\theta=0$. Il en résulte immédiatement

$$\Delta\frac{du}{dx}=\Delta\frac{dv}{dy}=\Delta\frac{dw}{dz}=0.$$

Si l'on tient compte de ces conditions dans les équations générales d'équilibre, respectivement différentiées par rapport à x, y et z respectivement, on obtient immédiatement

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}=\frac{d^2\theta}{dy^2}=\frac{d^2\theta}{dz^2}=0.$$

D'un autre côté, de la supposition $T_3=0$ on déduit

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=0;$$

si l'on différentie par rapport à y la première équation générale d'équilibre, et la seconde par rapport à x, et qu'on les additionne

ensuite, on obtiendra

$$2(\lambda+\mu)\frac{d^2\theta}{dx\,dy}+\mu\Delta\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)=0,$$

d'où la nouvelle condition

$$\frac{d^2\theta}{dx\,dy}=0.$$

Ainsi la dilatation cubique θ et les fonctions N_3, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, qui lui sont proportionnelles, ont une forme analytique nettement précisée. Elles ne peuvent contenir x, y, z à une puissance supérieure à la première et, de plus, elles ne peuvent renfermer le produit xy. On aura donc en particulier pour N_3 une expression de la forme

$$N_3=(a+a_1x+a_2y)+z(b+b_1x+b_2y).$$

Pour une valeur de z, c'est-à-dire dans une section transversale donnée, N_3 est donc une fonction linéaire de x et de y. C'est une justification de l'hypothèse qui sert de base à la résistance des matériaux, et nous y reviendrons plus loin.

On peut même reconnaître immédiatement que le coefficient b doit disparaître, si l'origine des coordonnées est supposée placée au centre de gravité de la section de base, ce qui revient à dire que l'axe Oz est le lieu des centres de gravité des différentes sections transversales. On a dans ce cas, en appelant $d\sigma$ un élément de la section de base,

$$\int x\,d\sigma=0,\qquad \int y\,d\sigma=0.$$

D'un autre côté, puisque l'on a supposé qu'il n'y a aucune force appliquée tout le long de la surface latérale du prisme, l'intégrale

$$\int N_3\,d\sigma$$

doit, dans une section transversale quelconque, conserver la même valeur. Or on a évidemment

$$\int N_3\,d\sigma=(a+bz)\int d\sigma.$$

Il en résulte nécessairement $b=0$, dans le système d'axes choisi.

Cela posé, on peut parvenir par intégration à la détermination analytique de u, v, w, puisque l'on connaît en fonction de θ et par suite de N_3 les trois dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$. Mais dans cette détermination on peut apporter encore quelques restrictions.

Envisageons en particulier la fonction u. Nous avons vu que l'on a, d'une part,

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy},$$

et, d'autre part,

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}.$$

Il en résulte immédiatement

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

Il en résulte ensuite

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dz^2}.$$

D'un autre côté, la première équation générale d'équilibre (A) donne

$$\Delta u = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\frac{dN_3}{dx} = -\frac{1}{E}\frac{dN_3}{dx}.$$

Par suite, on peut écrire comme nouvelle condition

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{1}{E}\frac{dN_3}{dx};$$

on obtiendrait deux conditions toutes semblables pour v.

Enfin, il est loisible, pour simplifier, de tenir compte des conditions que l'on peut s'imposer à l'origine des coordonnées. On peut supposer notamment que cette origine ne subit aucun déplacement, c'est-à-dire que l'on a pour $x = y = z = 0$

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0;$$

on peut supposer aussi qu'il y a encastrement, c'est-à-dire que le petit élément dirigé suivant l'axe des z ne subit pas de déplacement transversal, c'est-à-dire que l'on a à l'origine

$$\frac{du}{dz} = 0, \qquad \frac{dv}{dz} = 0;$$

on peut supposer aussi qu'il n'y a pas de rotation et que, par exemple, le petit élément dirigé suivant Ox ne subit aucun déplacement parallèle à Oy. Il en résulte à l'origine

$$\frac{dv}{dx} = 0, \qquad \text{et par suite aussi} \qquad \frac{du}{dy} = 0.$$

Détermination analytique de u. — Nous avons trouvé

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\lambda}{2\mu}\theta;$$

on en déduit en fonction de N_3

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} N_3 = -\frac{\eta}{E} N_3$$

ou encore

$$-\frac{E}{\eta}\frac{du}{dx} = (a + a_1 x + a_2 y) + z(b_1 x + b_2 y).$$

Par suite,

$$-\frac{E}{\eta} u = (a + a_2 y + b_2 y z)x + (a_1 + b_1 z)\frac{x^2}{2} + F(yz)$$

en désignant par F une fonction arbitraire. Mais cette fonction doit elle-même satisfaire aux conditions restrictives écrites plus haut pour la fonction u. On doit avoir d'abord

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2 F}{dy^2} = -(a_1 + b_1 z),$$

et ensuite

$$-\frac{E}{\eta}\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dN_3}{dx}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{1}{\eta}(a_1 + b_1 z)$$

On satisfera à ces deux conditions, en même temps qu'aux conditions

$$u = 0, \qquad \frac{du}{dy} = 0, \qquad \frac{du}{dz} = 0, \qquad \text{pour} \qquad x = y = z = 0,$$

en posant

$$F(yz) = -(a_1 + b_1 z)\frac{y^2}{2} + \frac{1}{\eta}\left(a_1 \frac{z^2}{2} + b_1 \frac{z^3}{6}\right) - \frac{k}{\eta} yz,$$

k étant une nouvelle constante. Il vient donc finalement

$$-\frac{E}{\eta}u = (a + a_2 y + b_2 yz)x$$
$$+ (a_1 + b_1 z)\frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{1}{\eta}\left(a_1\frac{z^2}{2} + b_1\frac{z^3}{6} - kyz\right).$$

Détermination de v. — Cette détermination se fera tout simplement en permutant respectivement x, a_1, b_1 avec y, a_2, b_2 et en introduisant à la place de k une autre constante k'. Mais on peut d'ailleurs voir facilement que l'on doit avoir $k' = -k$, afin de satisfaire à la condition

$$\frac{dx}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0.$$

On aura donc

$$-\frac{E}{\eta}v = (a + a_1 x + b_1 xz)y$$
$$+ (a_2 + b_2 z)\frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{1}{\eta}\left(a_2\frac{z^2}{2} + b^2\frac{z^3}{6} + kxz\right).$$

Détermination de w. — On a

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\lambda + \mu}{\mu}\theta = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}N_3 = \frac{1}{E}N_3.$$

Par suite,

$$Ew = (b + a_1 x + a_2 y)z + (b_1 x + b_2 y)\frac{z^2}{2} + F(xy),$$

F étant une fonction arbitraire, qui doit toutefois satisfaire à la troisième équation générale d'équilibre, savoir :

$$(\lambda + \mu)\frac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta w = 0$$

ou bien

$$E\,\Delta w = -\frac{dN_3}{dz} = -(b_1 x + b_2 y).$$

On en déduit aisément

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} = -2(b_1 x + b_2 y).$$

On peut prendre comme solution

$$F = -\frac{1}{3}(b_1 x^3 + b_2 y^3) + \varphi,$$

φ désignant une solution de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^3} = 0,$$

c'est-à-dire une fonction harmonique.

La valeur de w est donc finalement donnée par l'équation

$$Ew = (a + a_1 x + a_2 y) z + b_1 x \left(\frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + b_2 y \left(\frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{3}\right) + \varphi(xy).$$

Expression générale des tensions N_3, T_1, T_2. — On a d'abord pour N_3 l'expression posée plus haut

$$N_3 = (a + a_1 x + a_2 y) + (b_1 x + b_2 y) z.$$

Pour avoir T_1, il faut calculer $\mu\left(\frac{dw}{dv} + \frac{dv}{dz}\right)$ et l'on trouve

$$\frac{E}{\mu} T_1 = \frac{d\varphi}{dy} - kx - b_2 y^2 - \eta\left(b_1 xy + b_2 \frac{y^2 - x^2}{2}\right).$$

On trouverait de même

$$\frac{E}{\mu} T_2 = \frac{d\varphi}{dx} + ky - b_1 x^2 - \eta\left(b_2 xy + b_1 \frac{x^2 - y^2}{2}\right).$$

On peut vérifier en passant que ces expressions satisfont bien aux trois équations générales d'équilibre, exprimées en fonction des tensions et se réduisant ici à

$$\frac{dT_2}{dz} = 0, \qquad \frac{dT_1}{dz} = 0,$$
$$\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0.$$

Les deux premières se vérifient immédiatement, puisque T_1 et T_2 ne renferment pas z. Quant à la troisième, on a

$$\frac{dN_3}{dz} = b_1 x + b_2 y,$$

$$\frac{E}{\mu}\left(\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy}\right) = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} - 2(1 + \eta)(b_1 x + b_2 y)$$
$$= -2(1 + \eta)(b_1 x + b_2 y),$$

puisque φ est une fonction harmonique. On a d'ailleurs

$$\frac{2(1+\eta)\mu}{E} = 1,$$

en vertu des expressions de E et de η (Chap. XXI).

Équations à la surface. — Ces équations doivent maintenant intervenir pour déterminer les six constantes arbitraires a, a_1, a_2, b_1, b_2, k et la fonction arbitraire φ. Elles sont de deux espèces, celles qui se rapportent à la surface latérale du prisme et celles qui se rapportent à ses bases supérieure et inférieure. Prenons d'abord les premières.

Aucune force extérieure n'agit par hypothèse sur la surface latérale du prisme. Si l'on désigne par α, β et $\gamma = 0$ les cosinus directeurs de la normale en un point de cette surface, on devra écrire $X = Y = Z = 0$. Or X et Y sont toujours nuls, en vertu des hypothèses $N_1 = N_2 = T_3 = 0$ et $\gamma = 0$. Quant à Z, sa valeur se réduit à

$$Z = T_2\alpha + T_1\beta.$$

On doit donc avoir en tout point

$$T_2\alpha + T_1\beta = 0.$$

T_1 et T_2 ne dépendent d'ailleurs pas de z, de sorte qu'il suffit de satisfaire à cette condition pour une section transversale quelconque, par exemple pour la base inférieure. Si cette base a pour équation $F(xy) = 0$, on a

$$\alpha = \frac{dF}{dx} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{dF}{dy},$$

de sorte que l'équation de condition s'écrit

$$\frac{dF}{dx}T_2 + \frac{dF}{dy}T_1.$$

En y introduisant maintenant les valeurs de T_1 et T_2, on obtiendra une équation différentielle à laquelle la fonction harmonique φ doit satisfaire sur le contour.

On démontre en Analyse qu'une pareille condition détermine sans ambiguïté la fonction harmonique φ, à une constante près

que l'on peut négliger, puisque, pour $x=0$, $y=0$, on a supposé $w=0$.

L'équation au contour se présente d'ailleurs sous la forme

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dy}-b_1H_1-b_2H_2-kH'=0,$$

puisque T_1 et T_2 contiennent linéairement les trois constantes b_1, b_2, k, et celles-là seulement. H_1, H_2 et H' sont d'ailleurs des fonctions de x et y, dont les expressions sont :

$$H_1=\frac{dF}{dx}\left(x^2+\eta\frac{x^2-y^2}{2}\right)+\frac{dF}{dy}\eta xy,$$
$$H_2=\frac{dF}{dy}\left(y^2+\eta\frac{y^2-x^2}{2}\right)+\frac{dF}{dx}\eta xy,$$
$$H'=-\frac{dF}{dx}y+\frac{dF}{dy}x.$$

Il en résulte que la solution φ de l'équation au contour se présentera elle-même sous la forme

$$\varphi=b_1\varphi_1+b_2\varphi_2+k\varphi';$$

la détermination des fonctions harmoniques φ_1, φ_2 et φ' pouvant faire l'objet de problèmes séparés plus simples, en supposant deux des trois constantes b_1, b_2, k égales à zéro et la troisième égale à l'unité. Ces fonctions ne dépendent donc aucunement des constantes, mais uniquement de la forme du contour de la section droite.

On peut d'ailleurs remarquer que, lorsque le contour de la section droite est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées Ox et Oy, les fonctions φ_1 et φ_2 seront des fonctions dites *impaires*, ce qui veut dire qu'elles changent de signe sans changer de valeur lorsqu'on passe du point (x, y) au point $(-x, -y)$. En effet, l'équation différentielle ne doit pas changer quand on fait tourner les axes de 180°, ce qui revient à changer x en $(-x)$ et y en $(-y)$; or les coefficients de $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ dans H_1 et H_2 sont des fonctions paires et ne changent pas. Il doit donc en être de même des coefficients différentiels $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$. Les fonctions φ correspondantes doivent donc être impaires.

Le contraire se produira pour H_1' qui est une fonction impaire, et par suite pour φ' qui doit être ainsi une fonction paire.

Ceci posé, examinons les conditions relatives aux deux bases du prisme.

Si les six constantes étaient données et si la fonction φ était supposée déterminée, il en résulterait, en chaque point (xyz) de la pièce, des valeurs déterminées pour les tensions N_3, T_2, T_1. En un point quelconque de la surface latérale, il n'y aurait aucune tension; mais sur les bases, la distribution des tensions serait complètement déterminée et la distribution de N_3 notamment devrait obligatoirement se faire suivant une loi linéaire en xy.

Pour la base inférieure, sur laquelle n'interviennent pas des forces appliquées connues *a priori*, il n'y a aucune difficulté à admettre ce résultat en ce qui concerne les réactions développées sur cette base. Mais en ce qui concerne la base supérieure, la répartition des forces qui y sont appliquées ne saurait être arbitraire pour que la solution de Saint-Venant puisse convenir. C'est là un résultat qui ne saurait surprendre, attendu qu'en faisant la supposition initiale $N_1 = N_2 = T_3 = 0$, on s'imposait *a priori* des restrictions assez considérables.

Mais il est très remarquable que la détermination des six constantes ne dépend pas de la loi réelle de répartition des forces sur la base supérieure du prisme. Elle dépend uniquement de la résultante de toutes ces forces et de leur moment résultant.

Désignons par X, Y, Z les composantes de translation de cette résultante et par M_x, M_y, M_z les composantes du moment résultant pris par rapport à l'origine des coordonnées.

D'un autre côté, supposons que cette origine soit au centre de gravité de la section de base et que Ox et Oy soient dirigés suivant les axes de l'ellipse centrale d'inertie, de sorte que l'on ait

$$\int x\,d\sigma = 0, \qquad \int y\,d\sigma = 0, \qquad \int xy\,d\sigma = 0$$

pour une section transversale quelconque.

Posons, en outre,

$$I_x = \int y^2\,d\sigma, \qquad I_y = \int x^2\,d\sigma, \qquad S = \int d\sigma.$$

Le système des forces N_3, T_2, T_1 afférent à la base supérieure est identique au système des forces qui lui sont appliquées. Mais puisqu'il n'y a aucune force appliquée à la surface latérale du prisme, il est statiquement équivalent au système des forces N_3, T_2, T_1 afférent à une section transversale quelconque, définie par une ordonnée h arbitraire. En particulier, on peut choisir la base inférieure.

On a alors les six équations de condition

$$X = \int T_2\, d\sigma, \qquad Y = \int T_1\, d\sigma, \qquad Z = \int N_3\, d\sigma:$$

$$M_x = \int N_3 y\, d\sigma, \qquad M_y = \int N_3 x\, d\sigma, \qquad M_z = \int (T_2 y - T_1 x)\, d\sigma.$$

En développant les calculs, on trouve :

$$(1) \qquad \frac{E}{\mu} X = \int \frac{d\varphi}{dx}\, d\sigma - b_1 I_y - \eta b_1 \frac{I_y - I_x}{2},$$

$$(2) \qquad \frac{E}{\mu} Y = \int \frac{d\varphi}{dy}\, d\sigma - b_2 I_x - \eta b_2 \frac{I_x - I_y}{2},$$

$$(3) \qquad Z = aS,$$

$$(4) \qquad M_x = a_2 I_x,$$

$$(5) \qquad M_y = a_1 I_y,$$

$$(6) \qquad \frac{E}{\mu} M_z = \int \left(y \frac{d\varphi}{dx} - x \frac{d\varphi}{dy} \right) d\sigma + k(I_x + I_y) - b_1 \int x^2 y\, d\sigma + b_2 \int y^2 x\, d\sigma$$
$$- \eta \left[\frac{b_2}{2} \int x(x^2 + y^2)\, d\sigma - \frac{b_1}{2} \int y(x^2 + y^2)\, d\sigma \right].$$

Les équations (3), (4) et (5) fournissent respectivement a, a_1, a_2.

Les équations (1) et (2) fournissent b_1 et b_2, car on peut démontrer que les intégrales $\int \frac{d\varphi}{dx}\, d\sigma$ et $\int \frac{d\varphi}{dy}\, d\sigma$ ne dépendent pas de la forme analytique de la fonction φ. Il suffit de leur appliquer le théorème de Green. Mais on peut obtenir très directement b_1 et b_2 en remplaçant les équations (1) et (2) par deux autres équivalentes. Il suffit d'écrire des équations analogues à (4) et (5), non plus pour la base inférieure, mais pour une section transversale arbitraire, d'ordonnée h.

Dans cette section, le moment des forces extérieures, par rapport à une parallèle à Ox, est, par exemple, $Mx + hY$. Ce moment doit être égal à $\int N_3 y\, d\sigma$, la valeur de N_3, dans cette intégrale, ayant

pour valeur

$$N_3 = (a + a_1 x + a_2 y) + h(b_1 x + b_2 y).$$

En développant le calcul, on trouve

$$\int N_3 y \, d\sigma = a_2 I_x + h b_2 I_x,$$

d'où la condition

$$M_x + h Y = a_2 I_x + h b_2 I_x.$$

Cette condition doit être satisfaite, quel que soit h. Il en résulte d'abord l'équation (4) et ensuite la nouvelle relation

$$(2)' \qquad Y = b_2 I_x$$

qui donne b_2.

On trouverait de même pour b_1 la relation

$$(1)' \qquad X = b_1 I_y.$$

Quant à la sixième constante k, elle sera donnée par l'équation (6) quand b_1 et b_2 seront ainsi déterminés.

Il convient de remarquer immédiatement que cette équation (6) se simplifiera notablement dans deux cas importants, savoir :

1° Quand on aura $b_1 = b_2 = 0$, c'est-à-dire quand

$$X = Y = 0;$$

2° Quand on aura affaire à une section symétrique. En effet, dans ce cas, toutes les intégrales qui figurent dans le second membre comme coefficients de b_1 et de b_2 portent sur des fonctions impaires, et deviennent par suite nulles. D'autre part, nous avons vu plus haut que la fonction φ est de la forme

$$b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + k \varphi',$$

et que, dans le cas d'une section symétrique, les fonctions φ_1 et φ_2 sont impaires. Il en sera de même des expressions

$$y \frac{d\varphi_1}{dx} - x \frac{d\varphi_1}{dy} \qquad \text{et} \qquad y \frac{d\varphi_2}{dx} - x \frac{d\varphi_2}{dy}.$$

Par suite, quels que soient b_1 et b_2, ils disparaîtront entièrement de l'équation (6), qui ne renfermera plus que la constante k, et

qui deviendra, tout comme dans le cas précédent,

$$(6)' \qquad \frac{E}{\mu} M_z = k \int \left(y \frac{d\varphi'}{dx} - x \frac{d\varphi'}{dy} \right) d\sigma + k(I_x + I_y).$$

Généralisation de la solution de Saint-Venant. — Ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, la solution obtenue ne peut convenir rigoureusement que lorsque les forces appliquées à la base supérieure du prisme remplissent certaines conditions, et que les forces normales en particulier y suivent une loi de répartition linéaire. Cependant, Saint-Venant a justifié son extension par les considérations suivantes.

En réalité, on ne peut presque jamais connaître la loi de la distribution des forces sur une surface, exception faite du cas particulièrement simple où il s'agit de la pression d'un fluide. Quand on parle d'un système de forces données, on ne connaît que les composantes de leur résultante de translation et celles de leur moment résultant. Dès lors, rien ne permet, en fait, de distinguer deux problèmes, pourtant analytiquement distincts, correspondant à deux systèmes de forces, équivalents au sens de la mécanique rationnelle, pour l'un desquels on aurait la loi de distribution voulue par les formules, tandis que pour l'autre on ne l'aurait pas. Au premier seul de ces problèmes, la solution trouvée serait rigoureusement applicable. Mais il est clair que cette solution doit approximativement convenir au second, du moins dans toute la partie du prisme un peu éloignée de la base.

Pour préciser ce dernier point, supposons qu'on applique simultanément à la base du prisme les deux systèmes de forces envisagés, le second étant changé de signe. On aurait alors affaire à un troisième problème, dans lequel les forces appliquées à la base auraient une résultante de translation nulle et un moment résultant nul. On pourrait donc grouper ces forces en résultantes partielles égales et opposées deux à deux. Or, il est presque évident qu'un pareil système ne saurait produire de déformations appréciables que dans le voisinage des points d'application.

Enfin, on peut ajouter à tout cela une raison qui, de toutes, est peut-être la meilleure, c'est que l'expérience permet de constater dans un certain nombre de cas simples que les déformations d'un solide élastique, en des points un peu éloignés de la région d'appli-

cation d'un système de forces, ne dépendent pas du mode d'application de ces forces, mais seulement de la résultante et du moment résultant du système. Il en est ainsi dans le cas de l'extension d'un barreau prismatique. La forme des mâchoires de l'appareil d'essai n'a aucune influence, et l'on constate les mêmes allongements dans le corps du barreau quand la traction est transmise par divers moyens, mâchoires, broches traversières, etc. Il en est de même dans les phénomènes de torsion de prismes à base circulaire, ou dans ceux de flexion de barreaux de section rectangulaire aisément observables.

Saint-Venant a donc eu raison d'affirmer la valeur pratique de sa belle solution. Elle constitue une justification de l'hypothèse fondamentale de la Résistance des Matériaux et permet de pousser très loin l'analyse des déformations et des tensions intérieures dans les prismes.

Nous allons passer en revue quelques applications et traiter des cas tout à fait simples, dont les solutions peuvent être combinées par voie d'addition pour s'appliquer à des cas plus complexes.

Applications du problème de Saint-Venant.

I. — Extension simple.

Supposons que l'on ait à la fois

$$X = Y = M_x = M_y = M_z = 0 \qquad \text{avec} \qquad Z \neq 0,$$

on aura

$$a = \frac{Z}{S}, \qquad b_1 = b_2 = a_1 = a_2 = k = 0.$$

On en déduit pour les tensions

$$N_3 = a = \frac{Z}{S}, \qquad T_1 = T_2 = 0$$

et, pour les déplacements,

$$u = -\frac{\eta}{E} a x, \qquad v = -\frac{\eta}{E} a y, \qquad w = \frac{1}{E} a z.$$

On retrouve donc les résultats connus.

II. — Flexion simple.

Supposons que l'on ait à la fois

$$X = Y = Z = M_x = M_z = 0 \qquad \text{avec} \qquad M_y = 0.$$

On aura

$$a = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 = \frac{M_y}{I_y}.$$

Quant à la constante k, appelée constante *de torsion*, elle est également nulle, en vertu de l'équation (6)'.

On en déduit pour les tensions

$$N_3 = a_1 x = \frac{M_y}{I_y} x, \qquad T_1 = T_2 = 0$$

et, pour les déplacements,

$$u = -\frac{\eta}{E} a_1 \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{1}{E} a_1 \frac{z^2}{2},$$

$$v = -\frac{\eta}{E} a_1 xy,$$

$$w = \frac{1}{E} a_1 xz.$$

Ces résultats, plus complets que ceux fournis par la Résistance des Matériaux, ne sont pas en contradiction avec eux.

En particulier, si l'on considère les points de la fibre moyenne axe du prisme, pour lesquels on a $x = y = 0$, on trouve

$$u = -\frac{M}{EI} \frac{z^2}{2},$$

d'où

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{M}{EI}.$$

III. — Flexion composée.

Supposons

$$Y = Z = M_x = M_z = 0 \qquad \text{avec} \qquad X \neq 0 \qquad \text{et} \qquad M_y \neq 0.$$

On aura, en vertu de (2)', (3), (4),

$$b_2 = a = a_2 = 0,$$

et, en vertu de (1)′ et (5),

$$b_1 = \frac{X}{I_y}, \qquad a_1 = \frac{M_y}{I_y}.$$

Si la section est quelconque, l'équation (6), dont le premier membre est nul, et qui sera débarrassée de b_2 et de φ_2, fournira pour la constante de torsion k une valeur proportionnelle à b_1, le coefficient de proportionnalité dépendant d'ailleurs des fonctions φ_1 et φ' qu'on peut supposer déterminées à part.

Mais si la section est symétrique, ce que nous supposerons désormais, l'équation (6)′ fournit $k = 0$. Dans ce cas, il n'y a pas de torsion.

Les expressions des déplacements se réduisent à :

$$u = -\frac{\eta}{E}(a_1 + b_1 z)\frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{1}{E}\left(a_1\frac{z^2}{2} + b_1\frac{z^3}{6}\right),$$

$$v = -\frac{\eta}{E}(a_1 + b_1 z)xy,$$

$$w = \frac{1}{E}\left[a_1 xz + b_1 x\left(\frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + b_1\varphi_1\right].$$

Les expressions des tensions sont données par

$$\frac{E}{\mu}T_1 = b_1\frac{d\varphi_1}{dy} - \eta b_1 xy,$$

$$\frac{E}{\mu}T_2 = b_1\frac{d\varphi_1}{dx} - b_1 x^2 - \eta b_1\frac{x^2 - y^2}{2},$$

$$N_3 = (a_1 + b_1 z)x.$$

On peut donner à N_3 la forme la plus expressive :

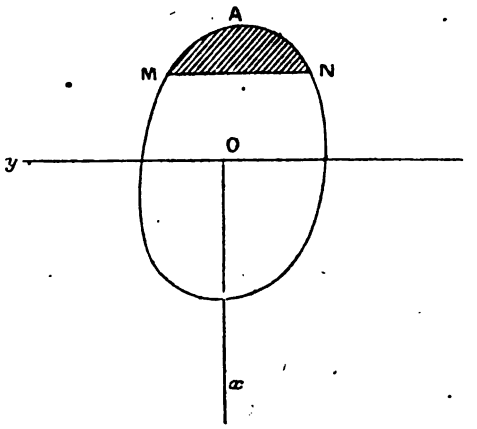
$$N_3 = \frac{1}{I_y}(M_y + Xz)x = \frac{Mx}{I_y},$$

en posant $M = M_y + Xz$. On reconnaît que M est le moment des forces appliquées pris par rapport à la parallèle à Oy menée par le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire par le centre de gravité de la section d'ordonnée z. C'est ce que l'on appelle le moment de flexion relatif à cette section.

Dans une même section, pour z constant, N_3 varie proportionnellement à x distance du point à l'axe neutre, lequel est ici la parallèle à Oy passant par le centre de gravité. Ce sont les résultats de la Résistance des Matériaux.

Quant aux tensions T_1 et T_2, elles dépendent de la fonction φ_1, laquelle dépend elle-même de la forme du contour de la section droite. On ne peut donc avoir leur valeur explicite sans particulariser cette section. Nous en donnerons quelques exemples plus loin. Cependant, quelle que soit la forme de la section, on peut retrouver le résultat relatif à la valeur moyenne de T_2 sur une parallèle telle que MN à Oy dans la section d'ordonnée z.

Fig. 187.



Reprenons l'équation générale d'équilibre

$$\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0.$$

Multiplions par $d\sigma$, élément de surface, puis intégrons pour l'étendue de la surface hachurée MNA. En désignant par α et β les cosinus directeurs de la normale en un point du contour MNA et par dl un élément de ce contour, nous aurons

$$\int\left(\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy}\right) d\sigma = \int (T_2\alpha + T_1\beta)\, dl,$$

l'intégrale simple du second membre étant prise tout le long du contour MNA. Or, tout le long de l'arc de courbe NAM, on a $T_2\alpha + T_1\beta = 0$. C'est la condition à la surface relative aux parois latérales du prisme. D'autre part, tout le long de la droite MN, on

a $\alpha = 1$, $\beta = 0$, de sorte que l'intégrale se réduit à

$$\int_{MN} T_2\, dl,$$

c'est-à-dire à ut_2, si l'on désigne par u la longueur de MN et par t_2 la valeur moyenne de T_2 le long de MN.

D'autre part, on a

$$\int \frac{dN_3}{dz}\, d\sigma = \int b_1 x\, d\sigma = b_1 m,$$

en désignant par m le moment par rapport à Oy de l'aire MNA. On a donc finalement

$$ut_2 = b_1 m = \frac{X}{I_y} m.$$

C'est encore conforme à la Résistance des Matériaux, X étant ici l'effort tranchant.

Cas particulier de la section elliptique. – Nous allons chercher à déterminer pour ce contour la forme de la fonction harmonique φ_1 dont dépendent T_1 et T_2.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'équation de contour, on a

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \qquad \frac{dF}{dy} = \frac{2y}{b^2}.$$

Par suite la fonction φ_1 doit satisfaire à l'équation différentielle qui se déduit de l'équation générale donnée plus haut en faisant $b_1 = 1$, $b_2 = K = 0$, savoir

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dy} - H_1 = 0$$

avec

$$H_1 = \frac{dF}{dx}\left(x^2 + \eta\frac{x^2 - y^2}{2}\right) + \frac{dF}{dy}\eta xy.$$

Cette équation devient ici

$$\frac{x}{a^2}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{y}{b^2}\frac{d\varphi}{dy} = \frac{x}{a^2}\left(x^2 + \eta\frac{x^2 - y^2}{2}\right) + \frac{y}{b^2}\eta xy.$$

On y satisfait en prenant pour φ un polynome harmonique de la forme

$$\varphi = \alpha x + \beta(x^3 - 3xy^2)$$

dont les coefficients α et β sont à déterminer, de manière à obtenir une identité pour les points du contour. Or, pour de tels points, on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha + 3\beta(x^2 - y^2) = \alpha\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + 3\beta(x^2 - y^2),$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -6\beta xy.$$

En substituant, on obtient une équation homogène du troisième degré, ne contenant que des termes en x^3 ou en xy^2. En égalant séparément leurs coefficients à zéro, on obtient les deux équations de condition

$$\frac{\alpha}{a^4} + \frac{3\beta}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{\eta}{2a^2},$$

$$\frac{\alpha}{a^2b^2} - 3\beta\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}\right) = -\frac{\eta}{2a^2} + \frac{\eta}{b^2}.$$

En résolvant par rapport à α et β on trouve

$$(3a^2 + b^2)\alpha = a^2[2a^2(1 + \eta) + b^2],$$

$$(3a^2 + b^2)\beta = \frac{1}{6}[a^2(2 + \eta) + b^2\eta].$$

On trouve alors pour T_1 et T_2 les expressions suivantes :

$$\frac{E}{b_1\mu}T_1 = -6\beta xy - \eta xy = -2xy\frac{a^2(1 + \eta) + b^2\eta}{3a^2 + b^2},$$

$$\frac{E}{b_1\mu}T_2 = \alpha + 3\beta(x^2 - y^2) - x^2 - \eta\frac{x^2 - y^2}{2}$$

$$= \frac{(a^2 - x^2)}{3a^2 + b^2}[2a^2(1 + \eta) + b^2] - \frac{y^2a^2(1 - 2\eta)}{3a^2 + b^2}.$$

On voit que T_1 s'annule pour $x = 0$ et pour $y = 0$, c'est-à-dire tout le long des axes de coordonnées. Il prend des valeurs égales et de signe contraire pour deux points symétriques par rapport à l'un ou à l'autre de ces axes. Sa valeur maxima est atteinte sur le contour aux points où le produit xy est maximum. Le maximum de xy atteint la valeur $\frac{ab}{2}$.

Quant à T_2, il prend des valeurs égales et de même signe pour deux points situés symétriquement par rapport à l'un ou à l'autre des axes. Comme $1 - 2\eta$ est toujours positif, sa valeur maxima s'obtient pour $x = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire au centre de l'ellipse.

Il est nul pour $y = 0$ et $x = \pm a$, c'est-à-dire aux sommets situés sur l'axe Ox. Le long de droites parallèles, soit à Ox, soit à Oy, il varie suivant une loi parabolique.

Cherchons pour différentes valeurs de $\frac{a}{b} = \rho$ et, en supposant $\eta = \frac{1}{4}$, le rapport des valeurs minima et maxima que prend T_2 le long de l'axe Oy. Ce rapport a pour expression générale

$$\frac{2a^2(1+\eta) + b^2 - b^2(1-2\eta)}{2a^2(1+\eta) + b^2} = 1 - \frac{b^2(1-2\eta)}{2a^2(1+\eta) + b^2} = 1 - \frac{1}{5\rho^2 + 2}.$$

On trouve les résultats suivants :

Valeur de $\frac{a}{b} = \rho$.....	$\frac{1}{2}$.	1.	2.	4.
Valeur du rapport.....	0,69	0,86	0,95	0,99

Ces résultats montrent que même pour une section aplatie, telle que sa hauteur soit la moitié seulement de sa longueur, le minimum de T_2 le long de Oy représente encore 69 pour 100 du maximum, et que par suite la valeur moyenne de T_2 représente environ les $\frac{90}{100}$ de ce maximum. Dès que la hauteur atteint ou dépasse la largeur, la valeur moyenne de T_2 sur l'axe de flexion de diffère que de quelques centièmes de sa valeur maxima. La règle usuelle qui consiste à déterminer seulement la valeur moyenne se trouve donc justifiée.

On peut de même comparer le maximum de T_1 au maximum de T_2, c'est-à-dire $ab[a^2(1+\eta) + b^2\eta]$ à $a^2[2a^2(1+\eta) + b^2]$.

Le rapport a pour expression générale

$$\frac{1}{2\rho}\,\frac{5\rho^2 + 1}{5\rho^2 + 2}.$$

Il est égal au précédent rapport multiplié par $\frac{1}{2\rho}$. Pour qu'il devînt supérieur à 1, il faudrait que $\rho = \frac{a}{b}$ devînt voisin de $\frac{1}{4}$. Pour $\rho = 1$, le rapport n'est que de 0,43 environ. C'est donc à bon droit qu'on néglige la détermination de T_1 dans les calculs pratiques de la Résistance des Matériaux.

Cas particulier de la section rectangulaire. — Soit $2a$ le plus

grand côté, supposé parallèle à Ox; $2b$ le plus petit côté, parallèle à Oy.

L'équation au contour se dédouble en deux autres, qu'on peut écrire ainsi :

Pour $x = \pm a$, on doit avoir

$$T_2 = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = x^2 + \eta\frac{x^2 - y^2}{2}.$$

Pour $y = \pm b$, on doit avoir

$$T_1 = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d\varphi_1}{dy} = \eta xy.$$

Essayons la fonction harmonique

$$\varphi = a^2(1+\eta)x + \frac{\eta}{2}\left(xy^2 - \frac{x^3}{3}\right) + A_0 x + \sum_1^\infty A_p(e^{px} - e^{-px})\cos py.$$

Nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dx} = a^2(1+\eta) - \frac{\eta}{2}(x^2 - y^2) + A_0 + \Sigma p A_p(e^{px} + e^{-px})\cos py,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \eta xy - \Sigma p A_p(e^{px} - e^{-px})\sin py.$$

Si l'on fait $p = \frac{m\pi}{b}$, m désignant un nombre entier quelconque, on aura toujours $\sin pb = 0$, et la seconde condition au contour sera bien remplie, $\frac{d\varphi}{dy}$ se réduisant à ηbx.

La première le sera également, si pour $x = a$ on a identiquement

$$a^2(1+\eta) - \frac{\eta}{2}(a^2 - y^2) + A_0 + \sum_1^\infty p A_p(e^{pa} + e^{-pa})\cos py$$
$$= a^2 + \frac{\eta}{2}(a^2 - y^2)$$

ou bien

$$A_0 + \sum_1^\infty \frac{m\pi}{b} A_p\left(e^{\frac{m\pi a}{b}} + e^{-\frac{m\pi a}{b}}\right)\cos\frac{m\pi y}{b} = -\eta y^2.$$

Il s'agit donc de développer la fonction paire $f(y) = -\eta y^2$ suivant un développement de Fourier, valable de $-b$ à $+b$.

Le terme constant A_0 a pour expression

$$A_0 = \frac{1}{b}\int_0^b f(x)\,dx = -\frac{\eta}{b}\int_0^b x^2\,dx = -\eta\frac{b^2}{3}.$$

Le coefficient B_m de $\cos\frac{m\pi y}{b}$ a pour expression

$$B_m = \frac{2}{b}\int_0^b f(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{b}\,d\alpha = -\frac{2\eta}{b}\int_0^b \alpha^2\cos\frac{m\pi\alpha}{b}\,d\alpha.$$

Or, en posant $\frac{\pi\alpha}{b} = z$, on a

$$\int_0^b \alpha^2\cos\frac{m\pi\alpha}{b}\,d\alpha = \frac{b^3}{\pi^3}\int_0^\pi z^2\cos mz\,dz,$$

et l'intégrale générale de $z^2\cos mz\,dz$ est

$$+\frac{z^2}{m}\sin mz + \frac{2z}{m^2}\cos mz - \frac{2}{m^3}\sin mz.$$

Pour $z = 0$ tous les termes s'annulent, et pour $z = \pi$ le second terme seul est différent de zéro et a pour valeur

$$\frac{2\pi}{m^2}\cos m\pi = \frac{2\pi}{m^2}(-1)^m.$$

Finalement on a

$$B_m = -\frac{2\eta}{b}\frac{b^3}{\pi^3}\frac{2\pi}{m^2}(-1)^m = \eta b^2\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{m^2}(-1)^{m-1},$$

et par suite il faut poser

$$A_p = \eta\frac{4b^2}{\pi^3}\frac{1}{m^3}\frac{(-1)^{m-1}}{e^{\frac{m\pi a}{b}} + e^{-\frac{m\pi a}{b}}}.$$

On trouve alors pour déterminer T_1 et T_2 les équations

$$\frac{E}{b_1\mu}T_1 = \frac{d\varphi}{dy} - \eta xy = -\eta\frac{4b^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}\frac{e^{\frac{m\pi x}{b}} - e^{-\frac{m\pi x}{b}}}{e^{\frac{m\pi a}{b}} + e^{-\frac{m\pi a}{b}}}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$\begin{aligned}\frac{E}{b_1\mu}T_2 &= \frac{d\varphi}{dx} - x^2 - \eta\frac{x^2 - y^2}{2}\\ &= (a^2 - x^2)(1+\eta) + \eta\left(y^2 - \frac{b^2}{3}\right)\\ &\quad + \eta\frac{4b^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}\frac{e^{\frac{m\pi x}{b}} - e^{-\frac{m\pi x}{b}}}{e^{\frac{m\pi a}{b}} + e^{-\frac{m\pi a}{b}}}\cos\frac{m\pi y}{b}.\end{aligned}$$

En ce qui concerne T_1, on voit qu'il s'annule pour $x = 0$

et $y = 0$, c'est-à-dire tout le long des lignes qui joignent les milieux des côtés. Il s'annule également le long des grands côtés pour $y = \pm b$. Pour une valeur donnée de x, il atteint son maximum en valeur absolue lorsque $y = \frac{b}{2}$. Alors, dans le second membre, on a $\sin\frac{m\pi}{2} = (-1)^{m-1}$ quand m est impair, et $\sin\frac{m\pi}{2} = 0$ quand m est pair. Son maximum maximorum s'obtient d'ailleurs en faisant $x = a$. Alors le second membre a pour expression en valeur absolue

$$\eta\frac{4b^2}{\pi^2}\sum\frac{1}{m^2}\frac{e^{\frac{m\pi a}{b}} - e^{-\frac{m\pi a}{b}}}{e^{\frac{m\pi a}{b}} + e^{-\frac{m\pi a}{b}}} \quad (m \text{ impair}).$$

En ce qui concerne T_3, le second membre de l'équation correspondante s'annule évidemment pour $x = \pm a$. L'expression renfermant le signe $\sum$ a une valeur moyenne nulle. On s'en assure facilement en intégrant terme à terme de $-b$ à $+b$. A la place des cosinus s'introduisent les sinus de $\frac{m\pi y}{b}$ qui sont nuls aux deux limites. La valeur moyenne est même nulle quand on la prend entre 0 et b, pour le même motif, et d'ailleurs cette expression est paire en y. Ses valeurs extrêmes sont atteintes pour $y = 0$ et $y = b$. Si l'on fait $x = 0$, la première de ces valeurs a pour expression

$$\eta\frac{8b^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}\frac{1}{e^{\frac{m\pi a}{b}} + e^{-\frac{m\pi a}{b}}},$$

et la seconde n'en diffère que par le changement de $(-1)^{m-1}$ en (-1), car $\cos m\pi = (-1)^m$.

Il est facile de se rendre compte que, pour peu que a soit égal ou supérieur à b, comme nous l'avons supposé, ces deux dernières expressions sont très petites et négligeables par rapport à ηb^2. En se bornant au premier terme de ces sommes, on trouve pour $a = b$ et $m = 1$

$$e^{\frac{m\pi a}{b}} = e^{\pi} = 23,14,$$

de sorte que le coefficient de ηb^2 est de l'ordre de grandeur de 0,035. Pour $a = 2b$, il serait de l'ordre de grandeur de 0,0015.

Il suffit donc, pour $x = 0$, de réduire pratiquement l'équation relative à T_2 à

$$\frac{E}{b_1 \mu} T_2 = a^2(1+\eta) + \eta_1\left(y^2 - \frac{b^2}{3}\right).$$

Les valeurs extrêmes du second membre sont :

$$a^2(1+\eta_1) - \eta\frac{b^2}{3} \qquad \text{pour} \qquad y = 0;$$

$$a^2(1+\eta_1) + \eta\frac{2b^2}{3} \qquad \text{pour} \qquad y = b.$$

Sa valeur moyenne est, en intégrant de 0 à b,

$$a^2(1+\eta_1).$$

Le plus grand écart par rapport à cette valeur moyenne a donc pour valeur relative

$$\frac{2}{3}\frac{b^2}{a^2}\frac{\eta}{1+\eta_1}.$$

Si l'on fait $\eta_1 = \frac{1}{4}$ et $\frac{b}{a} = 1$ on trouve $\frac{1}{7}$ seulement.

Pour $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, on trouverait seulement $\frac{1}{28}$. Cela confirme à nouveau la règle pratique de la Résistance des Matériaux.

Si l'on revient maintenant à l'expression donnée plus haut pour le maximum de T_1, on voit également que dès que $a \geqq b$, cette expression est sensiblement égale à

$$\eta\frac{4b}{\pi^2}\sum\frac{1}{m^2} \qquad (m \text{ impair}).$$

Or

$$\sum\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On trouve donc facilement $\eta\frac{b^2}{2}$. Son rapport à la valeur moyenne de T_2 pour $x = 0$ est donc

$$\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{\eta_1}{1+\eta_1} = \frac{1}{10}\frac{b^2}{a^2}.$$

Il est donc toujours notablement plus petit que 1, de sorte qu'on n'a pas à se préoccuper de T_1 dans les calculs pratiques relatifs à la fatigue de la matière.

IV. — Torsion simple.

Dans ce problème, on suppose $X = Y = Z = 0$, $M_x = M_y = 0$ et M_z seul différent de zéro.

Toutes les constantes a et b sont nulles et il reste une seule constante à déterminer, K, constante de torsion, que fera connaître l'équation (6) dès que la fonction φ' aura été déterminée.

Les expressions des déplacements se réduisent à

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = \frac{1}{E} k \varphi',$$

de sorte que la détermination de w ou celle de φ' constituent dans ce cas un seul et même problème.

D'autre part, les expressions des tensions se réduisent à

$$\frac{E}{\mu} T_1 = k\left(\frac{d\varphi'}{dy} - x\right),$$
$$\frac{E}{\mu} T_2 = k\left(\frac{d\varphi'}{dx} + y\right),$$
$$N_3 = 0.$$

Il n'y a donc plus à s'occuper que des tensions T_1 et T_2, lesquelles dépendent de φ'.

L'étude d'un problème de torsion simple consiste donc essentiellement à trouver la fonction harmonique φ' qui satisfait à l'équation au contour de la section transversale, équation qui, dans le cas actuel, s'écrit :

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi'}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi'}{dy} = -\frac{dF}{dx} y + \frac{dF}{dy} x.$$

C'est là un problème difficile en général. Mais on peut traiter un certain nombre de cas simples en suivant une méthode inverse, indiquée par Saint-Venant, et consistant à se donner *a priori* la fonction harmonique φ' et à en déduire au moyen de l'équation différentielle précédente la fonction F qui lui correspond et par suite la forme du contour qui convient. On peut ainsi collectionner un grand nombre de résultats et avoir des solutions approchées pour des formes de sections ne s'écartant pas trop des formes étudiées.

1° *Cas de la section circulaire.* — Supposons $\varphi' = mx + ny + p$.

Cette hypothèse conduit évidemment à une expression linéaire pour le déplacement w. *Elle équivaut donc à supposer que les sections transversales demeurent planes dans la déformation.*

On en déduit

$$\frac{d\varphi'}{dx} = m, \qquad \frac{d\varphi'}{dy} = n,$$

de sorte que l'équation différentielle du contour devient

$$\frac{dF}{dx}(m+y) + \frac{dF}{dy}(n-x) = 0$$

ou encore

$$dy(m+y) - dx(n-x) = 0$$

ou enfin

$$d\frac{x^2+y^2}{2} = n\,dx - m\,dy.$$

En intégrant, on trouve

$$x^2 + y^2 = 2nx - 2my + A.$$

C'est l'équation d'un cercle. On en déduit que c'est seulement dans le cas de sections circulaires, c'est-à-dire dans le cas où l'on a affaire à un cylindre de révolution, que les sections transversales peuvent demeurer planes.

Si l'origine des coordonnées est au centre du cercle, son équation se réduira évidemment à

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

en désignant par R le rayon.

La constante de torsion K se détermine, comme nous l'avons dit, par l'équation (6)' savoir

$$\frac{E}{\mu} M_z = k\left[\int\left(y\frac{d\varphi'}{dx} - x\frac{d\varphi'}{dy}\right)d\sigma + I_x + I_y\right],$$

qui devient dans ce cas particulier, en tenant compte de

$$\int x\,d\sigma = \int y\,d\sigma = 0,$$

$$\frac{E}{\mu} M_z = k[I_x + I_y] = k\frac{\pi R^4}{2}.$$

Les expressions des tensions se réduisent d'ailleurs à

$$T_1 = -\frac{M_z}{I_x + I_y} x = -\frac{2M_z}{\pi R^4} x,$$

$$T_2 = +\frac{M_z}{I_x + I_y} y = \frac{2M_z}{\pi R^4} y.$$

Leur résultante est

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \frac{2M_z}{\pi R^4} r,$$

en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cette résultante est maximum pour $r = R$ et a pour valeur

$$T = \frac{2M_z}{\pi R^3}.$$

2° *Cas de la section elliptique.* — Supposons $\varphi' = mxy$.

Nous aurons

$$\frac{d\varphi'}{dx} = my, \qquad \frac{d\varphi'}{dy} = mx.$$

L'équation au contour sera

$$\frac{dF}{dx}(my + y) + \frac{dF}{dy}(mx - x) = 0$$

ou encore

$$dy(my + y) - dx(mx - x) = 0$$

ou enfin

$$x^2(1 - m) + y^2(1 + m) = A.$$

C'est l'équation d'une courbe du second degré rapportée à ses axes. Ce sera une ellipse si $m < 1$.

Désignons par a et b les demi-axes de cette ellipse, de sorte que son équation soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On aura en identifiant

$$\frac{1 - m}{1 + m} = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

La constante K se déterminera par l'équation (6)', qui devient dans ce cas particulier

$$\frac{E}{\mu} M_z = k(I_x + I_y) + km \int (y^2 - x^2)\, d\sigma$$

$$= k(I_x + I_y) + k\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(I_x - I_y) = 2k\frac{a^2 I_x + b^2 I_y}{a^2 + b^2}.$$

Comme on a

$$I_x = \frac{\pi a b^3}{4}, \qquad I_y = \frac{\pi a^3 b}{4},$$

on trouve finalement

$$k = \frac{E}{\mu} M_z \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}.$$

Les expressions des tensions sont alors

$$T_1 = M_z \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}(m - 1)x = -M_z \frac{2x}{\pi a^3 b},$$

$$T_2 = M_z \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}(m + 1)y = \quad M_z \frac{2y}{\pi a b^3}.$$

Leur résultante est maxima ou minima aux points du contour correspondant à l'un des axes, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, et elle est alors égale soit à T_1, soit à T_2.

A l'extrémité du grand axe, on a

$$T = T_1 = -M_z \frac{2}{\pi a^2 b}.$$

A l'extrémité du petit axe, on a

$$T = T_2 = \quad M_z \frac{2}{\pi a b^2}.$$

C'est cette seconde valeur qui est la plus grande en valeur absolue, et c'est là un résultat digne de remarque, car il est contraire à ce qu'on admettait autrefois *a priori*.

3° *Cas de la section rectangulaire.* — Soit $2a$ le plus grand côté, supposé parallèle à Ox; $2b$ le plus petit côté, supposé parallèle à Oy.

L'équation au contour, qu'on peut écrire, en supprimant l'accent de φ',

$$\frac{dF}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx} + y\right) + \frac{dF}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dy} - x\right) = 0,$$

se dédouble comme il suit :

Pour $x = \pm a$, on a

$$\frac{dF}{dy} = 0 \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -y;$$

Pour $y = \pm b$, on a

$$\frac{dF}{dx} = 0 \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{d\varphi}{dy} = x.$$

Parmi les fonctions harmoniques, essayons la suivante :

$$\varphi = xy + \Sigma A(e^{px} - e^{-px}) \sin py;$$

on en déduit :

$$\frac{d\varphi}{dx} = y + \Sigma A p(e^{px} + e^{-px}) \sin py,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = x + \Sigma A p(e^{px} - e^{-px}) \cos py.$$

Si l'on fait $p = \frac{m\pi}{2b}$ en désignant par m un nombre impair, on aura $\cos pb = \cos \frac{m\pi}{2} = 0$ et la condition $\frac{d\varphi}{dy} = x$ sera satisfaite tout le long des côtés $y = \pm b$.

Le long des côtés $x = \pm a$, on aura alors :

$$\frac{d\varphi}{dx} = y + \Sigma A \frac{m\pi}{2b}\left(e^{\frac{m\pi a}{2b}} + e^{-\frac{m\pi a}{2b}}\right) \sin \frac{m\pi y}{2b}.$$

Pour que la condition $\frac{d\varphi}{dx} = -y$ soit satisfaite sur ces côtés, il faut que l'on ait identiquement

$$\Sigma A \frac{m\pi}{2b}\left(e^{\frac{m\pi a}{2b}} + e^{-\frac{m\pi a}{2b}}\right) \sin \frac{m\pi y}{2b} = -2y.$$

Il s'agit donc de développer la fonction $-2y$ en une série analogue à celle de Fourier, valable entre $-b$ et $+b$, et où figurent seulement les valeurs impaires de l'entier m.

On sait que, si $f(x)$ est une fonction impaire, on peut la développer par une somme de termes

$$\Sigma B_m \sin \frac{m\pi x}{2b},$$

où m est un entier quelconque, et que ce développement est valable

entre $-2b$ et $+2b$, l'expression générale de B_m étant

$$B_m = \frac{2}{2b}\int_0^{2b} f(z)\sin\frac{m\pi z}{2b}\,dz.$$

On a un autre développement, mais valable seulement entre $-b$ et $+b$ en substituant dans l'intervalle $+b$ à $+2b$ la fonction $f(2b-x)$ à $f(x)$. On peut alors remplacer dans l'expression de B_m l'intégrale $\int_0^{2b}$ par $2\int_0$ si m est impair, et par zéro si m est pair.

On obtient alors la formule indiquée par Poisson

$$B_m = \frac{2}{b}\int_0^{b} f(z)\sin\frac{m\pi z}{2b}\,dz.$$

Dans le cas actuel, on a pour m impair

$$\frac{4}{b}\int_0^b z\sin\frac{m\pi z}{2b}\,dz = \frac{4}{b}\left[\frac{2b}{m\pi}z\cos\frac{m\pi z}{2b} - \frac{4b^2}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi z}{2b}\right]_0^b$$
$$= (-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{b}\left(\frac{4b}{m\pi}\right)^2.$$

Il en résulte

$$A = (-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{2b}\left(\frac{4b}{m\pi}\right)^3\frac{1}{e^{\frac{m\pi a}{2b}}+e^{-\frac{m\pi a}{2b}}},$$

et finalement

$$\varphi = xy + \frac{b^2}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^3\sum\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{m^3}\,\frac{e^{\frac{m\pi x}{2b}}-e^{-\frac{m\pi x}{2b}}}{e^{\frac{m\pi a}{2b}}+e^{-\frac{m\pi a}{2b}}}\sin\frac{m\pi y}{2b}.$$

Il est évident, d'ailleurs, que l'on aurait une seconde formule équivalente en permutant x en y et a en b.

Cela posé, la constante K se déterminera par l'équation (6)'. En développant les calculs, Saint-Venant est parvenu à une formule équivalente à la suivante :

$$\frac{E}{\mu}\,\frac{M_z}{k} = \frac{16}{3}ab^3 - b^4\left(\frac{4}{\pi}\right)^5\sum\frac{1}{m^5}\,\frac{e^{\frac{m\pi a}{2b}}-e^{-\frac{m\pi a}{2b}}}{e^{\frac{m\pi a}{2b}}+e^{-\frac{m\pi a}{2b}}}.$$

Il a ensuite mis cette formule sous la forme pratique

$$\frac{E}{\mu}\frac{M_z}{k} = 16ab^3\left(\frac{1}{3} - A\frac{b}{a}\right),$$

et calculé la valeur de A pour un certain nombre de valeurs de l'argument $\frac{a}{b}$. Voici quelques résultats :

$\frac{a}{b}$.	A.	$\frac{a}{b}$.	A.
1.....	0,192 76	3.....	0,210 05
1,25.....	0,202 00	4.....	0,210 08
1,50.....	0,206 36	5.....	0,210 08
1,75.....	0,208 38	10.....	0,210 08
2.....	0,209 30	∞.....	0,210 08
2,5.....	0,209 92		

Quand $a = b$, c'est-à-dire quand la section est carrée, on a

$$\frac{E}{\mu}\frac{M_z}{k} = 2,249\,a^4.$$

En ce qui concerne les tensions, on a

$$\frac{E}{\mu}\frac{T_1}{k} = \frac{d\varphi}{dy} - x = b\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{m^2} \frac{e^{\frac{m\pi x}{2b}} - e^{-\frac{m\pi x}{2b}}}{e^{\frac{m\pi a}{2b}} + e^{-\frac{m\pi a}{2b}}} \cos\frac{m\pi y}{2b},$$

$$\frac{E}{\mu}\frac{T_2}{k} = \frac{d\varphi}{dx} + y = 2y + b\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{m^2} \frac{e^{\frac{m\pi x}{2b}} + e^{-\frac{m\pi x}{2b}}}{e^{\frac{m\pi a}{2b}} + e^{-\frac{m\pi a}{2b}}} \sin\frac{m\pi y}{2b}.$$

On voit facilement que T_1 s'annule pour tout point de l'axe Oy, c'est-à-dire pour $x = 0$, en même temps qu'il s'annule pour $y = \pm b$.

De même T_2 s'annule le long de Ox et des deux petits côtés.

Saint-Venant a montré que c'est toujours au milieu des côtés les plus longs que se produit l'effort maximum. En supposant comme nous l'avons fait $a > b$, c'est donc la valeur de T_2 pour $x = 0$, $y = b$, qu'il faut prendre en considération pour déterminer la fatigue de la matière. Cette valeur résultera de l'équation

$$\frac{E}{\mu}\frac{T_2}{k} = 2b\left[1 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{1}{m^2} \frac{1}{e^{\frac{m\pi a}{2b}} + e^{-\frac{m\pi a}{2b}}}\right].$$

Voici quelques valeurs de la parenthèse, coefficient de $2b$:

$\frac{a}{b}$.	Coefficient.	$\frac{a}{b}$.	Coefficient.
1.....	0,675	3.....	0,985
1,25.....	0,776	3,5.....	0,993
1,50.....	0,847	4.....	0,997
1,75.....	0,896	5.....	0,999
2.....	0,930	10.....	1,000
2,5.....	0,968	∞.....	1,000

Remarques générales sur la méthode indirecte de Saint-Venant. — Nous avons dit plus haut que, lorsqu'on se donne *a priori* la fonction harmonique φ, on peut trouver l'équation du contour qui lui correspond. En effet, l'équation au contour s'écrit :

$$\frac{dF}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}+y\right)+\frac{dF}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dy}-x\right)=0$$

ou encore

$$dy\left(\frac{d\varphi}{dx}+y\right)-dx\left(\frac{d\varphi}{dy}-x\right)=0$$

ou enfin

$$\frac{x^2+y^2}{2}-\int\left(\frac{d\varphi}{dy}dx-\frac{d\varphi}{dx}dy\right)=\text{const.}$$

L'intégrale figurant dans le premier membre peut toujours être déterminée, puisque la condition d'intégrabilité est

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0$$

que remplit précisément par hypothèse la fonction φ.

On voit d'autre part, puisque l'équation finale obtenue renferme une constante arbitraire, qu'à une fonction φ correspond non pas un contour unique, mais une famille de contours. Cette simple remarque permet de traiter dans certains cas les problèmes de torsion relatifs à des prismes ou cylindres creux.

Il suffit, en effet, que les contours, intérieur et extérieur, appartiennent à une famille de courbes correspondant à une même fonction φ. Cette fonction conviendra à la section annulaire comprise entre les deux courbes.

Bien entendu, la constante de torsion K se déterminera toujours

par l'équation (6)', à condition de n'y faire intervenir que les éléments $d\sigma$ de la surface annulaire.

Les exemples traités plus haut donnent donc la solution pour des tubes circulaires d'épaisseur constante, ou pour des tubes elliptiques dont la section serait comprise entre deux ellipses concentriques et semblables, etc.

On sait qu'à toute fonction de variable imaginaire, mise sous la forme $P + Qi$, correspondent deux fonctions harmoniques P et Q, et que P et Q ont ce caractère de satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0,$$

précisément parce que l'on a entre elles les deux relations

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy},$$
$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}.$$

Il en résulte que si l'on a choisi P, par exemple, et si l'on a fait $\varphi = P$, l'équation du contour deviendra

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \int\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy\right) = \text{const.}$$

ou encore

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + Q = \text{const.}$$

Telle est donc, en définitive, la forme générale des équations des contours pour lesquels on peut trouver des solutions relativement simples. Pour les autres, il faut recourir à des approximations ou à des développements en séries.

Pour chaque degré p, il existe deux polynomes homogènes P_p et Q_p qui sont harmoniques. On les obtient en mettant

$$(x + iy)^p$$

sous la forme $P_p + iQ_p$. Cela revient à prendre dans le développement de $(x + y)^p$ les termes de deux en deux, en alternant leurs signes. On a là une ressource non négligeable que Saint-Venant a largement utilisée.

Signalons enfin, en terminant, qu'après avoir étudié une série de contours assez variés, Saint-Venant a reconnu que l'on avait toujours approximativement la relation

$$\frac{E}{\mu}\frac{M_z}{k} = \frac{40S}{I_x + I_y},$$

en désignant par S la surface de la section. On peut vérifier facilement, par les formules données plus haut, que cette relation est exacte pour le cercle et pour l'ellipse. On la considère comme générale. Malheureusement, elle ne dispense pas de la détermination de la fonction φ lorsque l'on a besoin de déterminer les valeurs des tensions T_1 et T_2.

CHAPITRE XXIII.

FLEXION DES PLAQUES PLANES.

I. — Théorie générale.

Définitions et hypothèses. — Une plaque est le solide découpé, dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque, est relativement petite par rapport aux autres dimensions. Nous n'envisagerons ici que des plaques minces, c'est-à-dire telles que l'épaisseur puisse être regardée comme infiniment petite par rapport aux autres dimensions.

On appelle *feuillet moyen* le plan mené à égale distance de deux bases, plan qui sera pris pour axe des xy. La coordonnée z variera de $-h$ à $+h$, l'épaisseur de la plaque étant $2h$.

Nous nous bornerons à examiner le cas où l'une des bases, la base supérieure par exemple, est seule soumise à des charges et où ces charges lui sont normales. D'autre part, la plaque sera supposée recevoir sur tout son pourtour, ou sur une ligne infiniment voisine, les réactions d'appui nécessaires pour équilibrer les charges.

La petitesse supposée de l'épaisseur de la plaque permet d'introduire certaines simplifications, au moins approchées, analogues à celles qui servent de base à la théorie des poutres, où l'on utilise le fait que deux des dimensions sont petites par rapport à la troisième. De même que dans cette dernière théorie on rattache toutes les circonstances de la déformation à celles de la déformation de la fibre moyenne, ici il s'agira de mettre en œuvre les simplifications introduites pour tout rattacher à la déformation du feuillet moyen.

La principale simplification consiste à admettre que dans l'intérieur de la plaque on a partout $N_3 = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de réaction normale entre les différentes tranches découpées par des plans parallèles au feuillet moyen.

Cette condition paraît, au premier abord, incompatible avec l'hypothèse de charges normales appliquées sur la base supérieure. N_3 doit en effet, sur cette base, avoir des valeurs données *a priori*, dans les régions chargées tout au moins. Mais cette difficulté est plus apparente que réelle. Elle est, en tout cas, du même ordre que celle que l'on rencontre pour les poutres, où les hypothèses $N_1 = N_2 = 0$ sont conciliées en pratique avec l'application des forces sur les surfaces latérales. Voici du reste, en gros, comment on peut la résoudre.

Si l'on a affaire à des charges réparties sur des régions étendues de la base supérieure, ces charges sont toujours par unité de surface très petites par rapport aux efforts moléculaires tels que N_1 et N_2 qui se rencontrent dans la masse. La densité des premières est, par exemple, de 1000^{kg} par mètre carré, ou de $0^{kg},001$ par millimètre carré. Les efforts moléculaires sont couramment de l'ordre de 5 à 6^{kg} par millimètre carré. Il n'est donc pas absurde de supposer que N_3 est partout, sinon nul, du moins négligeable par rapport aux autres efforts, et qu'en tout cas il ne peut avoir de valeur appréciable que dans une couche voisine de la base chargée et dont l'épaisseur serait infiniment petite du second ordre.

Si l'on a affaire à des charges concentrées, c'est-à-dire en réalité à des charges dont la densité superficielle est grande, c'est-à-dire comparable à l'intensité des efforts moléculaires, elles ne peuvent intéresser que des zones représentant au total une très faible fraction de la base chargée. Il restera entre elles des zones non chargées, comprenant la presque totalité de la plaque, dans lesquelles la supposition $N_3 = 0$ correspond à la réalité. Dans l'épaisseur de la plaque, il pourra y avoir des régions, voisines des zones chargées, où la distribution des efforts se fera d'une manière en quelque sorte anormale, et pourra même affecter la forme du feuillet moyen. Mais, dans l'ensemble, le tracé du feuillet moyen déformé n'en éprouvera que des perturbations locales, négligeables vis-à-vis de sa déformation générale.

La seconde simplification qui est généralement faite, d'une manière plus ou moins explicite, c'est que les déplacements u, v, parallèles au feuillet moyen, d'un point (x, y, z) sont liés aux déplacements u_0, v_0, w_0 du point correspondant $(x, y, 0)$ du feuillet

moyen par les relations

$$u = u_0 - z\frac{dw_0}{dx},$$

$$v = v_0 - z\frac{dw_0}{dy}.$$

On justifie ces hypothèses par des analogies avec la flexion des poutres, et en généralisant certains résultats exacts que l'on peut obtenir dans certaines conditions de charges et d'appuis. Elles reviennent à dire que, dans la déformation, des éléments de droites perpendiculaires au feuillet moyen demeurent droites et perpendiculaires au feuillet moyen déformé. A la vérité, ainsi que Saint-Venant l'a fait remarquer, il suffirait de poser des équations analogues pour les dérivées $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$.

Le problème étant ainsi défini, le premier objet de la théorie consiste à trouver les équations différentielles auxquelles satisfont les déplacements u_0, v_0, w_0 du feuillet moyen.

Transformation particulière des équations générales d'équilibre élastique. — Les équations générales étant, comme on sait,

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + X = 0,$$

$$\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + Y = 0,$$

$$\frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + Z = 0,$$

on peut tout d'abord les débarrasser des termes X, Y, qui sont ici nuls; puis, sans introduire aucune autre hypothèse que celle relative aux charges, les intégrer par rapport à z sur toute la hauteur $2h$ de la plaque. Cela revient évidemment à poser les conditions d'équilibre des prismes élémentaires de base $dx\,dy$, et de hauteur $2h$.

L'intégration des termes de la troisième colonne, qui sont des dérivées en z, fournira des résultats nuls pour T_2 et T_1, puisque sur les deux bases on a $T_1 = T_2 = 0$, et donnera pour N_3 la valeur qu'atteint cette fonction sur la surface supérieure, et qui est une donnée du problème.

Enfin, $\int Z\,dz$ représente le poids du prisme de hauteur $2h$ et de base unité. C'est également une donnée, et, si on l'ajoute à la valeur de N_3 à la surface, on aura une fonction $-f(xy)$, qui représentera en chaque point (x, y, h) la somme des charges, poids propre et surcharge réunis.

On obtiendra donc les trois équations

$$(1)\qquad \int\left(\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}\right)dz=0,$$

$$(2)\qquad \int\left(\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}\right)dz=0,$$

$$(3)\qquad \int\left(\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}\right)dz=f(xy).$$

L'équation (3), qui contient T_2 et T_1, peut être transformée en la combinant linéairement avec les deux premières équations générales, ou avec celles qu'on en peut déduire par différentiation ou intégration.

Si l'on prend la première équation générale, différentiée par rapport à x, puis multipliée par z et intégrée par rapport à z, on obtient

$$\int z\left(\frac{d^2N_1}{dx^2}+\frac{d^2T_3}{dx\,dy}\right)dz+\int z\,\frac{d^2T_3}{dz\,dx}\,dz=0.$$

Or, le dernier terme intégré par parties donne

$$\left[z\,\frac{dT_2}{dx}\right]_{-h}^{+h}-\int\frac{dT_2}{dx}\,dz=-\int\frac{dT_2}{dx}\,dz.$$

Car, à la surface, pour $z=\pm h$, on a T_2 identiquement nul, ainsi que ses dérivées.

On en déduit

$$\int\frac{dT_2}{dx}\,dz=\int z\left(\frac{d^2N_1}{dx^2}+\frac{d^2T_3}{dx\,dy}\right)dz.$$

On obtiendrait de même

$$\int\frac{dT_1}{dy}\,dz=\int z\left(\frac{d^2T_3}{dx\,dy}+\frac{d^2N_2}{dy^2}\right)dz$$

en se servant de la deuxième équation générale. Par suite, l'équa-

tion (3) peut être remplacée par

$$(3)\qquad \int z\left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} + 2\frac{d^2 T_3}{dx\,dy} + \frac{d^2 N_2}{dy^2}\right) dz = -f(xy).$$

Introduction des hypothèses simplificatrices. Équations du feuillet moyen. — Rappelons les formules qui lient les tensions aux déplacements, savoir :

$$N_1 = (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx} + \lambda\frac{dv}{dy} + \lambda\frac{dw}{dz}, \qquad T_1 = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),$$

$$N_2 = \mu\frac{du}{dx} + (\lambda + 2\mu)\frac{dv}{dy} + \lambda\frac{dw}{dz}, \qquad T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$N_3 = \lambda\frac{du}{dx} + \lambda\frac{dv}{dy} + (\lambda + 2\mu)\frac{dw}{dz}, \qquad T_3 = \mu\left(\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy}\right).$$

De la supposition $N_3 = 0$, on déduit $\frac{dw}{dz}$ en fonction de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$, et, si l'on fait la substitution dans les valeurs de N_1 et N_2, on obtient les expressions suivantes :

$$N_1 = \frac{E}{1-\eta^2}\left(\frac{du}{dx} + \eta\frac{dv}{dy}\right), \qquad N_2 = \frac{E}{1-\eta^2}\left(\eta\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right),$$

E étant le coefficient d'élasticité $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$;

η étant le coefficient de Poisson $\eta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$.

Si, à présent, on introduit les valeurs supposées de u et v dans les expressions de N_1 et N_2, ainsi que dans celle de T_3, on obtient :

$$N_1 = \frac{E}{1-\eta^2}\left[\frac{du_0}{dx} + \eta\frac{dv_0}{dy}\right] - \frac{Ez}{1-\eta^2}\left[\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \eta\frac{d^2 w_0}{dy^2}\right],$$

$$N_2 = \frac{E}{1-\eta^2}\left[\eta\frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dy}\right] - \frac{Ez}{1-\eta^2}\left[\eta\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_0}{dy^2}\right],$$

$$T_3 = \frac{E}{2(1+\eta)}\left[\frac{dv_0}{dx} + \frac{du_0}{dy}\right] - \frac{Ez}{1+\eta}\frac{d^2 w_0}{dx\,dy}.$$

Il ne reste plus qu'à porter ces expressions dans les équations (1), (2) et (3).

Il convient d'observer immédiatement que, dans les intégrations faites par rapport à la variable z, toutes les dérivées de u_0, v_0, w_0,

sont des constantes, et que pour une constante quelconque on a

$$\int A\,dz = 2hA,$$

$$\int Az\,dz = 0,$$

$$\int Az^2\,dz = \frac{2h^3}{3}A = IA$$

en posant $I = \frac{2h^3}{3}$. I est le moment d'inertie de la plaque pour l'unité de longueur de sa section.

L'équation (1) donnera donc simplement, puisque les termes en z fournissent un résultat nul;

$$\int\left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dy}\right]dz = \frac{Eh}{1-\eta^2}\left[\frac{d^2u_0}{dx_0} + \frac{1+\eta}{2}\frac{d^2v_0}{dx\,dy} + \frac{1-\eta}{2}\frac{d^2u_0}{dy^2}\right] = 0.$$

L'équation (2) fournirait une équation toute semblable, et ces deux équations différentielles simultanées du second ordre ne contiennent que u_0 et v_0 à l'exclusion de w_0. La détermination des déplacements horizontaux u_0 et v_0 du feuillet moyen est donc indépendante de celle des déplacements verticaux, au moins en ce qui concerne leur forme générale. Elle est indépendante des charges.

D'autre part, dans l'équation (3'), on n'a pas à tenir compte des termes indépendants de z. Les autres donnent

$$f(xy) = -\frac{EI}{1-\eta^2}\left[\frac{d^4w_0}{dx^4} + \eta\frac{d^4w_0}{dx^2\,dy^2}\right.$$
$$\left. + 2(1-\eta)\frac{d^4w_0}{dx^2\,dy^2} + \eta\frac{d^4w_0}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4w_0}{dy^4}\right]$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{EI}{1-\eta^2}\left[\frac{d^4w_0}{dx^4} + 2\frac{d^4w_0}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4w_0}{dy^4}\right] = -f(xy)$$

ou encore

$$\frac{EI}{1-\eta^2}\Delta\Delta w_0 = -f(xy).$$

C'est l'équation de Lagrange. Elle est du quatrième ordre et permet de déterminer w_0 indépendamment de u_0 et v_0.

Il y a donc, au point de vue de leurs expressions générales, indépendance complète entre w_0 d'une part, et u_0, v_0 d'autre part.

Aussi se borne-t-on, en pratique, à supposer $u_0 = v_0 = 0$, et à déterminer w_0 par l'équation de Lagrange.

Expressions simplifiées des tensions. — En ce qui concerne N_1, N_2, T_3, nous en avons donné plus haut les expressions, et il suffit d'y supposer nulles les quantités u_0 et v_0.

En ce qui concerne T_1 et T_2, on ne peut en écrire les valeurs locales, car on ne connaît pas la façon dont w varie avec z.

Mais on peut exprimer les valeurs totales de T_1 et T_2 sur des éléments verticaux ayant pour base dx ou dy, et pour hauteur l'épaisseur de la plaque $2h$. En effet, si l'on prend la deuxième équation générale d'équilibre, et si, après l'avoir multipliée par z, on l'intègre par rapport à z, on obtient

$$\int_{-h}^{+h} z\left[\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy}\right] dz + \int_{-h}^{+h} z\frac{dT_1}{dz}\, dz = 0.$$

Or, le dernier terme intégré par parties donne

$$|z T_1|_{-h}^{+h} - \int_{-h}^{+h} T_1\, dz = -\int_{-h}^{+h} T_1\, dz,$$

car à la surface on a $T_1 = 0$. Il en résulte, en désignant par T'_1 la valeur de l'intégrale cherchée,

$$\begin{aligned} T'_1 &= \int z\left[\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy}\right] dz \\ &= -\frac{E}{1-\eta^2}\int z^2\, dz\left[(1-\eta)\frac{d^3 w_0}{dx^2\, dy^2} + \eta\frac{d^3 w_2}{dx^2\, dy} + \frac{d^3 w_0}{dy^3}\right] \end{aligned}$$

ou

$$T'_1 = -\frac{EI}{1-\eta^2}\left[\frac{d^3 w_0}{dx^2\, dy} + \frac{d^3 w_0}{dy^3}\right].$$

On trouverait de même pour l'intégrale $\int_{-h}^{+h} T_2\, dz = T'_2$

$$T'_2 = -\frac{EI}{1-\eta^2}\left[\frac{d^3 w_0}{dx^3} + \frac{d^3 w_0}{dx\, dy^2}\right].$$

Ces expressions donnent donc les cisaillements, parallèlement à Oz, sur des éléments de hauteur $2h$ et perpendiculaires respectivement à Oy et Ox.

Considérons maintenant un élément vertical quelconque, et

appelons α l'angle que fait sa normale avec Ox, les cosinus directeurs de cette normale étant par suite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et o. Les composantes X, Y, Z des tensions sur cet élément seront

$$\begin{aligned} X &= N_1 \cos\alpha + T_3 \sin\alpha, \\ Y &= T_3 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha, \\ Z &= T_2 \cos\alpha + T_1 \sin\alpha. \end{aligned}$$

Si l'on envisage les deux premières de ces équations, on reconnaît qu'elles sont exactement de la même forme que celles que l'on a à considérer en élasticité à deux dimensions, T_1 et T_2 n'intervenant aucunement. On en déduira toutes les mêmes conséquences.

La composante normale et la composante tangentielle horizontale seront

$$\begin{aligned} N &= X \cos\alpha + Y \sin\alpha, \\ T &= -X \sin\alpha + Y \cos\alpha. \end{aligned}$$

Le maximum et le minimum de N s'obtiendront pour les valeurs de α satisfaisant à l'équation.

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2T_3}{N_1 - N_2}.$$

Ces directions pourront encore être appelées directions principales.

Si en quelque point on a à la fois $N_1 = N_2 = 0$, les plus grandes tensions seront égales à T_3 et seront dirigées parallèlement aux bissectrices des axes Ox et Oy, etc.

Si l'on envisage la dernière équation, donnant la valeur de Z, et si on l'intègre par rapport à z, dans toute l'épaisseur de la plaque, on obtient, en désignant l'intégrale $\int Z\,dz$ par Z', la relation

$$Z' = T'_2 \cos\alpha + T'_1 \sin\alpha.$$

Z' est le cisaillement (ou effort tranchant) parallèle à Oz, sur l'élément vertical considéré. Sa valeur est donc

$$Z' = -\frac{EI}{1-\eta^2}\left[\left(\frac{d^3 w_0}{dx^3} + \frac{d^3 w_0}{dx\,dy^2}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2\,dy} + \frac{d^3 w_0}{dy^3}\right)\sin\alpha\right].$$

Équation de condition à la surface de la plaque. — Il est bien évident que les conditions à la surface sont d'elles-mêmes remplies,

en ce qui concerne les deux bases, quelles que soient les quantités ou fonctions arbitraires qui se seront introduites dans la détermination de w_0, d'après la seule considération de l'équation de Lagrange. On en a fait état d'une manière explicite dans la transformation des équations indéfinies d'équilibre. Il reste donc à satisfaire aux conditions que l'on s'imposera sur la surface latérale de la plaque.

Si l'on supposait toutes les quantités arbitraires déterminées *a priori*, les valeurs de X et Y pour un élément de cette surface, et la valeur de Z′ pour un élément de hauteur $2h$ ne pouvaient être évidemment que conformes aux expressions données plus haut. Z′ en particulier représenterait la réaction verticale de l'appui au pourtour.

Si, au contraire, on veut que X et Y aient des valeurs données *a priori*, par exemple dans le cas où la surface latérale ne supporte pas de réactions horizontales, et que par suite $X = Y = 0$, les expressions données se changent en équations auxquelles les quantités arbitraires devront satisfaire.

Il n'est pas sans intérêt de vérifier que si l'on intègre Z′ pour tout le pourtour de la plaque, on retrouvera la charge totale que celle-ci supporte.

On sait, en effet, que l'intégrale suivant un contour peut se transformer en une intégrale double appliquée à l'aire enfermée par ce contour, au moyen de la relation connue

$$\int (Xl + Ym)\, ds = \int\int \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) dx\, dy.$$

Son application au cas actuel donne

$$\begin{aligned}\int Z'\, ds &= -\frac{EI}{1-\eta^2}\int\int\left(\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 2\frac{d^4 w_0}{dx^2\, dy^2} + \frac{d^4 w_0}{dy^4}\right) dx\, dy \\ &= -\int\int f(xy)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Dans tout ce qui suivra nous supprimerons, pour faciliter l'écriture, l'indice de w_0, aucune confusion n'étant plus à craindre.

Observation sur l'équation de Lagrange. — On peut tout d'abord faire ressortir la grande analogie qui existe entre cette équation et

l'équation différentielle des poutres droites, savoir :

$$EI\frac{d^4 w}{dx^4} = p.$$

On passe de l'une à l'autre en supposant que $p = f(xy)$ ne dépend pas de y et que les appuis sont tels qu'il en soit de même de w. Il faut constater cependant la disparition du facteur $\frac{1}{1-\eta^2}$, qui tient à ce que, dans la flexion des poutres droites, on suppose $N_2 = 0$, ce qui suppose la libre dilatation des sections dans le sens des y.

Les différents problèmes que l'on se pose à propos des poutres ne diffèrent les uns des autres que par les hypothèses relatives aux conditions des appuis. Pour les plaques, il en est absolument de même. En effet, supposons que, pour une certaine hypothèse faite au sujet des réactions au pourtour, on ait trouvé une fonction $w = w'$ satisfaisant à toutes les conditions du problème. Pour une autre hypothèse quelconque, on pourra poser

$$w = w' + w_1$$

et l'on aura évidemment

$$\Delta\Delta w_1 = 0.$$

Il s'agira donc uniquement d'ajouter à la première solution w_1, une solution de l'équation précédente (équation de Lagrange sans second membre) et de faire en sorte que la solution complète satisfasse aux nouvelles conditions imposées au pourtour. Nous avons vu comment on pouvait composer des solutions de cette dernière équation, qui joue un si grand rôle dans toutes les questions d'élasticité. A défaut de la solution générale et complète, on pourra, dans certains cas, utiliser une série finie ou infinie de solutions particulières et disposer des coefficients arbitraires pour satisfaire exactement ou approximativement aux conditions données sur le contour.

Nous utiliserons cette remarque à l'occasion des plaques rectangulaires encastrées, ou posées sur appuis élastiques.

II. — Plaques circulaires uniformément chargées.

Soit R le rayon de la plaque et soit p la charge par mètre carré qu'elle supporte. La fonction $f(xy)$ se réduit à cette constante dans le second membre de l'équation de Lagrange.

Par raison de symétrie, le premier membre de cette équation doit se réduire à une simple fonction de r, rayon vecteur allant du centre de la plaque au point (xyO). En prenant des coordonnées semi-polaires la transformation se fait aisément, toutes les dérivées par rapport à l'angle α étant nulles.

On a

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha,$$

et l'on en déduit :

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} = \cos\alpha, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \sin\alpha,$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{\sin\alpha}{r}, \qquad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{\cos\alpha}{r}.$$

On trouve par suite (en supprimant l'indice de w_0) :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dw}{dr}\cos\alpha$$

et

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw}{dr}\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^2w}{dr^2}\frac{dr}{dx}\cos\alpha - \frac{dw}{dr}\sin\alpha\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2w}{dr^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\sin^2\alpha,$$

$$\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2w}{dr^2}\sin^2\alpha + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\cos^2\alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right).$$

Enfin, en répétant la même opération $\frac{d}{dx^2} + \frac{d}{dy^2}$, on a l'équation

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 2\frac{d^4w}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4w}{dy^4}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = -\frac{1-\eta^2}{EI}p.$$

Cette équation s'intègre facilement. En multipliant par r et intégrant, on a d'abord pour l'accolade $\{\quad\}$ l'expression

$$-\frac{(1-\eta^2)pr^2}{2EI} + A.$$

En divisant par r et intégrant une seconde fois, on a pour la

parenthèse carrée [ ] l'expression

$$-\frac{(1-\eta^2)pr^2}{4\,\mathrm{EI}}+\mathrm{A}\log r+\mathrm{B}.$$

Multipliant par r et intégrant une troisième fois, on a

$$r\frac{dw}{dr}=-\frac{(1-\eta^2)pr^4}{16\,\mathrm{EI}}+\mathrm{A}\left(\frac{r^2}{2}\log r-\frac{r^2}{4}\right)+\mathrm{B}\frac{r^2}{4}+\mathrm{C}.$$

Ou, en désignant par les mêmes lettres A, B, C d'autres constantes, on a, pour $\frac{dw}{dr}$, une expression de la forme

$$\frac{dw}{dr}=-\frac{(1-\eta^2)pr^3}{16\,\mathrm{EI}}+\mathrm{A}r\log r+\mathrm{B}r+\frac{\mathrm{C}}{r}.$$

Finalement, on obtient

$$w=-\frac{(1-\eta^2)pr^4}{64\,\mathrm{EI}}+\mathrm{A}\left(\frac{r^2}{2}\log r-\frac{r^2}{4}\right)+\mathrm{B}\frac{r^2}{4}+\mathrm{C}\log r+\mathrm{D}.$$

Ou, en changeant encore de constantes pour simplifier l'écriture,

$$w=-\frac{(1-\eta^2)pr^4}{64\,\mathrm{EI}}+\mathrm{A}r^2+\mathrm{B}+\mathrm{C}\log r+\mathrm{D}r^2\log r.$$

Dans le cas qui nous occupe, on doit faire $\mathrm{C}=0$, car sans cela on aurait $w=-\infty$ pour $r=0$, ce qui est absurde. On doit encore avoir $\mathrm{D}=0$, car sans cela on aurait $\frac{d^2w}{dr^2}=\infty$ pour $r=0$, ce qui est également impossible à admettre, la surface du feuillet moyen ne pouvant avoir de point anguleux en son centre.

La constante B se détermine aisément en fonction de A, en écrivant que $w=0$ pour $r=\mathrm{R}$, de sorte que l'on a

$$w=-\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}(r^4-\mathrm{R}^4)+\mathrm{A}(r^2-\mathrm{R}^2).$$

Quant à la constante A elle dépendra des conditions que l'on s'imposera sur la surface latérale de la plaque, et nous distinguerons deux cas: celui où la plaque est encastrée sur tout son pourtour, et celui où elle est simplement appuyée.

Dans le premier cas, il faut écrire *a priori* que $\frac{dw}{dv}=0$ au pourtour, et l'on en déduit la valeur que doit avoir la composante nor-

male N sur la surface latérale pour que cette condition soit remplie.

Dans le second cas, on devra écrire que cette composante N est nulle au pourtour. En considérant le point situé sur l'axe des x, pour lequel $\alpha = 0$, on a d'ailleurs

$$N = X = N_1 = -\frac{Ez}{1-\eta^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \eta_1 \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$
$$= -\frac{Ez}{1-\eta^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \eta \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right).$$

1° *Plaque encastrée.* — On a

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{(1-\eta^2)p}{16EI} r^3 + 2Ar.$$

On déterminera donc A par la condition

$$-\frac{(1-\eta^2)p}{16EI} R^3 + 2AR = 0,$$

d'où

$$A = \frac{(1-\eta^2)pR^2}{32EI}.$$

L'équation du feuillet moyen est, par suite,

$$w = -\frac{(1-\eta^2)p}{64EI}[r^4 - R^4 - 2R^2(r^2 - R^2)] = -\frac{(1-\eta^2)p}{64EI}(r^2 - R^2)^2.$$

La flèche f au centre est la valeur maxima de w et a pour valeur

$$f = -\frac{(1-\eta^2)pR^4}{64EI}. = -\frac{p R^4}{64 D}$$ où $D = \frac{EI}{(1-\eta^2)}$.

Calculons maintenant les valeurs de N_1 et N_2 pour un point quelconque de l'axe des x. Ces tensions sont proportionnelles à z et atteignent leurs plus grandes valeurs pour $z = \pm h$. Nous supposerons généralement $z = +h$. Les valeurs calculées se rapporteront ainsi toutes à la base supérieure et pourront être comparées en grandeur et en signe.

En tenant compte des expressions de $\frac{d^2w}{dx^2}$ et $\frac{d^2w}{dy^2}$ pour $y = \alpha = 0$, on a d'abord

$$N_1 = -\frac{Ez}{1-\eta^2}\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \eta\frac{d^2w}{dy^2}\right] = -\frac{Ez}{1-\eta^2}\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\eta}{r}\frac{dw}{dr}\right].$$

Or, on a

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}(4r^3 - 4\mathrm{R}^2 r),$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}(12r^2 - 4\mathrm{R}^2),$$

et par suite

$$\mathrm{N}_1 = \frac{ph}{64\,\mathrm{I}}[4(3+\eta)r^2 - 4\mathrm{R}^2(1+\eta)];$$

N_1 est négatif et représente une compression au centre, pour $r = 0$, et y atteint la valeur

$$\mathrm{N}_1 = -\frac{ph}{64\,\mathrm{I}}4\mathrm{R}^2(1+\eta),$$

qui est d'ailleurs le minimum de N_1.

Il est positif et représente une tension sur le contour, pour $r = \mathrm{R}$ et y atteint la valeur

$$\mathrm{N}_1 = \frac{ph}{64\,\mathrm{I}}8\mathrm{R}^2.$$

Cette valeur est *indépendante des coefficients d'élasticité* et est toujours plus grande en valeur absolue que la précédente, puisque $2 > 1 + \eta$.

Quant à N_2, il a pour expression

$$\mathrm{N}_2 = -\frac{\mathrm{E}z}{1-\eta^2}\left[\eta\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right] = -\frac{\mathrm{E}z}{1-\eta^2}\left[\eta\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right],$$

ce qui conduit à la valeur

$$\mathrm{N}_2 = \frac{ph}{64\,\mathrm{I}}[4(1+3\eta)r^2 - 4\mathrm{R}^2(1+\eta)].$$

Pour $r = 0$, N_2 atteint encore son minimum négatif, égal à celui de N_1.

Pour $r = \mathrm{R}$, N_2 est positif, et représente une tension, dont la valeur est

$$\mathrm{N}_2 = \frac{ph}{64\,\mathrm{I}}8\mathrm{R}^2\eta,$$

toujours inférieure à la valeur correspondante de N_1. C'est donc cette dernière seule qui est à retenir pour calculer la fatigue de la matière, dont le taux est ainsi : $\frac{3}{16}\frac{p\mathrm{R}^2}{h^2}$, quand on remplace I par sa valeur $\mathrm{I} = \frac{2h^3}{3}$.

Il reste à examiner la plus grande valeur des cisaillements. Sur la circonférence d'un cercle de rayon $r < R$, la charge est $p \times \pi r^2$. Elle se répartit sur la surface cylindrique $2\pi r \times 2h$. Le cisaillement moyen est $\frac{pr}{4h}$. Il est maximum pour $r = R$.

La fatigue au cisaillement est toujours inférieure à la fatigue due à la flexion, exprimée par la valeur de N_1 au pourtour. Pour qu'il en fût autrement, il faudrait que l'on eût

$$\frac{3}{16}\frac{R}{h} < \frac{1}{4} \qquad \text{ou} \qquad R < \frac{4}{3}h.$$

On n'aurait plus affaire à une véritable plaque mince.

2° *Plaque simplement appuyée au pourtour.* — On doit cette fois déterminer A par la condition que N_1 s'annule au pourtour, c'est-à-dire pour $r = R$. Etant donnée l'expression de N_1, cette condition revient à écrire

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\eta}{r}\frac{dw}{dr} = 0.$$

Or, on a

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,EI}\,4r^3 + 2Ar,$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,EI}\,12r^2 + 2A.$$

On en déduit

$$2A(1+\eta) = \frac{(1-\eta^2)p}{64\,EI}\,4R^2(3+\eta).$$

L'équation du feuillet moyen est alors

$$w = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,EI}\left[r^4 - R^4 - 2R^2(r^2 - R^2)\frac{3+\eta}{1+\eta}\right].$$

La flèche au centre s'obtient en faisant $r = 0$:

$$f = -\frac{(1-\eta^2)pR^4}{64}\,\frac{5+\eta}{1+\eta}.$$

Si on la compare à celle trouvée pour la plaque encastrée, on voit qu'elle est plus grande, leur rapport étant $\frac{5+\eta}{1+\eta}$. Si l'on suppose $\eta = \frac{3}{10}$, ce rapport est $\frac{53}{13} = 4{,}08$.

Pour calculer N_1 et N_2, il faut reprendre le calcul de $\frac{dw}{dr}$ et de $\frac{d^2w}{dr^2}$.

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,EI}\left[4r^3 - 4R^2 r\frac{3+\eta}{1+\eta}\right],$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,EI}\left[12r^3 - 4R^2\frac{3+\eta}{1+\eta}\right].$$

La tension N_1 a pour expression

$$N_1 = \frac{Ez}{1-\eta^2}\left[\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{\eta}{r}\frac{dw}{dr}\right] = \frac{ph}{64\,I}4(3+\eta)(r^2 - R^2).$$

Elle est nulle au contour et minima au centre, pour $r=0$, où elle est négative et où elle atteint la valeur

$$N_1 = -\frac{ph}{64\,EI}4R^2(3+\eta).$$

Quant à N_2, elle a pour expression

$$N_2 = -\frac{Ez}{1-\eta^2}\left[\eta\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] = \frac{ph}{64\,I}[4r^2(3\eta+1) - 4R^2(3+\eta)].$$

Pour $r=0$, on retombe sur une valeur négative égale à celle de N_1. C'est d'ailleurs un minimum. Pour $r=R$, c'est-à-dire au contour, on trouve

$$N_2 = \frac{ph}{64\,I}8R^2(\eta-1),$$

valeur encore négative et forcément plus petite que la précédente. On voit d'ailleurs directement que $2(1-\eta) < 3+\eta$.

Le taux de fatigue de la matière est donc donné ici par l'expression $\frac{3}{32}(3+\eta)\frac{pR^2}{h^2}$, en remplaçant I par sa valeur.

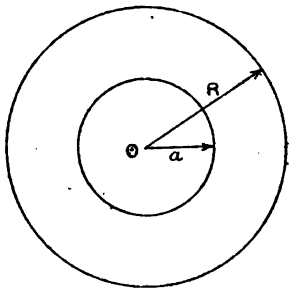
Si on le compare à celui qui correspond au bord de la plaque encastrée, on voit qu'il est plus fort et dans le rapport $\frac{3+\eta}{2}$. Ce rapport est égal à $\frac{33}{20} = 1{,}65$ si $\eta = \frac{3}{10}$.

On obtient pour la valeur du cisaillement au pourtour le même résultat que plus haut.

III. — Plaques circulaires incomplètement soumises a une charge uniforme, ou soumises a une charge centrale concentrée.

Nous supposerons d'abord qu'une charge uniforme p soit appliquée seulement à l'intérieur d'un cercle de rayon $a < R$.

Fig. 188.



L'équation différentielle du feuillet moyen sera la même que précédemment dans l'intérieur du cercle chargé, de sorte que w y sera toujours donné par la formule

$$w = -\frac{(1-\eta^2)pr^4}{64EI} + Ar^2 + B.$$

Dans la couronne annulaire, l'équation différentielle du feuillet moyen sera privée de son second membre, et si, pour éviter toute confusion, nous désignons par w' le déplacement vertical dans cette région et par $A'B'C'D'$ de nouvelles constantes arbitraires, nous aurons simplement dans cette région

$$w' = A'r^2 + B' + C'\log r + D'r^2\log r.$$

Ici encore, on doit faire $C' = 0$, car on ne saurait avoir $w' = \infty$ pour $r = 0$.

La constante B' se détermine par la condition $w' = 0$ pour $r = R$, ce qui donne

$$0 = A'R^2 + B' + D'R^2\log R,$$

de sorte que w' se réduit à

$$w' = A'(r^2 - R^2) + D'(r^2\log r - R^2\log R).$$

D'autre part, pour $r = a$, les deux surfaces doivent se raccorder.

On doit donc poser les conditions :

$$w = w', \qquad \frac{dw}{dr} = \frac{dw'}{dr}, \qquad \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{d^2 w'}{dr^2}$$

pour $r = a$. Cela détermine trois des constantes A B' A' D' en fonction de l'une d'elles, A par exemple. Les équations de conditions développées deviennent :

$$-\frac{1-\eta^2}{64\,\mathrm{EI}} p a^4 + \mathrm{A} a^2 + \mathrm{B} = \mathrm{A}'(a^2 - \mathrm{R}^2) + \mathrm{D}\,(a^2 \log a - \mathrm{R}^2 \log \mathrm{R}),$$

$$-\frac{1-\eta^2}{64\,\mathrm{EI}} 4 p a^3 + 2\mathrm{A} a \quad = 2\mathrm{A}' a + \mathrm{D}'(2 a \log a + a),$$

$$-\frac{1-\eta^2}{64\,\mathrm{EI}} 12 p a^2 + 2\mathrm{A} \quad = 2\mathrm{A}' + \mathrm{D}'(2 \log a + 3).$$

Des deux dernières, on déduit

$$\mathrm{D}' = -\frac{4(1-\eta^2)}{64\,\mathrm{EI}} p a^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}' = \mathrm{A} + \frac{4(1-\eta^2)}{64\,\mathrm{EI}} p a^2 \log a,$$
$$= \mathrm{A} - \mathrm{D}' \log a.$$

Ensuite, la première donne

$$\mathrm{B} = (\mathrm{A} - \mathrm{D}' \log a)(a^2 - \mathrm{R}^2) - \mathrm{A} a^2 + \mathrm{D}\,(a^2 \log a - \mathrm{R}^2 \log \mathrm{R}) - \mathrm{D}' \frac{a^2}{4},$$
$$= -\mathrm{AR}^2 - \mathrm{D}' \left(\frac{a^2}{4} - \mathrm{R}^2 \log \frac{\mathrm{R}}{a}\right),$$
$$= -\mathrm{AR}^2 + \frac{(1-\eta^2)}{64\,\mathrm{EI}} p a^2 \left(a^2 + 4\mathrm{R}^2 \log \frac{\mathrm{R}}{a}\right).$$

Les équations donnant w et w' deviennent d'ailleurs

$$w = -\frac{(1-\eta^2) p (r^4 - a^4)}{64\,\mathrm{EI}} + \mathrm{A}(r^2 - \mathrm{R}^2) + \frac{4(1-\eta^2) p a^2 \mathrm{R}^2}{64\,\mathrm{EI}} \log \frac{\mathrm{R}}{a},$$
$$w' = \mathrm{A}(r^2 - \mathrm{R}^2) - \frac{4(1-\eta^2)}{64\,\mathrm{EI}} p a^2 \left[r^2 \log \frac{r}{a} - \mathrm{R}^2 \log \frac{\mathrm{R}}{a}\right].$$

Il reste à déterminer la constante A d'après les conditions au pourtour de la plaque.

1° *Plaque encastrée.* — On doit avoir $\frac{dw'}{dr} = 0$ pour $r = \mathrm{R}$,

ce qui donne :

$$2AR - \frac{4(1-\eta^2)}{64EI} pa^2 \left[2R \log \frac{R}{a} + R\right] = 0,$$

$$A = \frac{4(1-\eta^2)}{64EI} pa^2 \left[\log \frac{R}{a} + \frac{1}{2}\right].$$

On a donc finalement les expressions

$$w = -\frac{(1-\eta^2)p}{64EI}\left[r^4 - a^4 - 2a^2(r^2 - R^2) - 4a^2r^2 \log\frac{R}{a}\right],$$

$$w' = -\frac{(1-\eta^2)p}{64EI}\left[4a^2r^2 \log\frac{r}{R} - 2a^2(r^2 - R^2)\right].$$

La flèche au centre s'obtient en faisant $r = 0$ dans la première formule. Elle est

$$f = -\frac{(1-\eta^2)pa^2(2R^2 - a^2)}{64EI}.$$

En ce qui concerne les tensions, on procédera comme précédemment. Nous nous bornerons au calcul de

$$N_1 = -\frac{Eh}{1-\eta^2}\left[\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\eta}{r}\frac{dw}{dr}\right].$$

Sur la couronne annulaire $a < r < R$, on a $w = w'$:

$$\frac{dw'}{dr} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64EI} 8a^2 r \log\frac{r}{R},$$

$$\frac{d^2w'}{dr^2} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64EI} 8a^2 \left(\log\frac{r}{R} + 1\right),$$

$$N_1 = \frac{ph}{64I} 8a^2 \left[(1+\eta)\log\frac{r}{R} + 1\right].$$

Pour $r = R$, on trouve la valeur positive et indépendante des coefficients d'élasticité

$$N_1 = \frac{ph}{64I} 8a^2.$$

Pour $r = a$, on trouve

$$N_1 = \frac{ph}{64I} 8a^2 \left[(1+\eta)\log\frac{a}{R} + 1\right].$$

Cette valeur est toujours algébriquement inférieure à la précé-

dente. Elle est positive ou négative, suivant que

$$\log \frac{R}{a} \gtrless \frac{1}{1+\eta_1}.$$

Dans l'intérieur du cercle chargé $r < a$, on a

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{(1-\eta_1^2)p}{64EI}\left[4r^3 - 4a^2r - 8a^2r\log\frac{R}{a}\right],$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{(1-\eta_1^2)p}{64EI}\left[12r^2 - 4a^2 - 8a^2\log\frac{R}{a}\right],$$

$$N_1 = \frac{ph}{64I}\left[(12+4\eta_1)r^2 - 4a^2(1+\eta_1) - 8a^2\log\frac{R}{a}(1+\eta_1)\right].$$

Pour $r = a$, on retrouve la valeur précédente.
Pour $r = 0$, on trouve la valeur toujours négative

$$N_1 = -\frac{ph}{64I}8a^2(1+\eta_1)\left[\log\frac{R}{a} + \frac{1}{2}\right].$$

La valeur maxima de N_1 n'est plus forcément rencontrée sur le pourtour de la plaque, comme cela avait lieu dans le cas d'une charge complète. Elle se rencontrera, au contraire, au centre, lorsque le rapport $\frac{R}{a}$ sera suffisamment grand, et, l'on peut même préciser, quand ce rapport satisfera à l'inégalité

$$\frac{R}{a} > e^{\frac{1-\eta_1}{1+\eta_1}}$$

On vérifie que, pour $a = R$, on retombe sur les formules trouvées précédemment pour la plaque complètement chargée.

Il est intéressant de reconnaître ce que deviennent ces diverses formules, lorsque a devient de plus en plus petit et tend vers zéro, en même temps que la charge totale $P = \pi a^2 p$ demeure constante, c'est-à-dire quand on envisage une charge concentrée placée au centre de la plaque.

La formule qui donne la flèche tend vers une limite finie

$$f = -\frac{P}{\pi}\frac{(1-\eta_1^2)}{64EI}2R^2.$$

La formule qui donne N_1 au bord de la plaque tend également vers une limite finie. Mais celle qui donne N_1 au centre conduit à

une valeur infinie, car la parenthèse $\left[\frac{1}{2}+\log\frac{R}{a}\right]$ devient infinie. Toutefois, il faut remarquer que cette parenthèse croît lentement lorsque a diminue. Pour $a=0,01R$, elle n'a encore pour valeur que 5,10 environ.

La fiction analytique d'une charge concentrée n'est donc pas admissible pour ces calculs. En réalité, une charge dite concentrée est simplement une charge de densité superficielle relativement grande, mais limitée, ce qui veut dire que le cercle de répartition de rayon a, que nous avons supposé, peut être très petit relativement au rayon de la plaque, mais non pas rigoureusement nul. Il sera nécessaire de se faire une idée de la grandeur de a avant d'être en mesure d'apprécier les conditions de résistance de la plaque à la flexion.

Il en serait d'ailleurs de même pour d'autres efforts, et en particulier pour les efforts de cisaillement. Au pourtour du cercle chargé, l'effort moyen de cisaillement serait évidemment $\frac{P}{4\pi ah}$. Il tend, lui aussi, vers l'infini pour $a=0$. Il croît même plus vite que N_1.

Enfin, il en est de même de l'intensité de la charge qui est $\frac{P}{\pi a^2}$, et croît comme le carré de $\frac{1}{a}$. Quand a devient de plus en plus petit, cette valeur de l'intensité de la charge peut devenir incompatible avec la résistance de la matière.

2° *Plaque simplement appuyée.* — On doit cette fois déterminer A par la condition que N_1 s'annule au pourtour, c'est-à-dire pour $r=R$.

On a

$$\frac{dw'}{dr}=2Ar-\frac{(1-\eta_1^2)p}{64EI}4a^2\left[2r\log\frac{r}{a}+r\right],$$

$$\frac{d^2w'}{dr^2}=2A-\frac{(1-\eta_1^2)p}{64EI}4a^2\left[2\log\frac{r}{a}+3\right].$$

On en déduit

$$2A(1+\eta_1)=\frac{(1-\eta_1^2)p}{64EI}4a^2\left[2(1+\eta_1)\log\frac{R}{a}+3+\eta_1\right],$$

d'où

$$A=\frac{(1-\eta_1^2)p}{64EI}4a^2\left[\log\frac{R}{a}+\frac{3+\eta_1}{2(1+\eta_1)}\right].$$

On a donc finalement les expressions

$$w = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}\left[r^4 - a^4 - 2a^2(r^2 - \mathrm{R}^2)\frac{3+\eta}{1+\eta} - 4a^2r^2\log\frac{\mathrm{R}}{a}\right],$$

$$w' = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}\left[4a^2r^2\log\frac{r}{\mathrm{R}} - 2a^2\frac{3+\eta}{1+\eta}(r^2 - \mathrm{R}^2)\right].$$

La flèche au centre s'obtient en faisant $r = 0$ dans la première formule

$$f = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}a^2\left[2\mathrm{R}^2\frac{3+\eta}{1+\eta} - a^2\right].$$

Comparons cette formule à celle de la plaque encastrée. Le rapport des deux flèches a pour expression générale

$$\frac{2\mathrm{R}^2\frac{3+\eta}{1+\eta} - a^2}{2\mathrm{R}^2 - a^2}.$$

Lorsque $a = \mathrm{R}$, ce rapport atteint $\frac{5+\eta}{1+\eta}$, ainsi que nous l'avions trouvé précédemment. Lorsque a tend vers zéro, ce rapport tend vers $\frac{3+\eta}{1+\eta}$ seulement. Pour $\eta = \frac{3}{10}$, il va donc en décroissant de 4,08 environ à $\frac{33}{13} = 2{,}5$ environ.

La valeur de N_1 dans l'intérieur du cercle chargé $r < a$ se déduit des formules

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}\left[4r^3 - 4a^2r\frac{3+\eta}{1+\eta} - 8a^2r\log\frac{\mathrm{R}}{a}\right],$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{(1-\eta^2)p}{64\,\mathrm{EI}}\left[12r^2 - 4a^2\frac{3+\eta}{1+\eta} - 8a^2\log\frac{\mathrm{R}}{a}\right],$$

$$\mathrm{N}_1 = \frac{ph}{64\,\mathrm{I}}\left[4r^2(3+\eta) - 4a^2(3+\eta) - 8a^2(1+\eta)\log\frac{\mathrm{R}}{a}\right].$$

Pour $r = a$, on trouve la valeur toujours négative

$$\mathrm{N}_1 = -\frac{ph}{64\,\mathrm{I}}8a^2(1+\eta)\log\frac{\mathrm{R}}{a}.$$

Pour $r = 0$, on trouve la valeur toujours négative et supérieure en valeur absolue

$$\mathrm{N}_1 = -\frac{ph}{64\,\mathrm{I}}8a^2(1+\eta)\left[\log\frac{\mathrm{R}}{a} + \frac{(3+\eta)}{2(1+\eta)}\right].$$

Cette dernière formule est à comparer à celle qui lui correspond dans le cas de la plaque encastrée. Le terme $\frac{1}{2}$ dans la parenthèse est simplement remplacé par $\frac{1}{2}\frac{3+\eta}{1+\eta}$ qui a pour valeur habituelle $\frac{1}{2}\times\frac{33}{13}$, pour $\eta=\frac{3}{10}$.

Quand la plaque est complètement chargée, $\log\frac{R}{a}=0$, et le rapport des deux valeurs de N_1 atteint $\frac{33}{13}=2,5$ environ. Au contraire, lorsque a est petit, c'est le terme $\log\frac{R}{a}$ qui devient prépondérant dans la parenthèse, et le rapport des efforts tend vers l'unité. Il convient de remarquer que, dans le dernier cas, ce rapport est bien celui des plus grandes fatigues de la pièce à la flexion, car dans la plaque encastrée N_1 est plus grand au centre que sur le pourtour, lorsque a est suffisamment petit. Pour $a=R$, la plus grande fatigue pour la plaque encastrée se rencontre sur son pourtour et le rapport des plus grandes fatigues serait celui que nous avons déterminé précédemment, savoir : $\frac{3+\eta}{2}=1,55$ environ.

En réalité, le rapport des plus grandes fatigues de la plaque appuyée et de la plaque encastrée varie de 1,55 à 1, lorsque a varie de $a=R$ à $a=0$, toutes les autres circonstances étant supposées les mêmes.

Remarques. — Avant de terminer ce qui est relatif aux plaques circulaires, on peut remarquer que l'équation de Lagrange s'intégrerait sans difficulté si, au lieu de supposer une pression uniforme dans un cercle de rayon a, on supposait une pression donnée par une fonction algébrique simple de r. On peut, par exemple, envisager la formule $p=\frac{2P}{\pi a^4}(a^2-r^2)$, qui fournirait $p=0$ pour $r=a$ et $p=\frac{2P}{\pi a^2}$, c'est-à-dire le double de la pression moyenne, pour $r=0$. Cette répartition doit se rapprocher beaucoup plus de la réalité pour des charges dites concentrées.

On peut se servir aussi, dans certains cas, des formules qui viennent d'être trouvées et les intégrer directement, en supposant qu'on a une série de charges uniformes dans des cercles de rayon variables entre 0 et a. La charge élémentaire uniforme afférente

au cercle de rayon $r < a$ sera, par exemple, $dp = -\frac{4Pr}{\pi a^4}\,dr$. On aura donc à remplacer dans les formules a par la variable d'intégration r, puis à remplacer p par dp, et à intégrer de $r = a$ à $r = 0$.

Considérons, par exemple, le cas de la plaque encastrée.

Nous avons obtenu pour la flèche au centre la formule

$$f = -\frac{(1-\eta^2)pa^2(2R^2-a^2)}{64EI}.$$

En faisant les changements indiqués, nous obtiendrons

$$f = -\frac{(1-\eta^2)}{64EI}\frac{4P}{\pi a^4}\int_0^a r^3(2R^2-r^2)\,dr = -\frac{(1-\eta^2)}{64EI}\frac{4P}{\pi a^4}\frac{a^4}{6}(3R^2-a^2)$$

ou encore

$$f = -\frac{(1-\eta^2)}{64EI}\frac{P}{\pi}\frac{2}{3}(3R^2-a^2).$$

Si on la compare à la première formule, après avoir remplacé dans celle-ci pa^2 par $\frac{P}{\pi}$, on constate que l'on trouve la même valeur limite pour $a = 0$. Cela veut dire que pour une charge concentrée P la flèche ne dépend pas du mode de répartition de la charge.

Si l'on fait $a = R$, c'est-à-dire si l'on suppose la plaque chargée dans toute son étendue, on trouve que dans le cas où la répartition de la charge P suit la loi parabolique supposée, la flèche devient les $\frac{1}{3}$ de ce qu'elle serait dans le cas d'une répartition uniforme.

On peut faire un calcul tout semblable pour la valeur de N_1 au centre. Nous avons trouvé

$$N_1 = -\frac{8h(1+\eta)}{64I}pa^2\left[\log\frac{R}{a} + \frac{1}{2}\right].$$

En faisant les changements indiqués nous obtiendrons

$$N_1 = -\frac{8h(1+\eta)}{64I}\frac{4P}{\pi a^4}\int_0^a r^3\left[\log\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\right]dr$$
$$= -\frac{8h(1+\eta)}{64I}\frac{P}{\pi}\left[\log\frac{R}{a} + \frac{3}{4}\right].$$

La nouvelle expression ne diffère de la première que par le remplacement de $\frac{1}{2}$ par $\frac{3}{4}$ dans la parenthèse.

Lorsque a est petit par rapport à R, cas d'une charge concentrée, c'est le terme $\log \frac{R}{a}$ qui est prépondérant, et la modification de la valeur de N_1 est insignifiante.

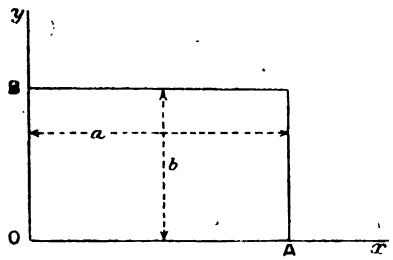
Lorsque l'on a $a = R$, plaque complètement chargée, on a au contraire $\log \frac{R}{a} = 0$, et N_1 a pour valeur une fois et demie sa valeur primitive.

Si l'on faisait le même calcul pour la valeur de N_1 au pourtour, on verrait qu'elle ne dépend pas de la répartition de la charge. On peut le reconnaître *a priori* d'après son expression primitive, qui ne dépend que de pa^2, c'est-à-dire de la valeur totale de la charge.

IV. — Plaques rectangulaires simplement appuyées a leur pourtour.

Principe de la méthode de Navier. — Le problème des plaques rectangulaires simplement appuyées, mais chargées d'une manière quelconque, a été résolu par Navier dès 1820. Sa belle solution, très générale, introduit des séries doubles dont le maniement est heureusement moins compliqué qu'il ne le paraît, et Navier a montré que dans le cas simple d'une charge uniforme on peut réduire ces séries, très convergentes, à un très petit nombre de termes, ce qui fournit des solutions aussi simples et aussi pratiques

Fig. 189.



qu'on peut le désirer. Le principe de la méthode consiste dans l'emploi d'un développement de Fourier pour représenter la fonction $f(xy)$ qui définit la charge.

Prenons pour origine des coordonnées l'un des angles de la plaque et plaçons l'axe des x dans la direction de l'un de ses côtés OA, de longueur a, l'axe des y dans la direction de l'autre côté OB, de longueur b.

On sait qu'une fonction quelconque de x peut être représentée dans l'intervalle de o à a par la série

$$f(x) = \sum_1^\infty A_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

et que le coefficient A_m a pour valeur

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(\alpha) \sin \frac{m\pi\alpha}{a} d\alpha.$$

Une fonction de deux variables $f(xy)$ peut de même être représentée dans le rectangle de côtés a et b par la série double

$$f(xy) = \sum_1^\infty \sum_1^\infty A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

le coefficient A_{mn} ayant pour valeur

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a d\alpha \int_0^b d\beta\, f(\alpha\beta) \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}.$$

Une fois opérée cette représentation de $f(xy)$ il suffit de considérer à part les différentes charges simples représentées par chacun des termes de la série et de faire ensuite la somme des résultats obtenus.

Dans le cas considéré d'une plaque simplement appuyée à son pourtour, la solution correspondant à chaque charge simple est en effet immédiate. Considérons, par exemple, la charge simple

$$f(xy) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

L'équation de Lagrange correspondante s'écrira

$$\Delta\Delta w = -\frac{1-\eta^2}{EI} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Elle sera satisfaite par une expression de la forme

$$w_{mn} = B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

On trouve, en effet :

$$\Delta w_{mn} = -\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \pi^2 w_{mn},$$

$$\Delta \Delta w_{mn} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \pi^4 w_{mn}.$$

La seule condition à remplir pour que l'équation de Lagrange soit identiquement satisfaite est donc

$$B_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \pi^4 = -\frac{1 - \eta_1^2}{EI} A_{mn}.$$

D'un autre côté, les conditions au contour sont toutes satisfaites. En effet, ces conditions sont :

1° que l'on ait $w = 0$ sur les quatre côtés. Elle est évidemment remplie. Il en découle du reste nécessairement que l'on a $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$ tout le long des côtés a, parallèles à Ox et $\frac{d^2 w}{dy^2} = 0$ tout le long des côtés b, parallèles à Oy ;

2° que l'on ait $N_1 = 0$ le long des côtés b. Cela revient, en vertu de l'expression de N_1 à la condition $\frac{d^2 w}{dx^2} + \eta_1 \frac{d^2 w}{dy^2} = 0$, ou à la condition plus simple $\frac{d^2 w}{dx^2} = 0$. Elle est évidemment remplie et il en résulte de même que l'on aura $N_2 = 0$ le long de ces mêmes côtés ;

3° que l'on ait $N_2 = 0$ le long des côtés a. On le reconnaîtra de la même façon, et tout le long de ces côtés on aura par surcroît $N_1 = 0$.

On obtiendra donc une solution terme à terme, ce qui est très remarquable, et il est presque évident que si $f(xy)$ peut pratiquement être représenté par la somme d'un petit nombre de termes, il suffira pour avoir une solution approchée de considérer ces termes-là seulement. Il ne sera pas nécessaire alors de s'inquiéter de la convergence des séries que la suite des calculs ferait apparaître dans la solution complète. Autrement dit, on aura substitué à la charge $f(xy)$, dont la connaissance est d'ailleurs toujours impar-

faite, une autre charge pratiquement équivalente, ou du moins jugée telle, et fournissant des résultats simples.

Cas d'une charge uniformément répartie sur toute la plaque. Supposons que $f(xy)$ se réduise à une constante p. D'après le principe général, on la développera en série de Fourier. Le coefficient A_{mn} du développement aura pour expression

$$A_{mn} = \frac{4p}{ab}\int_0^a d\alpha \sin\frac{m\pi\alpha}{a}\int_0^b d\beta \sin\frac{n\pi\beta}{b}$$
$$= \frac{4p}{mn\pi^2}(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi).$$

Ce coefficient est nul si l'un des nombres m ou n est pair. Il a pour valeur $A_{mn} = \frac{16p}{mn\pi^2}$ lorque les deux nombres m et n sont à la fois impairs. Nous ne retiendrons donc expressément que les nombres impairs.

Il serait facile de s'assurer qu'il suffit d'un assez petit nombre de termes du développement pour réaliser une charge pratiquement équivalente à une charge uniforme, du moins pour l'ensemble de la plaque.

En se limitant aux quatre premiers termes, par exemple, on obtiendrait, au lieu d'une surface de charge parfaitement réglée suivant un plan, une surface de charge plus ou moins mamelonnée, mais qui, pratiquement, serait aussi rationnelle que la première. Nous n'insisterons pas sur ce point, car dans le cas actuel il n'y a aucune difficulté à considérer les séries complètes et à profiter des avantages de leur convergence rapide.

En vertu de ce qui a été dit plus haut, la solution w_{mn} correspondant au terme A_{mn} a pour expression

$$w_{mn} = -\frac{(1-\eta^2)p}{EI}\frac{16}{\pi^6}\frac{1}{mn\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

La solution complète est, par suite,

$$w = -\frac{(1-\eta^2)p}{EI}\frac{16}{\pi^6}\sum\frac{1}{mn\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs impaires de m et de n, depuis l'unité jusqu'à l'infini.

Cette expression est symétrique en a et b. On peut y mettre en évidence l'une ou l'autre de ces dimensions et leur rapport $\rho = \frac{a}{b}$.

En mettant a en évidence, on obtient l'expression

$$(A) \quad w = -\frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\frac{16}{\pi^6}\sum\frac{1}{mn(m^2+n^2\rho^2)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

En mettant b en évidence, on obtiendrait de même

$$(B) \quad w = -\frac{(1-\eta^2)pb^4}{EI}\frac{16}{\pi^6}\sum\frac{1}{mn\left[\frac{m^2}{\rho^2}+n^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Observations sur la convergence de la série représentant w et de ses dérivées successives. — On démontre dans les cours d'Analyse que la série double $\sum\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ dans laquelle m et n peuvent prendre toutes les valeurs entières, de 1 à ∞, est absolument convergente, lorsque α est plus grand que 1.

En effet, considérons tous les termes pour lesquels m et n sont égaux ou inférieurs à un nombre donné x. Leur nombre est x^2. De même le nombre des termes pour lesquels m et n sont égaux ou inférieurs à $x+1$ est $(x+1)^2$. Par suite, le nombre de ceux pour lesquels l'un au moins des nombres m et n est égal à $x+1$, sans que l'autre dépasse $x+1$, est

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x+1 < 2(x+1).$$

Or, chacun de ces termes est au plus égal à

$$\frac{1}{[(x+1)^2+1]^\alpha} < \frac{1}{(x+1)^{2\alpha}}.$$

Leur somme sera donc au plus égale à

$$\frac{2(x+1)}{(x+1)^{2\alpha}} = \frac{2}{(x+1)^{2\alpha-1}}.$$

La série sera absolument convergente, pourvu que l'on ait

$$2\alpha - 1 > 1 \quad \text{ou} \quad \alpha > 1.$$

Ce résultat s'applique *a fortiori* lorsque les suites des nombres

m et n ne comprennent que les nombres impairs. Il s'applique encore à la série $\sum \frac{1}{(m^2+n^2\rho^2)^2}$, quel que soit ρ.

Cette dernière série est une fonction du paramètre ρ qui va en décroissant lorsque ρ augmente.

Enfin, le résultat s'applique à la série entrant dans l'expression de w puisque les différents facteurs introduits sont tous inférieurs à l'unité en valeur absolue. Cette serie étant absolument convergente, on peut la dériver terme à terme, soit par rapport à x, soit par rapport à y, et les séries dérivées sont elles-mêmes convergentes. On peut s'assurer par le même procédé qu'elles sont absolument convergentes. Il en est de même des dérivées secondes.

Par exemple, pour $\frac{d^2w}{dx^2}$ on aura à envisager la convergence de la série double

$$\sum \frac{m}{n(m^2+n^2\rho^2)^2}.$$

Or, on a évidemment

$$\frac{m}{n} < m < (m^2+n^2\rho^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, cette série est encore absolument convergente.

En ce qui concerne les dérivées troisièmes, il en sera de même quand toutes les dérivations ne seront pas faites par rapport à une même variable. Mais, dans le cas contraire, quand il s'agit de $\frac{d^3w}{dx^3}$ par exemple, on a à considérer une série double de la forme

$$\sum \frac{m^2}{n(m^2+n^2\rho^2)^2}.$$

Sa convergence est liée à celle de la série plus simple

$$\sum \frac{1}{n(m^2+n^2)}$$

qui est encore absolument convergente.

Groupons en effet, dans cette dernière, les termes qui correspondent à une valeur donnée de n. Leur somme sera $\frac{1}{n}A_n$ en désignant par A_n la série simple

$$A_n = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2+n^2}$$

qui est convergente quel que soit n. Sa valeur tend, d'ailleurs, vers zéro quand n croît indéfiniment, car on peut écrire

$$A_n = \sum_{m=1}^{m=p} + \sum_{m=p}^{m=\infty}$$

et l'on peut, quel que soit n, trouver un nombre fixe p suffisamment grand pour que le second terme de cette somme soit plus petit que toute quantité donnée. Quant au premier terme, il peut également être rendu plus petit que toute quantité donnée, en prenant n suffisamment grand.

En conséquence, la série $\sum \frac{A_n}{n}$ est absolument convergente.

Les dérivées quatrièmes de w seront donc convergentes.

En résumé, on pourra donc, dans tous les calculs où n'interviennent que les dérivées d'un ordre inférieur à quatre, opérer ces calculs terme à terme.

Il faut, du reste, remarquer que les termes des séries obtenues ne seront jamais tous de même signe. Prenons, par exemple, celle qui représente w. Quel que soit le rapport $\frac{x}{a}$, le facteur $\sin\frac{m\pi x}{a}$ est positif pour $m = 1$, puis il passe alternativement par une série de valeurs positives et négatives lorsque m croît indéfiniment. Il en est de même du facteur $\sin\frac{n\pi y}{b}$.

On pourra donc former des groupes de termes alternativement positifs, et négatifs suivant certaines lois procédant par valeurs croissantes de m et de n, et la valeur absolue de ces groupes ira forcément en décroissant à partir d'un certain rang puisque la série des modules est convergente. On pourra donc se rendre compte du degré d'approximation obtenu, comme pour toute série alternée.

Flèche au centre. — Un des premiers résultats à déduire de l'expression générale de w, c'est la valeur de la flèche au centre de la plaque, qu'on obtient en faisant $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$. C'est un maximum pour w, attendu qu'on a alors $\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} = 0$.

On a

$$\sin\frac{m\pi x}{a} = \sin\frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$\sin\frac{m\pi y}{b} = \sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

et, par suite,

$$f = -\frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\frac{16}{\pi^6}\sum\frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn(m^2+n^2\rho^2)^2} = -\frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\frac{16}{\pi^6}F(\rho)$$

en désignant par $F(\rho)$ la valeur de la série double. Pour calculer $F(\rho)$, on peut grouper ensemble les termes correspondant à une valeur constante de $m+n$. Le premier groupe, correspondant à $m+n=2$, comprendra un seul terme ($m=1$, $n=1$). Le second groupe, correspondant à $m+n=4$, en comprendra deux ($m=3$ avec $n=1$ et $m=1$ avec $n=3$), et ainsi de suite. Ces groupes seront alternativement positifs et négatifs.

Le Tableau suivant donne, pour un certain nombre de valeurs de ρ, les résultats que l'on obtient pour $F(\rho)$ en limitant les calculs à un groupe de rang égal ou inférieur à 5.

	$\rho=\frac{1}{3}$.	$\rho=\frac{1}{2}$.	$\rho=1$.	$\rho=2$.	$\rho=3$.
Un groupe.....	2,810000	0,640000	0,250000	0,040000	0,010000
Deux groupes.....	0,722651	0,604546	0,243333	0,037784	0,008921
Trois groupes.....	0,738093	0,609587	0,244268	0,038096	0,009112
Quatre groupes.....	0,734015	0,608338	0,244038	0,038018	0,009061
Cinq groupes.....	0,735659	0,608766	0,244116	0,038045	0,009079

On voit combien la convergence est rapide. Il suffirait, en pratique, de s'arrêter toujours au second groupe, l'erreur relative commise étant de l'ordre de grandeur du centième.

Il est bien clair d'ailleurs, puisque rien ne distingue la suite des nombres m de celle des nombres n, que l'on doit avoir la relation

$$F\left(\frac{1}{\rho}\right) = \rho^4 F(\rho).$$

A la limite, pour $\rho = 0$, on peut mettre $F(\rho)$ sous la forme d'un produit de deux séries simples :

$$F(0) = \sum\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}.$$

On connaît du reste la valeur de ces séries simples, donnée dans les cours d'analyse :

$$\sum\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sum\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} = \frac{5\pi^5}{2^9\times 3}.$$

On en déduit

$$F(0) = \frac{5\pi^6}{2^{11} \times 3} = 0,78223.$$

On en déduit aussi, en tenant compte de la relation

$$F\left(\frac{1}{\rho}\right) = \rho^4 F(\rho)$$

que, pour la limite $\rho = \infty$, on a $F(\rho) = 0$. On aurait même $\rho^3 F(\rho) = 0$, puisque $\rho^4 F(\rho)$ tend vers une une limite finie.

Cela suffit à définir la courbe représentant $F(\rho)$. Nous en récapitulons quelques valeurs dans le Tableau suivant :

	$\rho = 0.$	$\rho = \frac{1}{3}.$	$\rho = \frac{1}{2}.$	$\rho = 1.$	$\rho = 2.$	$\rho = 3.$	$\rho = \infty.$
$F(\rho)$...	0,78223	0,73566	0,60876	0,24411	0,03804	0,009079	0

Supposons, que a restant constant, on fasse croître b indéfiniment, de manière que ρ tende vers zéro. La flèche tendra vers la valeur

$$f = -\frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\,\frac{5}{384};$$

c'est la formule qui conviendrait à une poutre droite de portée a, avec cette seule différence qu'elle contient le facteur $1 - \eta^2$. Il en sera de même pour la plupart des formules qui seront successivement rencontrées. Le facteur $1 - \eta^2$ tient compte des liaisons qui sont imposées le long des côtés parallèles à Ox, lesquels ne peuvent s'abaisser comme dans la poutre droite.

Inclinaison de la plaque à son pourtour. — Désignons par J l'inclinaison de la plaque à son pourtour. Ce sera l'angle fait par son plan tangent avec le plan horizontal.

Considérons d'abord le côté OB, dirigé suivant Oy. L'inclinaison est la valeur pour $x = 0$ de $\frac{dw}{dx}$. Le plan tangent contenant toujours le bord de la plaque, la surface déformée s'y raccorde avec une surface réglée.

En utilisant la formule (A), on a d'une manière générale

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{(1-\eta^2)pa^3}{EI}\,\frac{16}{\pi^5}\sum \frac{1}{n(m^2+n^2\rho^2)^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Si l'on fait $x = 0$, le second membre devient une simple fonction de y et l'on a

$$J = -\frac{(1-\eta^2)pa^3}{EI}\frac{16}{\pi^5}\sum\frac{1}{n(m^2+n^2\rho^2)^2}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

On peut suivre les variations de J lorsque y varie entre o et b. Aux deux extrémités pour $y = 0$ et $y = b$ on a $J = 0$. En deux points symétriques par rapport au milieu du côté, c'est-à-dire pour deux valeurs telles que y et $y' = b - y$, on a deux valeurs égales. On a donc toujours un maximum pour $y = \frac{b}{2}$. Ce maximum a pour valeur

$$J_{max} = -\frac{(1-\eta^2)pa^3}{EI}\frac{16}{\pi^5}J(\rho)$$

en posant

$$J(\rho) = \sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(m^2+n^2\rho^2)^2}.$$

Cette série est encore très convergente. Pour la limite $\rho = 0$, la valeur de $J(\rho)$ se présente sous la forme d'un produit de deux séries simples qui sont

$$\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sum\frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (^1),$$

de sorte qu'on a

$$J(0) = \frac{\pi^5}{384} = 0,8052.$$

Pour la limite $\rho = \infty$, on a $J(\rho) = 0$. C'est presque évident, chacun des termes devenant nul. Mais voici une démonstration qui s'applique à beaucoup d'autres cas analogues et qui précise l'allure de la fonction, en fournissant une limite supérieure. Groupons

---

(1) *Voir* JORDAN. *Cours d'Analyse*, t. I, p. 360. Si n est entier, pair ou impair, on a

$$\sum\frac{1}{n^{2m}} = B_m\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{1,2,3,\ldots,2m},$$

B_m étant le $m^{\text{ième}}$ nombre bernoullien. D'autre part, si X représente la somme réduite aux seuls nombres impairs, on a évidemment

$$\sum\frac{1}{n^{2m}} = X + \frac{1}{2^{2m}}\sum\frac{1}{n^{2m}}.$$

ensemble tous les termes pour lesquels n a une valeur donnée. Leur somme sera la série simple

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{nm^4\left(1+\frac{n^2\rho^2}{m^2}\right)^2}.$$

Or, on a, pour tout nombre α compris entre 1 et 4, l'inégalité évidente

$$\left(1+\frac{n^2\rho^2}{m^2}\right)^2 > \frac{n^\alpha\rho^\alpha}{m^\alpha}.$$

Par suite, la série simple est inférieure à $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\alpha+1}\rho^\alpha}\sum\frac{1}{m^{4-\alpha}}$.

La somme figurant dans cette expression a une limite finie M pourvu que α soit inférieur à 3, de sorte que la série simple considérée sera inférieure à $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\alpha+1}\rho^\alpha}$ M.

La série double $J(\rho)$ sera donc elle-même inférieure à

$$\frac{M}{\rho^\alpha}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}} = \frac{MN}{\rho^\alpha}$$

en désignant par N la série convergente $\sum\frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

On a donc non seulement $J(\rho)=0$, mais encore $\rho^2 J(\rho)=0$ pour $\rho=\infty$. On a même $\rho^\alpha J(\rho)=0$ pour α aussi voisin qu'on le veut du nombre 3.

Voici une Table sommaire des valeurs de $J(\rho)$:

	$\rho=0.$	$\rho=\frac{1}{3}.$	$\rho=\frac{1}{2}.$	$\rho=1.$	$\rho=2.$	$\rho=3.$	$\rho=\infty.$
$J(\rho)$.....	0,8052	0,7498	0,6321	0,2577	0,04510	0,01425	0

On peut encore préciser davantage l'allure de la courbe représentant l'inclinaison J le long du côté OB, en étudiant sa dérivée par rapport à y. On a

$$\frac{dJ}{dy} = -\frac{(1-\nu^2)pa^2\rho}{EI}\frac{16}{\pi^4}\sum\frac{1}{(m^2+n^2\rho^2)^2}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Cette dérivée s'annule pour $y=\frac{b}{2}$ et est maxima pour $y=0$ et $y=b$. Son maximum, pour $y=0$, est d'ailleurs la valeur que

prend au sommet ($x = 0$, $y = 0$) la dérivée seconde $\frac{d^2w}{dx\,dy}$. Il a pour expression

$$\max \frac{dJ}{dy} = -\frac{(1-\eta^2)pa^2\rho}{EI}\frac{16}{\pi^4}T(\rho),$$

en posant

$$T(\rho) = \sum \frac{1}{(m^2+n^2\rho^2)^2}.$$

Cette série est convergente pour toute valeur de ρ, mais pour la limite $\rho = 0$ elle devient infinie. C'est, en effet, la somme $\sum \frac{1}{m^4}$ répétée une infinité de fois.

Pour la limite $\rho = \infty$, on a $T(\rho) = 0$ et l'on verrait, par le même procédé utilisé pour $J(\rho)$, que l'on aurait $\rho T(\rho) = 0$ et même $\rho^\alpha T(\rho) = 0$ pour α aussi voisin qu'on le voudra du nombre 3.

Voici une Table sommaire des valeurs de $T(\rho)$:

	$\rho = 0.$	$\rho = \frac{1}{3}.$	$\rho = \frac{1}{2}.$	$\rho = 1.$	$\rho = 2.$	$\rho = 3.$	$\rho = \infty.$
$T(\rho)$.....	∞	1,2056	0,7928	0,2798	0,0495	0,0148	0

Considérons maintenant le côté OA, dirigé suivant Ox. L'inclinaison est la valeur pour $y = 0$ de $\frac{dw}{dy}$. Si l'on part de la formule (B) on trouvera

$$J = -\frac{(1-\eta^2)pb^3}{EI}\frac{16}{\pi^5}\sum \frac{1}{m\left(\frac{m^2}{\rho^2}+n^2\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

J est nul pour $x = 0$ et $x = a$, et est maximum pour $x = \frac{a}{2}$, la valeur de ce maximum étant :

$$J_{max} = -\frac{(1-\eta^2)pb^2}{EI}\frac{16}{\pi^5}\sum \frac{(-1)^{m-1}}{m\left(\frac{m^2}{\rho^2}+\eta^2\right)} = -\frac{(1-\eta^2)pb^3}{EI}\frac{16}{\pi^5}J\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Le coefficient angulaire de la courbe pour $x = 0$ serait le même que précédemment, puisque c'est la valeur de $\frac{d^2w}{dx\,dy}$ pour $x = 0$, $y = 0$. On le vérifierait facilement, d'ailleurs. Les courbes représentatives de J sur les deux côtés de la plaque ont donc mêmes coefficients angulaires aux sommets.

Les flèches de ces courbes sont dans le rapport de $a^3J(\rho)$ à $b^3J\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

Ce rapport est donc $\frac{\rho^3 J(\rho)}{J\left(\frac{1}{\rho}\right)}$ et est facile à calculer pour diverses valeurs de ρ. On trouve, par exemple,

	$\rho = 1.$	$\rho = 2.$	$\rho = 3.$
$\frac{\rho^3 J(\rho)}{J\left(\frac{1}{\rho}\right)}$	1	0,5708	0,5131

Calculs des tensions N_1 et N_2. — Comme pour les plaques circulaires, nous supposerons qu'on calcule toujours ces tensions pour la base supérieure en faisant $z = h$.

Calculons d'abord

$$N_1 = -\frac{Eh}{(1-\eta^2)}\left[\frac{d^2 w}{dx^2} + \eta\frac{d^2 w}{dy^2}\right].$$

Nous trouverons, en calculant $\frac{d^2 w}{dx^2}$ au moyen de la formule (A) et $\frac{d^2 w}{dy^2}$ au moyen de la formule (B):

$$N_1 = -\frac{ph}{1}\frac{16}{\pi^4}\left[a^2\sum\frac{m}{n(m^2+n^2\rho^2)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right.$$
$$\left.+\eta b^2\sum\frac{n}{m\left(\frac{m^2}{\rho^2}+n^2\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right].$$

La tension N_1 est nulle sur tout le pourtour de la plaque. Partout ailleurs elle est négative, le signe des séries doubles étant déterminé par celui de leur premier terme.

Le maximum a lieu pour $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, c'est-à-dire au centre de la plaque. Il a pour valeur

$$\max N_1 = -\frac{ph}{1}\frac{16}{\pi^4}\left[a^2\sum\frac{m(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{n(m^2+n^2\rho^2)^2} + \eta b^2\sum\frac{n(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{m\left[\frac{m^2}{\rho^2}+n^2\right]^2}\right].$$

Si l'on désigne par $N(\rho)$ la première série double, facteur de a^2 dans la parenthèse, la seconde série aura pour valeur $N\left(\frac{1}{\rho}\right)$, car rien ne distingue les deux suites de nombres m et n, et l'on pourra écrire

plus simplement

$$\max N_1 = -\frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^5}\left[a^2 N(\rho) + \eta b^2 N\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

L'application de cette formule est très simple quand on a calculé d'avance la fonction $N(\rho)$ pour un certain nombre de valeurs de sa variable ρ.

Pour la limite $\rho = 0$, la valeur de $N(\rho)$ se présente sous la forme du produit des deux séries simples

$$\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

On a donc $N(0) = \frac{\pi^4}{128} = 0,7609$.

Pour la limite $\rho = \infty$, on a $N(\rho) = 0$, et l'on démontrerait même que le produit $\rho^\alpha N(\rho)$ tend vers zéro, quand $\alpha < 2$, mais aussi voisin de 2 qu'on le veut.

Voici une Table sommaire des valeurs de $N(\rho)$:

	$\rho = 0.$	$\rho = \frac{1}{3}.$	$\rho = \frac{1}{2}.$	$\rho = 1.$	$\rho = 2.$	$\rho = 3.$	$\rho = \infty.$
$N(\rho)$.....	0,7609	0,7163	0,5879	0,2242	0,02711	0,00417	0

En ce qui concerne $N_2 = -\frac{Eh}{1-\eta^2}\left(\eta\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$, on ferait des calculs tout semblables, et l'on obtiendrait en particulier pour le maximum de N_2 l'expression

$$\max N_2 = -\frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^5}\left[\eta a^2 N(\rho) + b^2 N\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Il est intéressant de comparer le maximum de N_1 au maximum de N_2, car c'est le plus grand des deux qui déterminera la fatigue du métal au centre de la plaque. Or, le signe de $N_1 - N_2$ est déterminé par celui de l'expression

$$a^2(1-\eta)N(\rho) - b^2(1-\eta)N\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

ou encore de l'expression

$$\rho^2 N(\rho) - N\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Or, quand ρ est plus grand que 1, cette expression est toujours négative. On peut s'en assurer par le Tableau ci-dessus.

Par suite, quand $a > b$, c'est le maximum de N_2, tension parallèle au plus petit côté, qui est à prendre en considération.

Calcul de T_3. — On a l'expression générale

$$T_3 = -\frac{Eh}{1+\eta}\frac{d^2w}{dx\,dy} = -\frac{Eh(1-\eta)}{(1-\eta^2)}\frac{d^2w}{dx\,dy}.$$

En calculant la dérivée seconde, d'après l'expression (A), on trouve

$$T_3 = \frac{ph(1-\eta)}{I}\frac{a^3}{b}\frac{16}{\pi^4}\sum\frac{1}{(m^2+n^2\rho^2)^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}.$$

On a $T_3 = 0$ au milieu de la plaque et tout le long des parallèles aux axes passant par les milieux des côtés, car on a alors soit $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}$, soit $\frac{y}{b} = \frac{1}{2}$, et l'un des deux cosinus s'annule.

Le maximum de T_3 a lieu aux sommets, car en ces points ses dérivées par rapport à x et y sont nulles à la fois.

En un point quelconque du contour, comme on a $N_1 = N_2 = 0$, les tensions principales ont leurs directions inclinées à 45° par rapport au contour et ont pour valeur $\pm T_3$.

Pour avoir le maximum de T_3, il suffit de faire $x = 0$ et $y = 0$, ou de remplacer les deux cosinus par l'unité. On trouve donc :

$$\max T_3 = \frac{ph(1-\eta)a^2\rho}{I}\frac{16}{\pi^4}T(\rho),$$

$T(\rho)$ étant la fonction de ρ précédemment envisagée.

Il est utile de comparer le maximum de T_3 à celui de N_2 dans l'hypothèse $\frac{a}{b} = \rho > 1$, car c'est alors de la plus grande de leurs valeurs absolues que dépend, en définitive, la fatigue maxima de la plaque. Les expressions à comparer sont proportionnelles à

$$\eta N(\rho) + \frac{1}{\rho^2}N\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \text{pour} \quad N_2$$

et

$$(1-\eta)\rho T(\rho) \quad \text{pour} \quad T_3.$$

Le résultat dépendra cette fois de la valeur du coefficient de Poisson. Supposons d'abord $\eta = \frac{1}{4}$. Nous trouverons

	$\rho = 1.$	$\rho = 2.$	$\rho = 3.$
N_2.....	0,2815	0,1540	0,0806
T_3.....	0,2098	0,0742	0,0333

Dans ce cas, c'est la valeur de N_2 qui l'emporte toujours.

Supposons maintenant $\eta = 0$, nous trouverons :

	$\rho = 1.$	$\rho = 2.$	$\rho = 3.$
N_2.....	0,2252	0,1397	0,0796
T_3.....	0,2798	0,0990	0,0444

On voit que, pour des plaques se rapprochant de la forme carrée, c'est la valeur de T_3 qui pourrait l'emporter, lorsque le coefficient η est très petit. Cela pourrait expliquer les ruptures aux angles que l'on constate dans des plaques en ciment armé, plus ou moins bien armées d'ailleurs pour résister à des efforts principaux égaux à T_3 en valeur absolue, et dirigés suivant la bissectrice de l'angle et suivant la direction perpendiculaire.

Calcul des réactions au pourtour de la plaque. — Considérons le côté OA dirigé suivant Ox. L'effort total de cisaillement sur un élément plan perpendiculaire à oy, et ayant toute l'épaisseur de la plaque, a pour valeur

$$T'_1 = -\frac{EI}{(1-\eta^2)}\left[\frac{d^3 w}{dx^2\,dy} + \frac{d^3 w}{dy^3}\right] = -\frac{EI}{1-\eta^2}\frac{d}{dy}\Delta w.$$

En calculant encore les dérivées d'après l'expression (A) de w, on trouve

$$\Delta w = +\frac{(1-\eta^2)}{EI}pa^2\frac{16}{\pi^4}\sum\frac{1}{mn(m^2+n^2\rho^2)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

On en déduit :

$$T'_1 = -p\frac{a^2}{b}\frac{16}{\pi^3}\sum\frac{1}{m(m^2+n^2\rho^2)}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Ce résultat est indépendant des coefficients d'élasticité.

Faisons maintenant $y = 0$, et changeons de signe, nous aurons la réaction R développée au point (xo) du côté considéré. Nous aurons donc, en remplaçant d'ailleurs $\frac{a^2}{b}$ par $b\rho^2$

$$R = pb\frac{16}{\pi^3}\sum\frac{\rho^2}{m(m^2+n^2\rho^2)}\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Cette réaction est nulle pour $x = 0$ et pour $x = a$, c'est-à-dire aux sommets de la plaque. Elle est maxima pour $x = \frac{a}{2}$ et son

maximum a pour valeur

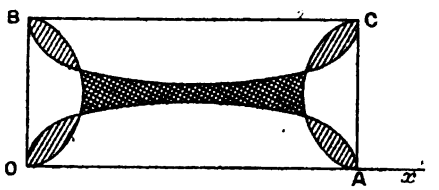
$$\max R = \frac{16pb}{\pi^3}\sum\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}\rho^2}{m(m^2+n^2\rho^2)} = \frac{16pb}{\pi^3}R(\rho).$$

En prenant la dérivée de R par rapport à x, on trouve

$$\frac{dR}{dx} = \frac{16pb}{\pi^2 a}\sum\frac{\rho^2}{m^2+n^2\rho^2}\cos\frac{m\pi x}{a}.$$

Cette série est convergente en général; c'est d'ailleurs une somme de dérivées quatrièmes de w. Elle est nulle pour $x = \frac{a}{2}$. Mais pour $x = 0$, ou $x = a$, elle devient infinie, la série double $\sum\frac{\rho^2}{m^2+n^2\rho^2}$ n'étant pas convergente.

Fig. 190.



Il en résulte que la courbe qui représenterait R a en gros la forme d'une demi-ellipse, dont l'un des axes serait oA, et dont le demi-axe perpendiculaire aurait pour valeur $\frac{16pb}{\pi^3}R(\rho)$.

Étudions les variations de la fonction $R(\rho) = \sum\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}\rho^2}{m(m^2+n^2\rho^2)}$. Elle croît constamment avec ρ. Elle est nulle pour $\rho = 0$. D'autre part, pour $\rho = \infty$, elle a pour valeur

$$R(\infty) = \sum\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{mn^2} = \sum\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m}\sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^3}{32} = 0{,}9689,$$

de sorte que pour $\rho = \infty$ on a

$$\max R = \frac{pb}{2}.$$

Pour toute autre valeur de ρ, le maximum de R est donc inférieur à $\frac{pb}{2}$. Autrement dit, si l'on fait $p = 1$, et que l'on trace dans

ces conditions la courbe représentative de R sur le côté oA, cette courbe se tiendra tout entière au-dessous de la droite joignant les milieux de OB et de AC.

Voici, d'ailleurs, une Table sommaire des valeurs de R (ρ) :

	$\rho = 0.$	$\rho = \frac{1}{3}.$	$\rho = \frac{1}{2}.$	$\rho = 1.$	$\rho = 2.$	$\rho = 3.$	$\rho = \infty.$
R(ρ).....	0	0,2009	0,3206	0,6168	0,8695	0,9189	0,9689

Il est bien évident qu'en étudiant les réactions R tout le long du côté oB, on obtiendrait des résultats semblables. Le maximum de R se produira au milieu de oB et aura pour valeur $\frac{16pa}{\pi^3} R\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

Les quatre courbes représentatives de R, pour $p = 1$, auront donc la disposition de la figure ci-dessus. Elles se recouvriront en partie au voisinage des angles (parties hachurées), et laisseront entre elles un certain intervalle vide (partie à doubles hachures) vers le centre. La somme des parties simplement hachurées doit évidemment être égale à la zone doublement hachurée, puisque le total des aires des courbes doit reproduire la surface du rectangle de la plaque.

En pratique, lorsque l'on aura à apprécier les conditions de résistance des poutres formant le cadre de support de la plaque, il suffira amplement d'assimiler à des ellipses les courbes représentatives de R. Ce calcul ne saurait d'ailleurs avoir une prétention absolue à la rigueur, car il suppose absolument indéformable le cadre de la plaque. Aussi se contente-t-on généralement de règles approximatives telles que la suivante. On divise la surface de la plaque en quatre parties, deux trapèzes et deux triangles, en menant les bissectrices des quatre angles et en joignant leurs intersections deux à deux par une parallèle aux plus longs côtés. On attribue à chaque côté du cadre une charge proportionnelle à la partie qui lui est adjacente. La théorie qui précède permet de se faire une idée de la valeur pratique de cette règle.

Examen sommaire du cas d'une charge incomplète. — Navier avait également abordé le cas d'une plaque chargée d'un poids uniforme sur une partie seulement de sa surface, partie limitée à un rectangle de côtés parallèles à ceux de la plaque. Les résultats qu'il avait obtenus sont en partie erronés, mais il est intéressant de

montrer que le principe de sa méthode s'applique encore entièrement.

Soient x', y' les coordonnées du centre du rectangle chargé, et soient a' et b' les longueurs de ses côtés respectivement parallèles à Ox et Oy.

La fonction $f(xy)$ représentant la charge est égale à p à l'intérieur de ce rectangle, et égale à zéro sur le surplus de la plaque. En développant cette fonction en série de Fourier de la forme

$$f(xy) = \sum A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

le coefficient A_{mn} a pour valeur

$$\begin{aligned} f(xy) &= \frac{ab}{4} \int_0^a d\alpha \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \int_0^b d\beta \sin \frac{n\pi\beta}{b} f(\alpha\beta) \\ &= \frac{4p}{ab} \int_{x'+\frac{a'}{2}}^{x'+\frac{a'}{2}} d\alpha \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \int_{y'-\frac{b'}{2}}^{y'+\frac{b'}{2}} d\beta \sin \frac{n\pi\beta}{b}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A_{mn} = \frac{4p}{\pi^2 mn} &\left[\cos \frac{m\pi}{a}\left(x' - \frac{a'}{2}\right) - \cos \frac{m\pi}{a}\left(x' + \frac{a'}{2}\right)\right] \\ &\times \left[\cos \frac{n\pi}{b}\left(y' - \frac{b'}{2}\right) - \cos \frac{n\pi}{b}\left(y' + \frac{b'}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

ou encore

$$A_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{m\pi a'}{2a} \sin \frac{n\pi y'}{b} \sin \frac{n\pi b'}{2b}.$$

Ici, m et n peuvent prendre toutes les valeurs entières *paires ou impaires*, tant que x' et y' sont quelconques. Mais si l'on se limite au cas d'un rectangle concentrique à la plaque, on a $x' = \frac{a}{2}$, $y' = \frac{b}{2}$ et l'on a $A_{mn} = 0$ pour toutes les valeurs paires de m, ou de n, de sorte que l'on n'a plus à considérer que les suites des nombres impairs, comme précédemment. On a d'ailleurs alors

$$\sin \frac{m\pi x'}{a} = \sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$\sin \frac{n\pi y'}{a} = (-1)^{\frac{n-1}{2}};$$

de sorte que l'on a finalement

$$A_{mn} = (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{16p}{\pi^2 mn} \sin\frac{m\pi a'}{2a} \sin\frac{n\pi b'}{2b}.$$

Le problème actuel ne diffère donc de celui de la plaque complètement chargée que par ce fait que le coefficient A_{mn} contient comme facteurs de $\frac{16p}{\pi^2 mn}$, d'abord un produit de sinus *qui est toujours inférieur à l'unité en valeur absolue*, ensuite l'expression $(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}$ qui modifiera les signes d'une manière très variable, suivant les rapports $\frac{a'}{a}$ et $\frac{b'}{b}$. La solution sera néanmoins obtenue terme à terme, comme précédemment, et les séries doubles introduites dans les calculs seront toujours absolument convergentes, dans les mêmes conditions que précédemment. Toutefois, en ce qui concerne la convergence de ces séries, il faut s'attendre à ce qu'elle devienne beaucoup moins rapide, tant à cause des lois différentes qui régleront l'alternance des signes des différents termes qu'à cause des rapports différents qui pourront s'établir entre les grandeurs relatives de ces termes, au moins pour les premiers, tant que les facteurs $\sin\frac{m\pi a'}{2a}$ et $\sin\frac{n\pi b'}{2b}$ auront une influence appréciable.

On conçoit, d'ailleurs, que la convergence de ces séries est intimement liée au nombre des termes qu'il faut conserver pour avoir une représentation approchée suffisante de $f(xy)$ sur toute l'étendue de la plaque. Cette remarque est absolument générale. Dans les problèmes pratiques, il est utile de commencer par la recherche du nombre des termes qu'il faut prendre dans la série de Fourier pour avoir une représentation suffisante de la charge.

Indication sur une méthode due à M. Maurice Levy dans le cas d'une charge uniformément répartie sur des bandes parallèles à l'un des côtés. — Lorsque la fonction $f(xy)$ qui représente en chaque point la charge ne dépend que de l'une des variables, x par exemple, au lieu de la développer en série double suivant la méthode de Navier, on peut la développer en une série simple de,

sinus et la mettre sous la forme

$$f(x) = \sum A_m \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Alors on peut satisfaire à l'équation de Lagrange terme à terme en posant

$$w = \sum B_m \sin \frac{m\pi x}{a} = \sum w_m$$

et en considérant B_m comme une fonction de y seul.

Posons pour abréger $\frac{m\pi}{a} = r$, nous aurons

$$\frac{d^2 w_m}{dx^2} = -r^2 B_m \sin rx, \qquad \frac{d^2 w_m}{dy^2} = \frac{d^2 B_m}{dy^2} \sin rx,$$

$$\Delta w_m = \left(\frac{d^2 B_m}{dy^2} - r^2 B_m\right) \sin rx,$$

$$\Delta\Delta w_m = \left(\frac{d^4 B_m}{dy^4} - 2r^2 \frac{d^2 B_m}{dy^2} + r^4 B_m\right) \sin rx.$$

L'équation de Lagrange sera satisfaite terme à terme, si l'on a

$$\frac{d^4 B_m}{dy^4} - 2r^2 \frac{d^2 B_m}{dy^2} + r^4 B_m = -\frac{(1-\eta^2)}{EI} A_m.$$

Posons $-\frac{(1-\eta^2)}{EI} A_m = P_m r^4$. L'équation différentielle en B_m a pour solution particulière $B_m = P_m$. D'autre part, son équation caractéristique se réduit à $(\alpha^2 - r^2)^2 = 0$, et a deux racines doubles $\pm r$. Il en résulte que l'intégrale générale est de la forme

$$B_m = P_m + (C + C_1 y) e^{ry} + (D + D_1 y) e^{-ry}.$$

On pourra disposer des quatre constantes arbitraires pour satisfaire terme à terme à différentes conditions qu'on aura à s'imposer sur les côtés parallèles à Ox, c'est-à-dire pour $y = 0$ et $y = b$.

Par exemple, si l'on envisage une plaque simplement appuyée sur son pourtour, on aura à exprimer les quatre conditions

$$w_m = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 w_m}{dy^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = b.$$

On peut également envisager une plaque qui, restant simple-

ment appuyée suivant les deux côtés parallèles à Oy (pour $x = 0$ et $x = a$), serait encastrée suivant les deux autres côtés. On aurait alors à exprimer les quatre conditions

$$w_m = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dw_m}{dy} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = b.$$

C'est là une ressource nouvelle que ne fournissait pas la méthode de Navier. Mais il faut remarquer par contre que cette dernière s'appliquait au cas de charges quelconques.

Les fonctions de y désignées par B_m étant complètement déterminées, si l'on sépare dans chacune d'elles le terme P_m de manière à écrire

$$B_m = P_m + B'_m.$$

On voit que l'expression générale de w sera

$$w = \sum w_m = \sum P_m \sin\frac{m\pi x}{a} + \sum B'_m \sin\frac{m\pi x}{a} = w' + \sum B'_m \sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Chaque terme tel que $P_m \sin\frac{m\pi x}{a}$ satisfait à l'équation

$$r^4 P_m \sin\frac{m\pi x}{a} = -\frac{(1-\eta^2)}{EI} A_m \sin\frac{m\pi x}{a},$$

de sorte que w' satisfait à l'équation

$$\frac{d^4 w'}{dx^4} = -\frac{(1-\eta^2)}{EI}\sum A_m \sin\frac{m\pi x}{a} = -\frac{(1-\eta^2)}{EI} f(x).$$

C'est l'équation de Lagrange simplifiée qui conviendrait à une plaque ayant comme seuls appuis les côtés b parallèles à Oy. Elle ne diffère de celle qui conviendrait à une poutre droite que par l'introduction du facteur $(1-\eta^2)$ dans le second membre. On pourra donc la déterminer par les procédés habituels.

Quant à $\Sigma B'_m \sin\frac{m\pi x}{a}$, qui complète l'expression de w, c'est une fonction qui satisfait terme à terme à l'équation de Lagrange, privée de second membre, c'est-à-dire à l'équation

$$\Delta\Delta w = 0.$$

C'est conforme à un principe général, que nous avons indiqué précédemment.

Ces résultats généraux étant exposés, examinons sommairement le cas où il s'agit d'une plaque uniformément chargée sur toute sa surface et simplement appuyée. Alors

$$f(x) = p = \sum A_m \sin\frac{m\pi x}{a} = \sum A_m \sin rx,$$

et l'expression de A_m est

$$A_m = \frac{2p}{a}\int_0^a \sin\frac{m\pi\alpha}{a}\,d\alpha = \frac{4p}{m\pi} \qquad (m \text{ étant impair}).$$

On en déduit

$$P_m = -\frac{(1-\eta^2)}{EI}\,\frac{4p}{m\pi}\,\frac{1}{r^4} = -\frac{(1-\eta^2)}{EI}\,\frac{4pa^4}{m^5\pi^5}.$$

Quant à B_m, en posant $b - y = y'$, et en remarquant que tout est symétrique en y et y', on pourra lui donner la forme

$$B_m = P_m[1 + C(e^{ry} + e^{ry'}) + C_1(y\,e^{ry} + y'\,e^{ry'})].$$

Il s'agit de déterminer C et C_1, de manière à satisfaire aux deux conditions

$$w_m = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 w_m}{dy^2} = 0 \qquad \text{pour} \qquad y = 0.$$

La première condition s'écrit immédiatement

$$C(1 + e^{rb}) + C_1 b\,e^{rb} + 1 = 0.$$

D'autre part, on a, en observant que $\frac{dy'}{dy} = -1$,

$$\frac{1}{P_m}\frac{dB_m}{dy} = r\,[C(e^{ry} - e^{ry'}) + C_1(y\,e^{ry} - y'\,e^{ry'})] + C_1(e^{ry} - e^{ry'}),$$

$$\frac{1}{P_m}\frac{d^2B_m}{dy^2} = r^2[C(e^{ry} + e^{ry'}) + C_1(y\,e^{ry} + y'\,e^{ry'})] + 2r\,C_1(e^{ry} + e^{ry'}).$$

La seconde condition s'écrit donc

$$C(1 + e^{ry}) + C_1 b\,e^{rb} + \frac{2}{r}C_1(1 + e^{rb}) = 0.$$

Si l'on en retranche la première, on obtient pour C_1 la valeur

$$C_1 = \frac{r}{2(1 + e^{rb})}.$$

Ensuite on obtiendra

$$C = -\frac{1}{1+e^{rb}}[1 + C_1 b\, e^{rb}].$$

Posons maintenant

$$\beta_m = C(e^{ry} + e^{ry'}) + C_1(y\, e^{ry} + y'\, e^{ry'}),$$

nous aurons

$$B'_m = P_m \beta_m = -\frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\frac{4}{\pi^5}\frac{\beta_m}{m^5}$$

et la solution se présentera finalement sous la forme

$$w = w' - \frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\frac{4}{\pi^5}\sum\frac{\beta_m}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Quant à w', c'est la solution de l'équation

$$\frac{d^4 w'}{dx^4} = -\frac{1-\eta^2}{EI}p$$

qui satisfait pour $x = 0$ et pour $x = a$ aux conditions $w' = 0$ et $\frac{d^2 w'}{dx^2} = 0$. Elle a pour expression

$$w' = -\frac{(1-\eta^2)p}{24\,EI}x(x-a)(x^2 - ax - a^2).$$

On passerait de là au calcul de la flèche au centre, et à celui de N_1, N_2, T_3, etc.

On peut remarquer que, dans l'expression de w, la présence sous le signe Σ du facteur $\frac{1}{m^5}$ assure la convergence très rapide de la série et de toutes celles que l'on obtient par une, deux ou trois dérivations, soit par rapport à x, soit par rapport à y. On n'aura donc pas besoin de calculer un grand nombre de coefficients C et C_1.

On peut remarquer aussi qu'on obtiendrait une solution toute semblable en permutant x avec y. On pourra employer les deux concuremment pour faciliter dans certains cas le calcul des dérivées.

V. — Plaques rectangulaires encastrées sur leurs quatre côtés et uniformément chargées.

Il s'agit cette fois de trouver une solution w de l'équation de Lagrange qui satisfasse sur le pourtour de la plaque aux conditions suivantes :

a. En premier lieu, w doit être nul sur tout le pourtour. Il s'en suit, quand cette condition est remplie, que $\frac{dw}{dx} = 0$ tout le long de Ox et du côté parallèle à Ox, et que $\frac{dw}{dy} = 0$ tout le long de Oy et du côté parallèle à Oy. Il s'ensuit encore que l'on a à la fois $\frac{dw}{dx} = 0$ et $\frac{dw}{dy} = 0$ aux quatre angles de la plaque.

b. En second lieu, la condition d'encastrement au pourtour signifie que l'on doit avoir, tout le long de Ox, $\frac{dw}{dy} = 0$, et de même, tout le long de Oy, la condition $\frac{dw}{dx} = 0$.

On peut remarquer, en passant, que ces conditions exigent que l'on ait $\frac{d^2w}{dx\,dy}$ tout le long de Ox et de Oy, et que, par suite, la tension T_3 soit nulle sur tout le pourtour de la plaque encastrée.

Ces conditions sont difficiles à satisfaire terme à terme et elles sont incompatibles, en tout cas, avec des développements en séries de Fourier, simples ou doubles, les fonctions trigonométriques telles que $\sin\frac{m\pi x}{a}$ n'étant pas aptes à remplir les deux conditions $w = 0$ et $\frac{dw}{dx} = 0$ pour $x = 0$, par exemple.

Le problème, malgré sa grande importance pratique, est encore imparfaitement résolu. Toutefois, des solutions approximatives peuvent être obtenues dans l'ordre d'idées suivant.

En principe, la solution doit pouvoir être composée de la somme d'une solution quelconque W de l'équation de Lagrange et de solutions de l'équation de Lagrange sans second membre $\Delta\Delta w = 0$. Ces dernières solutions sont en nombre infini, et l'on peut chercher à en composer, par voie d'addition, une solution suffisamment générale pour satisfaire aux conditions d'encastrement en autant de points du contour qu'on le désire. Les solutions de

l'équation $\Delta\Delta w$ correspondent à toutes les formes que peut prendre la plaque sans charge, lorsqu'on la soumet à des forces quelconques agissant exclusivement sur son pourtour.

Comme solution W, on peut prendre celle qui correspond à la plaque simplement appuyée. Elle satisfait aux conditions (a) ci-dessus. Mais, sauf aux angles, elle ne remplit pas les conditions (b) relatives à l'inclinaison de la plaque.

En des points ordinaires du côté OB, dirigé suivant Oy, nous avons vu que l'on a

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{(1-\eta^2)pa^3}{EI}\frac{16}{\pi^5}\sum\frac{1}{m(m^2+n^2\rho^2)^2}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

La série Σ est une fonction de y, qui présente, quel que soit ρ, l'allure générale suivante. Elle s'annule pour $y = 0$ et $y = b$, et passe par un maximum pour $y = \frac{b}{2}$. Elle est d'ailleurs symétrique et prend des valeurs égales pour deux valeurs telles que y et $b - y$, puisque n est un nombre impair. On pourrait en calculer la valeur pour autant de valeurs de y que l'on voudrait entre 0 et $\frac{b}{2}$. Pour $y = \frac{b}{2}$ en particulier, on a

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{(1-\eta^2)pa^3}{EI}\frac{16}{\pi^5}J(\rho).$$

De même, en des points ordinaires du côté OA, dirigé suivant Ox, on aurait $\frac{dW}{dy}$ égale à une fonction de x s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, et ayant pour $x = \frac{a}{2}$ un maximum, dont nous connaissons la valeur :

$$\frac{dW}{dy} = -\frac{(1-\eta^2)pa^3}{EI}\frac{16}{\pi^5}\frac{1}{\rho^2}J\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

D'un autre côté, parmi les solutions de l'équation $\Delta\Delta w = 0$, on peut envisager celles qui sont de la forme

$$[(C + C_1 y)e^{ry} + (D + D_1 y)e^{-ry}]\sin rx,$$

et celles qui s'en déduiraient par permutation de x et de y. On peut choisir spécialement celles qui présentent des caractères géné-

raux analogues à ceux de la solution W, c'est-à-dire s'annulant sur le pourtour, et symétriques à la fois par rapport à x et $a - x = x'$, et par rapport à y et $b - y = y'$.

Considérons en particulier la solution

$$w_m = \varphi(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

dans laquelle la fonction φ a pour définition

$$\varphi(y) = y\left[e^{\frac{m\pi y'}{a}} - e^{-\frac{m\pi y'}{a}}\right] + y'\left[e^{\frac{m\pi y}{a}} - e^{-\frac{m\pi y}{a}}\right]$$

et dans laquelle m représente un nombre entier impair. Cette solution s'annule bien sur tout le pourtour et elle ne change pas quand on remplace x par $a - x = x'$, ou bien y par $b - y = y'$, lorsque m est un entier impair.

On a, d'une manière générale,

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{m\pi}{a}\varphi(y) \cos \frac{m\pi x}{a},$$

de sorte qu'en un point ordinaire du côté OB_1 ($x = 0$) l'inclinaison est

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{m\pi}{a}\varphi(y).$$

C'est une fonction de y, qui s'annule pour $y = 0$ et $y = b$, et qui est maxima pour $y = y' = \frac{b}{2}$, car la dérivée $\frac{d\varphi}{dy}$ est nulle pour cette valeur. Pour $y = \frac{b}{2}$, le maximum a pour expression

$$\frac{dw_m}{dx} = \frac{m\pi b}{a}\left[e^{\frac{m\pi b}{2a}} + e^{-\frac{m\pi b}{2a}}\right].$$

On a aussi, d'une manière générale, le long du côté OA,

$$\frac{dw_m}{dy} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0$ étant la valeur de $\frac{d\varphi}{dy}$ pour $y = 0$. Cette dérivée est facile à calculer. On a, en posant pour abréger $\frac{m\pi}{a} = r$,

$$\frac{d\varphi}{dy} = (e^{ry'} - e^{-ry'}) - (e^{ry} - e^{-ry}) - ry[e^{ry'} + e^{-ry'}) + ry'(e^{ry} + e^{-ry})]$$

et, pour $y = 0$, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 = e^{rb} + e^{rb} + 2rb = e^{\frac{m\pi b}{a}} + e^{-\frac{m\pi b}{a}} + 2\frac{m\pi b}{a}.$$

L'inclinaison le long du côté OA est donc une fonction sinusoïdale.

Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = a$, passe par un maximum ou un minimum pour $x = \frac{a}{2}$, car, m étant impair, $\sin\frac{m\pi}{2} = \pm 1$. On a certainement un maximum et un seul quand $m = 1$. Si m est plus grand que un, on a plusieurs maxima, ou minima successifs et égaux, symétriques par rapport au milieu du côté. Mais si l'on n'envisage la solution W_{m1} que comme l'un des termes d'une somme telle que

$$w = \Sigma C_m w_m$$

dans laquelle le terme $C_1 W_1$ soit prépondérant, la fonction w conservera le même caractère que W, en ce qui concerne l'allure de sa dérivée $\frac{dw}{dy}$ pour $y = 0$. En tout cas, pour $x = \frac{a}{2}$, on a pour $\frac{dw_m}{dy}$ la valeur absolue

$$\frac{dw_m}{dy} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 = e^{\frac{m\pi b}{a}} + e^{-\frac{m\pi b}{a}} + 2\frac{m\pi b}{a}.$$

Si l'on permute a et b, en même temps que x et y, on aura une série de solutions analogues, jouissant des mêmes propriétés générales et que nous désignerons par w'_m pour les distinguer des autres.

Cela établi, considérons la solution

$$w = W + \sum_{m=1}^{m=2n-1} C_m w_m + \sum_{m=1}^{m=2n'-1} C'_m w'_m$$

obtenue en ajoutant à W les n premières solutions w_m et les n premières solutions w'_m, respectivement multipliées par des constantes C_m et C'_m. On pourra disposer de ces $n + n'$ constantes, de manière que $\frac{dw}{dx}$ s'annule en n' points convenablement choisis sur Oy et que $\frac{dw}{dy}$ s'annule aussi en n points convenablement choisis sur Ox. Comme, dans le cas considéré d'une charge uniforme, W,

w_m et w'_m sont symétriques en x et x', et en y et y', l'inclinaison de la plaque sera même nulle en tous les points symétriques de ceux qui auront été choisis, sans compter les sommets. En choisissant les nombres n et n' suffisamment grands et en prenant pour les points d'inclinaison nulle des points régulièrement espacés sur chacun des demi-côtés, on voit que l'on pourra s'approcher autant qu'on le voudra de la solution complète et exacte qui assurerait à la plaque une inclinaison nulle sur tout son pourtour.

Cas d'une plaque sensiblement carrée. — On obtiendra déjà une approximation très intéressante dans le cas d'une plaque sensiblement carrée, en se bornant à considérer les deux premières solutions w_1 et w'_1 correspondant à $m = 1$, de manière à former la solution

$$w = W + C_1 w_1 + C'_1 w'_1$$

comportant deux arbitraires seulement. On pourra disposer de C_1 et C'_1 de manière à annuler l'inclinaison de la plaque au milieu des deux côtés OA et OB. De cette façon, l'inclinaison de la plaque sera partout relativement petite, par rapport à ce qu'elle serait dans la solution W, car elle sera sur chaque côté la différence de deux fonctions ayant même allure générale, des points communs extrêmes, des points communs avec tangente commune au milieu du côté.

Au milieu du côté OB, on a

$$\frac{dW}{dx} = PJ(\rho),$$

en posant

$$P = \frac{(1-\eta^2)pa^3}{EI}\frac{16}{\pi^5},$$

$$\frac{dw_1}{dx} = \frac{\pi b}{a}\left[e^{\frac{\pi b}{2a}} - e^{-\frac{\pi b}{2a}}\right] = \frac{\pi}{\rho}\left[e^{\frac{\pi}{2\rho}} - e^{-\frac{\pi}{2\rho}}\right],$$

$$\frac{dw'_1}{dy} = e^{\frac{\pi a}{b}} - e^{-\frac{\pi a}{b}} + 2\pi\frac{a}{b} = e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho} + 2\pi\rho.$$

Par suite, la première équation de condition est

$$C_1\frac{\pi}{\rho}\left[e^{\frac{\pi}{2\rho}} - e^{-\frac{\pi}{2\rho}}\right] + C'_1\left[e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho} + 2\pi\rho\right] = PJ(\rho).$$

La seconde s'en déduira en changeant a en b, C en C′ et ρ en $\frac{1}{\rho}$

et l'on obtiendra

$$C_1\left[e^{\frac{\pi}{\rho}}+e^{-\frac{\pi}{\rho}}+\frac{2\pi}{\rho}\right]+C'_1\pi\rho\left[e^{\frac{\pi\rho}{2}}-e^{-\frac{\pi\rho}{2}}\right]=P\frac{1}{\rho^2}J\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Si l'on met P en facteur dans les coefficients C_1, C'_1, de manière à poser $C_1 = P\gamma$, $C'_1 = P\gamma'$, les coefficients γ et γ' ne dépendent plus que de ρ, et l'on peut les calculer une fois pour toutes. En voici quelques valeurs :

	$\rho=\frac{1}{2}$.	$\rho=1$.	$\rho=2$.
γ.....	0,0000347	0,005878	0,009551
γ'.....	0,009551	0,005878	0,0000347

Une fois les coefficients γ et γ' calculés, et par suite les coefficients C_1 et C'_1, on pourra en déduire les flèches, les tensions, les réactions d'appui correspondant à chacune des solutions complémentaires C_1, w_1 et C'_1 w'_1 et les ajouter aux flèches, tensions, réactions de la plaque simplement appuyée à son pourtour.

A titre d'exemple, nous poursuivrons le calcul, dans le cas d'une plaque carrée.

La flèche au centre, due à la solution W, est

$$f \doteq -\frac{1-\eta^2}{EI}pa^4\frac{16}{\pi^6}\times 0,24412.$$

La flèche au centre, due à la solution $C_1 w_1 = P\gamma\varphi(y)\sin\frac{\pi x}{a}$ s'obtient en faisant $x = y = \frac{a}{2}$.

On a

$$\varphi\left(\frac{a}{2}\right)=a\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=4,6026a \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi a}{2a}=1.$$

Par suite, la flèche est

$$\frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\frac{16}{\pi^6}\pi\times 0,005878\times 4,6026.$$

Le coefficient de $\frac{(1-\eta^2)pa^4}{EI}\times\frac{16}{\pi^6}$ est approximativement 0,08499.

Il faut le doubler pour tenir compte de la solution complémentaire C'_1 w'_1, puis le retrancher du coefficient $F(\rho) = 0,24412$ applicable à la plaque carrée simplement posée. Il reste 0,07414, c'est-à-dire environ $0,303\,F(\rho)$.

Autrement dit, la flèche de la plaque carrée encastrée n'est que les $\frac{303}{1000}$ de celle de la plaque simplement appuyée à son pourtour.

Calculons maintenant la tension N_1, au centre de la plaque.

Celle qui est due à la solution W a pour expression

$$N_1 = -\frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^4}a^2(1+\eta)N(\rho)$$

et l'on a

$$N(\rho) = 0,2212.$$

Pour la solution complémentaire $P\gamma(w_1 + w'_1)$, on a

$$N_1 = -\frac{EI}{1-\eta^2}P\gamma\left[\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{d^2 w'_1}{dx^2} + \eta\frac{d^2 w_1}{dy^2} + \eta\frac{d^2 w'_1}{dy^2}\right].$$

Mais, par raison de symétrie, on a, au centre,

$$\frac{d^2 w'_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_1}{dy^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 w'_1}{dy^2} = \frac{d^2 w_1}{dx^2}$$

et, d'autre part,

$$-\frac{Eh}{1-\eta^2}P\gamma = -\frac{ph}{I}a^3\frac{16}{\pi^5}\gamma.$$

On a par suite

$$N_1 = -\frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^5}a^3\gamma(1+\eta)\Delta w_1.$$

Or, il est facile de calculer terme à terme Δw_1. Prenons, par exemple, le terme $A = ye^{ry'}\sin rx$, où $r = \frac{\pi}{a}$. Nous trouverons, en tenant compte de $\frac{dy'}{dy} = -1$:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -r^2 A,$$

$$\frac{dA}{dy} = -rA + e^{ry'}\sin rx,$$

$$\frac{d^2 A}{dy^2} = r^2 A - 2re^{ry'}\sin rx,$$

$$\Delta A = -2re^{ry'}\sin rx.$$

En opérant de même pour les autres termes, ou, plus généralement, en observant que, pour une fonction F satisfaisant à la

condition $\Delta F = 0$, on a

$$\Delta y\, F = 2\frac{dF}{dy},$$

nous trouvons au total

$$\Delta w_1 = -2r\sin r\hat{x}\,[e^{ry'} - e^{-ry'} + e^{ry} - e^{-ry}]$$
$$= -\frac{4\pi}{a}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{4\pi}{a} \times 4,6026.$$

Finalement, la solution complémentaire donne

$$N_1 = +\frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^4}a^2(1+\eta) \times 4\gamma \times 4,6026 = +\frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^4}a^2(1+\eta) \times 0,10822.$$

La tension résultante est donc

$$N_1 = -\frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^4}a^2(1+\eta) \times 0,1170.$$

C'est encore une compression. Elle est environ les $\frac{52}{100}$ de celle qui se rapporterait à la plaque simplement appuyée.

Calculons ensuite la tension N_1 au milieu du côté OB, $x = 0$, $y = \frac{a}{2}$.

La solution W fournit un résultat nul. Il en est de même de la solution $P\gamma\, w_1$, les deux dérivées secondes $\frac{d^2 w_1}{dx^2}$ et $\frac{d^2 w_1}{dy^2}$ contenant le facteur $\sin rx$ qui s'annule pour $x = 0$. Quant à la solution w'_1, elle fournit, en tenant compte des résultats trouvés pour w_1 et en permutant x et y:

$$\frac{d^2 w'_1}{dy^2} = -r^2 w'_1 = 0,$$
$$\frac{d^2 w'_1}{dx^2} = r^2 w'_1 - 2r\sin ry\,[e^{rx'} - e^{-rx'} + e^{rx} - e^{-rx}]$$
$$= -\frac{2\pi}{a}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = -\frac{2\pi}{a} \times 23,097.$$

Finalement, on trouve

$$N_1 = \frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^4}a^2 \times 2\gamma \times 23,097 = \frac{ph}{I}\frac{16}{\pi^4}a^2 \times 0,27153.$$

Cette tension est positive. Elle est indépendante de η. Elle est toujours plus grande en valeur absolue que la valeur de N_1 au

centre, car on a toujours

$$0,2715 > (1+\eta)\,0,1170.$$

Si l'on admet $\eta = 0,3$, le second membre de cette inégalité est $0,1527$ environ.

La tension au milieu du côté est, dans ce cas, environ $1,75$ fois la compression au centre. Dans cette même hypothèse, elle serait environ les $\frac{93}{100}$ de la compression au centre d'une plaque simplement appuyée, car, pour celle-ci, on aurait $(1+\eta)\,0,2252 = 0,2927$ environ.

L'encastrement d'une plaque carrée réduit donc sensiblement sa déformation, et notamment la flèche au centre. Mais elle réduit assez peu le taux de fatigue du métal. Elle peut même l'aggraver lorsque η est petit.

Enfin, examinons ce que deviennent les réactions au pourtour.

Dans la solution W, qui est celle de la plaque simplement appuyée, la réaction R est nulle aux sommets et atteint, au milieu des côtés, son maximum, qui a pour valeur

$$R_{max} = pa\frac{16}{\pi^3} \times 0,6168.$$

La solution complémentaire $P\gamma\,(w_1 + w'_1)$ donne le long du côté OA

$$R = \frac{EI}{1-\eta^2} P\gamma \frac{d}{dy}\Delta(w_1 + w'_1) \qquad \text{pour} \qquad y = 0.$$

On a d'abord

$$\frac{EI}{1-\eta^2} P\gamma = pa^3 \frac{16}{\pi^5}\gamma.$$

Ensuite on a

$$\Delta w_1 = -2r\sin rx\,[e^{ry} + e^{-ry} + e^{ry'} - e^{ry'}],$$

d'où, pour $y = 0$,

$$\frac{d}{dy}\Delta w_1 = -2r^2\sin rx\,[e^{ry} + e^{-ry} - e^{ry'} - e^{-ry'}] = 2r^2[e^{\pi} + e^{-\pi} - 2]\sin rx.$$

On a de même

$$\Delta w'_1 = -2r\sin ry\,[e^{rx} - e^{-rx} + e^{rx'} - e^{-rx'}],$$

d'où, pour $y = 0$,

$$\frac{d}{dy}\Delta w'_1 = -2r^2[e^{rx} - e^{-rx} + e^{rx'} - e^{-rx'}].$$

Pour $x = 0$, la solution complémentaire donne comme résultat

$$-pa\frac{16}{\pi^3} \times 2\gamma(e^{\pi} - e^{-\pi}) = -pa\frac{16}{\pi^3} \times 0,27153.$$

C'est une réaction dirigée de haut en bas. Inversement, la plaque tend à soulever son cadre au voisinage des sommets.

Pour $x = \frac{a}{2}$, la solution complémentaire donne comme résultat

$$pa\frac{16}{\pi^3} \times 2\gamma\left[e^{\pi} + e^{-\pi} - 2 - 2\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right] = pa\frac{16}{\pi^3} \times 0,1508.$$

Il faut ajouter ce résultat à celui donné par la solution W. Il est environ les $\frac{23}{100}$ de ce dernier.

Ainsi, l'encastrement de la plaque carrée modifie assez profondément la répartition de la charge sur son cadre de pourtour. Au milieu du côté, cette charge est majorée d'environ 23 pour 100. Elle devient négative aux sommets, au lieu d'être nulle, et elle atteint, en valeur absolue, le double de la majoration précédente.

Il serait fort intéressant d'entreprendre des déterminations du même genre pour des plaques s'écartant sensiblement de la forme carrée, et notamment pour la plaque correspondant à $\rho = 2$. Les coefficients γ et γ' donnés plus haut pour ce cas ne doivent d'ailleurs être acceptés que sous réserves, et il serait utile de composer une solution complémentaire en adjoignant, aux deux solutions simples w_1 w'_1, la troisième solution w_3, qui permettrait d'annuler l'inclinaison de la plaque, non seulement au milieu des côtés, mais aussi aux quarts du côté le plus long, de manière à répartir uniformément les points d'inclinaison nulle sur tout le pourtour de la plaque. On aurait trois équations simultanées à résoudre pour déterminer les trois coefficients, et l'exécution matérielle des calculs demeurerait abordable.

VI. — Plaques rectangulaires appuyées sur un cadre élastique.

Lorsque le cadre sur lequel s'appuie la plaque est élastique, au lieu d'être indéformable comme nous l'avons supposé jusqu'ici, le

pourtour de la plaque cesse de satisfaire à la condition $w = 0$. Il faudrait écrire que, sur le pourtour de la plaque, ses déformations sont partout égales à celles des poutres constituant le cadre de support. A défaut de solution complète, on peut s'en approcher par des procédés analogues à celui qui a été employé pour la poutre encastrée. On ajoutera à la solution W, qui convient à la plaque sur appuis rigides, des solutions de la forme

$$C_m w_m = C_m \varphi \sin rx$$

dans lesquelles $r = \frac{m\pi}{a}$, avec m impair, et

$$\varphi = A(e^{ry} + e^{+ry}) + B(y e^{ry} + y' e^{+ry})$$

ou bien des solutions semblables obtenues en permutant x en y et a en b. Puis on disposera des coefficients arbitraires C_m, de façon qu'en un certain nombre de points choisis les déplacements verticaux de la plaque et de son cadre soient égaux.

On peut d'ailleurs, pour simplifier, supposer que deux seulement des côtés du cadre soient élastiques, par exemple ceux qui sont parallèles à Ox, et appliquer le principe de la superposition des effets.

Considérons la solution $w = \varphi \sin rx$.

Elle est telle, que tout le long du côté OB, dirigé suivant oy, on a

$$w = 0, \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 w}{dy^2} = 0.$$

Par suite, N_1 et N_2 sont nuls le long de ce côté.

On peut, d'autre part, établir entre les deux coefficients A et B une relation de proportionnalité telle que $N_2 = 0$ tout le long du côté OA. Pour cela, il suffit d'écrire la condition $\eta \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} = 0$, pour $y = 0$.

Or, on a

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -r^2 \varphi \sin rx,$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} = r^2 \varphi \sin rx + 2Br(e^{ry} + e^{ry}).$$

La condition dont il s'agit s'écrit donc

$$r^2(1-\eta)[A(1+e^{rb})+Bb\,e^{rb}]+2Br(1+e^{rb})=0$$

et l'on pourra prendre

$$A=rb(1-\eta)+2(1+e^{rb}),$$
$$B=-r(1-\eta)(1+e^{rb}).$$

On pourra alors calculer les réactions complémentaires que cette solution provoquerait sur le côté OA du cadre, et déterminer les abaissements qui en résulteraient en différents points choisis.

On opérerait de même pour autant de solutions qu'on le voudra, correspondant à diverses valeurs de l'argument m figurant dans r. On serait alors en mesure d'écrire qu'aux points choisis la solution

$$w=W+\Sigma\, C_m w_m$$

amène les mêmes déplacements pour la plaque et pour la poutre du cadre.

Lorsque la poutre du cadre possède une grande rigidité, et que ses abaissements sont petits relativement à la flèche de la plaque en son centre, on peut négliger les perturbations qui sont provoquées dans sa déformation par la solution complémentaire, et admettre que cette déformation demeure sensiblement la même que dans la solution primitive W. Il ne s'agit, somme toute, que d'une modification de la répartition des réactions d'appui, et la flèche, au milieu de la portée du cadre, notamment, n'en est que peu altérée. On pourra donc écrire plus directement qu'aux points choisis w a pour valeur les déplacements préalablement déterminés pour la poutre de support.

Si l'on se contente d'assurer l'égalité des déplacements au milieu du côté OA, on pourra se borner à envisager la solution complémentaire $C_1 w_1$, correspondant à $r=\frac{\pi}{a}$, et l'on aura déjà une approximation intéressante.

Dans les mêmes conditions d'approximation, on pourra souvent, en pratique, se contenter d'une solution complémentaire encore plus simple.

Désignons par f la flèche prise par la poutre de support OA, quand les réactions au pourtour sont évaluées d'après la solution

primitive W, et envisageons la solution complémentaire

$$w' = -\frac{4f}{a^2}x(a-x)$$

qui assure à la plaque la même flèche au milieu du côté OA.

Cette solution satisfait bien à l'équation de Lagrange, sans second membre $\Delta\Delta w = 0$. On a, en effet,

$$\Delta w' = \frac{8f}{a^2} = \text{const.}$$

De plus, cette solution ne modifie aucunement la valeur des réactions verticales au pourtour, puisque $\Delta w'$ est une constante.

Mais elle a pour effet d'introduire au pourtour des tensions horizontales N_1 et N_2, qui ne sont pas nulles. On a, en effet, partout à la surface supérieure :

$$N_1 = -\frac{Eh}{1-\eta^2}\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{Eh}{1-\eta^2}\frac{8f}{a^2},$$

$$N_2 = -\frac{Eh}{1-\eta^2}\eta\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{Eh}{1-\eta^2}\eta\frac{8f}{a^2}.$$

Mais si f est suffisamment petit pour que ces valeurs de N_1 et N_2 soient elles-mêmes petites par rapport aux tensions qui se produisent au centre de la plaque sur appuis indéformables, cette sujétion pourra être acceptée. Les efforts complémentaires qu'il serait nécessaire d'exercer au pourtour, pour que la déformation de la plaque soit rigoureusement $w = W + w'$, n'auraient qu'une faible influence sur la déformation réelle.

Dans les mêmes conditions, pour tenir compte de la déformation des côtés du cadre parallèles à oy, on introduirait une solution complémentaire

$$-\frac{4f'}{b^2}y(b-y).$$

En définitive, la règle qui en résulterait, sous réserve d'une rigidité relative suffisante du cadre de support, serait la suivante. On calculera la plaque comme si elle était sur appuis indéformables, et l'on évaluera en conséquence les flèches f et f' des poutres du cadre de support. On fera ensuite subir aux résultats les corrections suivantes.

La flèche au centre sera augmentée de $-(f+f')$, somme des flèches des poutres.

Les tensions N_1 et N_2 au centre seront respectivement augmentées, savoir :

Pour N_1,

$$-\frac{8Eh}{1-\eta^2}\left(\frac{f}{a^2}+\eta\frac{f'}{b^2}\right);$$

Pour N_2,

$$-\frac{8Eh}{1-\eta^2}\left(\eta\frac{f}{a^2}+\frac{f'}{b^2}\right).$$

CHAPITRE XXIV.

MASSIF INDÉFINI SOLLICITÉ DANS UNE RÉGION LIMITÉE.

ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ D'UN SOLIDE INDÉFINI SOLLICITÉ DANS UNE CERTAINE RÉGION PAR DES FORCES EXTÉRIEURES DONNÉES.

Ce problème a un caractère tout à fait théorique. La distribution supposée pour les forces extérieures exigerait que certains éléments de volume, compris dans une région limitée, eussent des propriétés différentes du reste de la masse et fussent seuls susceptibles d'attractions ou de répulsions. Ce problème ne saurait donc être confondu avec celui qui a été traité au Chapitre II en vue de faire disparaître des équations générales les termes relatifs aux forces extérieures, car alors on supposait celles-ci partout proportionnelles à l'élément de volume $d\varpi$.

M. Boussinesq est parvenu à une solution très simple, dans le cas où les forces extérieures sont parallèles à une même direction, prise ponr axe Oz, en cherchant sous quelles conditions les équations indéfinies d'équilibre pouvaient être satisfaites, quand on pose *a priori* pour les déplacements u, v, w des équations de la forme

$$u = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}, \qquad v = -\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}, \qquad w = -\frac{d^2\varphi}{dz^2} + A\,\Delta\varphi,$$

A étant une constante et φ une fonction de x, y, z.

On trouve d'abord

$$0 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = -\frac{d}{dz}\Delta\varphi + A\frac{d}{dz}\Delta\varphi = (A-1)\frac{d}{dz}\Delta\varphi.$$

Ensuite, les équations indéfinies d'équilibre deviennent

$$[(\lambda+\mu)(A-1)-\mu]\frac{d^2}{dx\,dz}\Delta\varphi + X_0 = 0,$$

$$[(\lambda+\mu)(A-1)-\mu]\frac{d^2}{dy\,dz}\Delta\varphi + Y_0 = 0,$$

$$[(\lambda+\mu)(A-1)-\mu]\frac{d^2}{dz^2}\Delta\varphi + \mu A\,\Delta^2\varphi + Z_0 = 0.$$

Étant donné qu'on suppose $X_0 = Y_0 = 0$, ces trois équations peuvent être satisfaites à la fois si, d'une part, on prend

$$(\lambda + \mu)(A - 1) - \mu = 0, \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu},$$

et si, d'autre part, on choisit φ de telle sorte qu'en tout point on ait la relation

$$\mu A \Delta^2 \varphi + Z_0 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta^2 \varphi = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} Z_0.$$

On doit donc avoir $\Delta^2 \varphi = 0$ en tout point situé en dehors de la région sollicitée par les forces extérieures et $\Delta^2 \varphi$ proportionnel à Z_0 en tout point de cette région.

Pour obtenir ce résultat, il suffit de prendre pour φ le potentiel direct de masses électriques fictives dont l'intensité soit partout proportionnelle à Z_0.

On sait en effet que si, en chaque point (x_1, y_1, z_1), on attache à l'élément de volume $d\varpi$, qui lui correspond, une masse

$$dm = \rho \, d\varpi,$$

et que, si l'on prend le potentiel ordinaire de ces masses en un point quelconque (x, y, z), savoir :

$$V = \int \frac{dm}{r} \qquad \text{avec} \qquad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

ce potentiel satisfait à la relation

$$\Delta V = 0$$

en dehors de la région chargée, et à la relation

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

en tout point de cette région.

Quant au potentiel direct, dont l'expression est

$$\varphi = \frac{1}{2} \int r \, dm,$$

il est tel que partout on ait

$$\Delta \varphi = V,$$

car, ainsi que nous l'avons déjà vérifié,

$$\Delta r = \frac{2}{r}.$$

On aura donc finalement

$$\Delta^2 \varphi = 0$$

en dehors de la région chargée, et la relation

$$\Delta^2 \varphi = -4\pi\rho$$

en tout point de cette région.

Pour obtenir le résultat demandé, il suffit donc de prendre

$$4\pi\rho = \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} Z_0.$$

On obtient bien ainsi la solution du problème posé, car, en dehors des équations indéfinies d'équilibre, il n'y a pas d'autre condition à satisfaire aux limites, puisque le massif est indéfini. Toutefois, la région soumise à l'action des forces extérieures étant supposée limitée et à distance finie, on doit avoir, pour les déplacements u, v, w, des valeurs s'annulant à l'infini, ce qui revient à dire que ces valeurs sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$. Or, il en est bien ainsi, car φ est, comme r, une fonction homogène et du premier degré en

$$x - x_1, \quad y - y_1, \quad z - z_1.$$

Ses dérivées premières sont du degré zéro et ses dérivées secondes du degré (-1).

Le cas d'un solide indéfini supportant, dans certaines parties de sa masse, des forces X_0, Y_0, Z_0 absolument quelconques, se ramène au cas précédent ; car il suffit de superposer, par voie d'addition, les trois solutions correspondant aux cas où les forces extérieures se réduisent à leurs composantes X_0, Y_0, Z_0 respectivement.

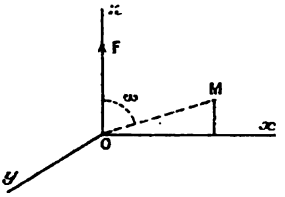
Cas particulier d'une force unique de grandeur finie. — Supposons que la force F soit la résultante de forces élémentaires agissant sur les éléments d'un volume infiniment petit en tous sens, situé à l'origine des coordonnées, et prenons sa direction comme axe des Z.

Alors $Z_0 = F$ et le potentiel direct sera, en laissant de côté le facteur constant, $\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$,

$$\varphi = Fr = F\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Pour simplifier, nous supposerons que le point M, dont on cherche les déplacements, soit dans le plan ZOx, de sorte que $y = 0$. Il en résultera par raison de symétrie $v = 0$, le déplacement devant se faire dans le plan ZOx.

Fig. 191.



En désignant par ω l'angle que fait OM avec Oz, et en tenant compte de ce que $\Delta\varphi = \frac{2F}{r}$, on trouve facilement

$$u = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} = +F\frac{xz}{r^3} = \frac{F\sin\omega\cos\omega}{r},$$

$$w = -\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \Lambda\,\Delta\varphi = \frac{F}{r}\left(\frac{z^2}{r^2}-1\right) + 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{F}{r}$$

$$= -\frac{F\sin^2\omega}{r} + 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{F}{r}.$$

En rétablissant le facteur $\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$, et en considérant r comme constant, c'est-à-dire en envisageant les molécules M réparties sur une sphère de rayon r, autour du point d'application de la force, on reconnaît que les déplacements peuvent être considérés comme résultant :

1° D'une translation commune parallèle à la direction Oz de la force et ayant pour valeur $\frac{1}{4\pi\mu}\frac{F}{r}$;

2° D'un déplacement égal à $\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{F\sin\omega}{r}$ effectué dans la direction dont les cosinus directeurs sont $\cos\omega$ et $(-\sin\omega)$, c'est-à-dire le long de la tangente au cercle méridien.

Pour les deux points de rencontre de la force avec la sphère, c'est-à-dire pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, ce dernier déplacement est nul. Dans l'hémisphère pour lequel $\alpha < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour celui qui est situé dans la direction de la force, ce déplacement tend à éloigner les molécules de la ligne d'action de la force, car u est positif. Il y a ainsi une sorte de raréfaction des molécules autour du pôle correspondant. Dans l'hémisphère opposé, il y a au contraire une sorte de concentration vers le pôle.

Ces considérations fournissent une idée assez nette de la déformation.

En ce qui concerne les tensions, on peut se borner à étudier celles qui sont relatives à des plans parallèles à Oy. La composante Y est toujours nulle par raison de symétrie, et l'on a

$$X = N_1\alpha + T_2\gamma,$$
$$Z = T_2\alpha + N_3\gamma,$$

le cosinus directeur β de la normale au plan étant nul. Il suffit donc de calculer N_1, N_3, T_2.

En laissant encore de côté le facteur $\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$, on a d'abord

$$0 = (A-1)\frac{d}{dz}\Delta\varphi,$$

et ensuite

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx} = \lambda(A-1)\frac{d}{dz}\Delta\varphi - 2\mu\frac{d^3\varphi}{dx^2\,dz} = -\frac{2\mu F z}{r^3}\left[\frac{\mu}{(\lambda+\mu)} + \frac{3x^2}{r^2}\right],$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz} = [\lambda(A-1) + 2\mu A]\frac{d}{dz}\Delta\varphi - 2\mu\frac{d^3\varphi}{dz^3} = -\frac{2\mu F z}{r^3}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{3z^2}{r^2}\right),$$

$$T_2 = \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) = \mu A\frac{d}{dx}\Delta\varphi - 2\mu\frac{d^3\varphi}{dx\,dz^2} = -2\mu\frac{F x}{r^3}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{3z^2}{r^2}\right).$$

On peut reconnaître, d'après ces expressions, un certain nombre de particularités intéressantes.

Pour $z = 0$, on a

$$N_1 = N_3 = 0 \qquad \text{avec} \qquad T_2 \neq 0.$$

Il en résulte que, dans le plan équatorial Oxy, on n'a que des efforts tangentiels dirigés d'ailleurs suivant les rayons issus du centre, et, sur l'élément plan perpendiculaire au rayon, on n'a qu'un effort tangentiel dirigé suivant Oz.

On reconnaît d'ailleurs que N_1, N_3, T_2 se présentent sous la forme de produits de F par $\frac{1}{r^2}$ et par des expressions qui ne dépendent que de la direction de OM, c'est-à-dire de $\frac{x}{r} = \sin\omega$ et $\frac{z}{r} = \cos\omega$. Il en résulte que toutes les tensions sur des plans d'orientation quelconque seront encore proportionnelles à l'inverse de r^2.

On a, d'une manière générale,

$$\frac{T_2}{N_3} = \frac{x}{z}.$$

Il en résulte que, si l'on considère spécialement les tensions exercées sur un plan normal à Oz, ou normal à la direction de la force, celles-ci sont dirigées vers le centre, c'est-à-dire vers le point d'application de la force. Quand z est positif, N_3 est négatif et représente une pression. L'inverse a lieu dans la région opposée à la direction de la force.

On a ainsi un aperçu assez net de la répartition de la force sur des plans perpendiculaires à sa direction.

Pour $x = z$, c'est-à-dire tout le long d'un cône ayant pour axe Oz et ses génératrices inclinées à 45° sur cet axe, on a

$$N_1 = N_3 = T_2.$$

Il en résulte que les plans principaux sont, en outre du plan méridien, le plan tangent au cône et le plan perpendiculaire. Sur le plan tangent la tension principale est nulle, car on a

$$X = Y = N_1(\alpha + \gamma) = 0.$$

Sur le plan perpendiculaire, on a

$$\alpha + \gamma = \sqrt{2} \qquad \text{et par suite} \qquad X = Y = N_1\sqrt{2},$$

d'où

$$N = 2N_1.$$

Le long du plan tangent au cône il n'y a donc absolument aucune tension ni normale, ni tangentielle. On pourrait donc, sans troubler l'équilibre du massif indéfini, opérer une coupure le long de la surface du cône, en laissant une soudure au point d'application de la force extérieure.

On peut même supprimer cette soudure, à condition de partager convenablement la force effective entre les différentes nappes du cône, extérieure et intérieure.

Par exemple, pour la nappe qui contient la direction de z positif, il faut que la force effective qui lui est appliquée soit égale à la somme des tensions N_3 sur une section droite quelconque, menée à la distance z de l'origine. Cette somme est, avec la condition de z constante,

$$\int_0^{z\sqrt{2}} N_3 \times 2\pi r\,dr.$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$\frac{2\pi\mu}{\sqrt{2}} F \left[\frac{3\mu+\lambda}{(\lambda+\mu)}\right],$$

et, en rétablissant le facteur $\frac{1}{8\pi\mu}\,\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda}$,

$$\frac{F}{4\sqrt{2}}\,\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}.$$

Cas de deux forces égales et directement opposées dont les points d'application sont voisins. — Si l'on suppose l'une des forces F appliquée à l'origine des coordonnées et dirigée suivant Oz, les déplacements et les tensions qui en résulteront pour un point (x, y, z) seront conformes aux résultats précédents. Si la seconde force $(-F)$ est appliquée au point $(0, 0, \varepsilon)$ et si l'on regarde ε comme un infiniment petit relativement à x, y, z, les résultats seront égaux aux premiers changés de signe et augmentés de leurs différentielles respectives par rapport à z, dans lesquelles $dz = \varepsilon$. Les déplacements totaux et les tensions totales seront donc, au signe près, les différentielles par rapport à z des expressions trouvées plus haut.

Or, en ce qui concerne les déplacements, ces expressions sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$; leurs différentielles seront de l'ordre de grandeur de $\frac{\varepsilon}{r^2}$. En ce qui concerne les tensions, elles sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r^2}$ et leurs différentielles sont, par suite, de

l'ordre de grandeur de $\frac{\varepsilon}{r^3}$. Dans les deux cas s'introduit un multiplicateur de l'ordre de $\frac{\varepsilon}{r}$, regardé comme très petit.

Ce résultat, malgré sa forme un peu vague, est intéressant au point de vue pratique, car du moment que deux forces égales et directement opposées dont les points d'application sont voisins ne produisent que des effets négligeables en des points suffisamment éloignés des points d'application eux-mêmes, on peut, avec la même approximation, remplacer une force par une autre égale en transportant son point d'application en un point voisin sur sa direction. Les règles données par la mécanique rationnelle pour la composition des forces sont donc applicables dans certains cas à un solide naturel et l'on peut remplacer un système de forces par un autre équivalent quand, d'une part, tous les points d'application des forces de ces systèmes sont localisés dans une région peu étendue du solide et que, d'autre part, il s'agit uniquement de rechercher les effets produits par ces systèmes en des points suffisamment éloignés de cette région.

Ces remarques ont servi à justifier l'extension de la solution de Saint-Venant pour le problème qui porte son nom.

CHAPITRE XXV.

MASSIF INDÉFINI LIMITÉ PAR UN PLAN ET CHARGÉ DANS UNE RÉGION LIMITÉE DE CE PLAN.

ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ D'UN MASSIF INDÉFINI LIMITÉ PAR UNE SURFACE PLANE SUR LAQUELLE S'EXERCENT DANS UNE RÉGION LIMITÉE DES FORCES EXTÉRIEURES DONNÉES (PROBLÈME DE M. BOUSSINESQ).

Forme d'une solution générale. — Prenons pour plan des xy la surface limite du solide, et supposons qu'il n'y ait aucune force agissant sur la masse.

M. Boussinesq a donné une solution générale qu'on peut résumer de la manière suivante :

Cherchons sous quelles conditions on peut satisfaire aux trois équations générales d'équilibre par des expressions de la forme

$$u = \alpha - z\frac{d\Phi}{dx},$$
$$v = \beta - z\frac{d\Phi}{dy},$$
$$w = \gamma - z\frac{d\Phi}{dz},$$

α, β, γ, et Φ étant des fonctions satisfaisant à la condition $\Delta F = 0$.

De cette dernière condition on tire facilement

$$\Delta(zF) = 2\frac{dF}{dz},$$

de sorte que l'on a

$$\Delta u = -2\frac{d^2\Phi}{dx\,dz}, \qquad \Delta v = -2\frac{d^2\Phi}{dy\,dz}, \qquad \Delta w = -2\frac{d^2\Phi}{dz^2}.$$

D'un autre côté, on a simplement

$$0 = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} - \frac{d\Phi}{dz}.$$

Par suite, la première équation générale d'équilibre devient

$$(\lambda + \mu)\frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) - (\lambda + 3\mu)\frac{d^2\Phi}{dx\,dz} = 0,$$

et les deux autres sont de même forme. On voit qu'elles seront toutes les trois satisfaites si l'on peut établir la relation

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right),$$

laquelle n'a rien d'incompatible avec les hypothèses primitives. Si elle est remplie, on a d'ailleurs

$$0 = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) = \frac{2\mu}{\lambda + \mu}\frac{d\Phi}{dz}.$$

Il reste donc trois fonctions arbitraires α, β, γ, satisfaisant d'ailleurs à la condition $\Delta F = 0$.

Si on les suppose choisies de telle sorte que les dérivées $\frac{d\Phi}{dx}$, $\frac{d\Phi}{dy}$, $\frac{d\Phi}{dz}$ restent finies pour $z = 0$, ou tout au moins que leurs produits par z soient nuls pour cette valeur, on aura sur la surface libre, c'est-à-dire pour $z = 0$,

$$u = \alpha, \qquad v = \beta, \qquad w = \gamma.$$

On pourra ainsi se donner sur la surface telles valeurs que l'on voudra pour u, v, w, en combinant des séries de solution simples α, β, γ.

Mais cette façon de présenter le problème n'est pas la seule intéressante. Ce que l'on peut connaître en général à la surface, ce ne sont pas les déplacements, mais les forces extérieures égales et opposées aux tensions T_2, T_1, N_3. Voyons donc ce que donnent pour ces tensions les hypothèses faites ci-dessus.

Rappelons que l'on a

$$T_2 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

$$N_3 = \lambda\,\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}.$$

On en déduit, en effectuant les calculs,

$$\frac{1}{\mu}T_2 = \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\Phi}{dx} - 2z\frac{d^2\Phi}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\mu}T_1 = \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\Phi}{dy} - 2z\frac{d^2\Phi}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\mu}N_3 = 2\frac{d\gamma}{dz} - \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\frac{d\Phi}{dz} - 2z\frac{d^2\Phi}{dz^2}.$$

En supposant nuls, pour $z = 0$, les derniers termes de ces formules, il s'agira donc de choisir α, β, γ, ainsi que Φ qui s'en déduit, de manière à reproduire dans les seconds membres telles valeurs de T_2, T_1, N_3 que l'on se sera données à l'avance.

Potentiels logarithmiques. Leurs principales propriétés. — M. Boussinesq est parvenu à rendre la solution très explicite en considérant des potentiels spéciaux, qu'il a appelés potentiels logarithmiques à trois variables et dont voici la définition et les principales propriétés.

Imaginons que sur un élément $d\sigma = dx_1\,dy_1$ de la surface, correspondant au point $(x_1, y_1, 0)$, on répande une couche de matière fictive dont la densité soit $\rho(x_1\,y_1)$ et dont la masse soit par suite $dm = \rho\,d\sigma$. Puis formons pour un point arbitraire (x, y, z) du solide, z étant supposé positif, la somme

$$\psi = \int\left[r - z\log\frac{z+r}{R}\right]dm,$$

r désignant le radical $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2}$ et R étant une constante quelconque, que l'on pourra prendre égale à l'unité pour simplifier les écritures, et qui n'intervient du reste aucunement dans les dérivées de ψ à partir du second ordre.

La fonction $\psi(x, y, z)$ sera le potentiel en question au point (x, y, z).

On trouve facilement :

$$\frac{d\psi}{dx} = \int \frac{x - x_1}{r + z} dm,$$

$$\frac{d\psi}{dy} = \int \frac{y - y_1}{r + z} dm,$$

$$\frac{d\psi}{dz} = -\int \log(r + z)\, dm,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \int \left[\frac{1}{r + z} - \frac{(x - x_1)^2}{r(r + z)^2}\right] dm,$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \int \left[\frac{1}{r + z} - \frac{(y - y_1)^2}{r(r + z)^2}\right] dm,$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\int \frac{dm}{r},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx\,dy} = -\int \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{r(r + z)^2} dm,$$

$$\frac{d^2\psi}{dy\,dz} = -\int \frac{(y - y_1)}{r(r + z)} dm,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx\,dz} = -\int \frac{x - x_1}{r(r + z)} dm.$$

En désignant par V le potentiel newtonien des masses dm, on voit, en examinant les dérivées secondes :

1° que

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -V;$$

2° que

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = V = -\frac{d^2\psi}{dz^2}$$

et, par suite, que ψ satisfait à la relation $\Delta\psi = 0$, en tout point du massif.

On reconnaît aussi facilement que toutes les dérivées secondes de ψ présentent les mêmes caractères généraux que V. Elles s'annulent à l'infini et les intégrales qui les représentent sont absolument convergentes en tout point de la surface, même pour les points où r et $r + z$ s'annulent, c'est-à-dire pour les points de la zone chargée. Cela résulte de ce qu'elles sont des intégrales ou

des sommes d'intégrales pouvant se mettre sous la forme

$$\int \frac{f(xyzx_1y_1)}{r}\,dm,$$

la fonction f ayant un module inférieur à une certaine limite M, quels que soient x, y, z, x_1, y_1.

Toutes ces dérivées secondes peuvent être elles-mêmes dérivées, une ou plusieurs fois par rapport à x ou à y, non seulement en un point quelconque du massif, mais aussi pour un point de la surface. Dans ces différentiations, z devant être traité comme une constante, puis annulé quand il s'agit d'un point situé sur la surface, on peut même commencer par faire $z = 0$, avant les différentiations par rapport à x ou y. Il en est, bien entendu, de même pour toutes les dérivées en x ou y de $\frac{d\psi}{dz}$.

Il reste finalement, du moins quand on se borne aux dérivées d'ordre égal ou inférieur à 4, à étudier spécialement les dérivées première et seconde par rapport à z de $\frac{d^2\psi}{dz^2} = -V$.

En ce qui concerne $\frac{dV}{dz}$, on sait, d'après la théorie des potentiels des surfaces attirantes, que, en dehors de la zone chargée, on a $\frac{dV}{dz} = 0$ et que, en un point de cette zone, on a

$$\frac{dV}{dz} = -2\pi\rho.$$

Cette dérivée est donc partout bien déterminée, et elle sera même continue sur la surface si ρ est continu et s'annule sur le contour de la zone chargée.

On sait aussi que $\frac{d^2V}{dz^2}$ est fini pour $z = 0$ (*voir* Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, p. 232) ainsi que les autres dérivées secondes.

On obtient ces résultats en employant un raisonnement classique qui consiste à ramener le problème au cas où la zone chargée se réduit à un petit cercle de rayon fini R_0, ayant comme centre le point $(x, y, 0)$, la densité ρ étant constante à son intérieur. Si alors on prend des coordonnées polaires en posant

$$x_1 - x = R\cos\omega,$$
$$y_1 - y = R\sin\omega,$$

on aura

$$r^2 = R^2 + z^2 \qquad \text{et} \qquad dm = \rho\, d\sigma = \rho R\, d\omega\, dR,$$

et il faudra, regardant z comme constant, intégrer de $R = 0$ à $R = R_0$ et de $\omega = 0$ à $\omega = 2\pi$, puis faire tendre z vers zéro. En opérant ainsi, par exemple, pour $\frac{d^2V}{dz^2} = \int \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) dm$, on obtient

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{R_0} \left[\frac{3z^2}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \rho R\, dR.$$

Or la première intégration relative à R donne

$$\left[\frac{\rho}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\rho z^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^{R_0}$$

et la seconde intégration multiplie cette expression par 2π. En faisant $z = 0$, on trouve comme résultat $\frac{2\pi\rho}{R_0}$, quantité finie. La dérivée dont il s'agit sera donc elle-même finie.

Pour les points du contour de la zone chargée, on ne peut plus trouver de valeur finie pour R_0. Le rayon du cercle tend vers zéro en même temps que la distance du point considéré au contour, et $\frac{2\pi\rho}{R_0}$ tend vers l'infini, à moins cependant que la densité ρ ne tende elle-même vers zéro, de manière que $\frac{\rho}{R_0}$ demeure fini. Il en est ainsi généralement dans les phénomènes naturels, ρ s'annulant sur le contour de la zone chargée.

Nous pouvons donc admettre dans ces conditions que les produits par z des dérivées troisièmes et quatrièmes du potentiel ψ s'annulent en tout point de la surface, même dans la zone chargée.

Solutions types de M. Boussinesq. — Cela posé, M. Boussinesq est parvenu à composer des solutions types très simples, de manière à annuler à la surface, dans l'étendue de la zone chargée, deux des trois fonctions T_1, T_2, N_3, ces trois fonctions étant d'ailleurs nulles en dehors de cette zone. Voici comment on peut les résumer et les vérifier.

Première solution. — Supposons d'abord que les forces appliquées soient parallèles à Oz. Il s'agit d'annuler en même temps T_2 et T_1 sur la surface.

On prendra

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{d^2\psi}{dx\,dz},$$

$$\beta = \frac{-1}{4\pi\mu}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{d^2\psi}{dy\,dz},$$

$$\gamma = \frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{d^2\psi}{dz^2}.$$

En tenant compte de ce que $\Delta\psi = 0$, on trouve facilement

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{d^3\psi}{dz^3},$$

et, par suite, on peut prendre

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{d^2\psi}{dz^2},$$

car on aura bien ainsi la condition nécessaire

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{d\Phi}{dz}.$$

On aura d'ailleurs

$$0 = \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)}\,\frac{d^3\psi}{dz^3} = \frac{-1}{2\pi(\lambda+\mu)}\,\frac{dV}{dz}.$$

Pour calculer les valeurs des tensions, on peut remarquer que

$$\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2} = \frac{d\Phi}{dx}$$

et que

$$2\frac{d\gamma}{dz} - \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2\pi\mu}\,\frac{d^3\psi}{dz^3}.$$

Par suite, on obtient simplement :

$$T_2 = -\frac{z}{2\pi}\,\frac{d^4\psi}{dx\,dz^3} = \frac{z}{2\pi}\,\frac{d^2V}{dx\,dz},$$

$$T_1 = -\frac{z}{2\pi}\,\frac{d^4\psi}{dy\,dz^3} = \frac{z}{2\pi}\,\frac{d^2V}{dy\,dz},$$

$$N_3 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d^3\psi}{dz^3} - \frac{z}{2\pi}\,\frac{d^4\psi}{dz^4} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{dV}{dz} + \frac{z}{2\pi}\,\frac{d^2V}{dz^2}.$$

On reconnaît ainsi que pour $z = 0$ on a partout $T_2 = T_1 = 0$, et que N_3 se réduit à

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d^3\psi}{dz^3} = \frac{-1}{2\pi}\frac{dV}{dz}.$$

Or, $\frac{dV}{dz} = 0$ en dehors de la région chargée, et à l'intérieur de celle-ci on a $\frac{dV}{dz} = -2\pi\rho$. On a donc bien $N_3 = 0$ en dehors de la région chargée et $N_3 = +\rho$ à son intérieur.

Il suffit donc de prendre, pour calculer le potentiel ψ, une couche de matière fictive dont la densité soit en chaque point de la zone chargée égale à la valeur supposée de N_3. La solution est donc complète, sous les réserves faites plus haut.

Il est à remarquer que les expressions des tensions considérées sont indépendantes partout des coefficients d'élasticité λ et μ. On peut donc dire que la répartition des charges sur les plans horizontaux, parallèles à la surface, est indépendante de la nature de la matière composant le massif.

Deuxième solution. — Supposons maintenant que les forces appliquées soient parallèles à Ox. Il s'agit d'annuler à la fois T_1 et N_3 sur la surface.

On prendra

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2\pi\mu}\frac{d^2\psi}{dz^2},$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{d^2\psi}{dx\,dy},$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{d^2\psi}{dx\,dz}.$$

En tenant compte de ce que $\Delta\psi = 0$, on trouve facilement

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = -\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2} + \frac{1}{2\pi\mu}\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2}$$

et, par suite,

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2}.$$

Cette fois, on pourra prendre

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{d^2\psi}{dx\,dz},$$

On aura d'ailleurs

$$\theta = \frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2} = \frac{-1}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{dV}{dx}.$$

Les valeurs des tensions T_2, T_1, N_3 sont, par un calcul facile,

$$T_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{d^3\psi}{dz^3} - \frac{z}{2\pi}\frac{d^4\psi}{dx^2\,dz^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV}{dz} + \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dx^2},$$

$$T_1 = -\frac{z}{2\pi}\frac{d^4\psi}{dx\,dy\,dz^2} = \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dx\,dy},$$

$$N_3 = -\frac{z}{2\pi}\frac{d^4\psi}{dx\,dz^3} = \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dx\,dz}.$$

On reconnaît ainsi que pour $z = 0$ on a partout $T_1 = 0$ et $N_3 = 0$. Quant à T_2, il a pour valeur

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d^3\psi}{dz^3} = \frac{-1}{2\pi}\frac{dV}{dz}.$$

Il est nul en dehors de la région chargée et égal à ρ dans l'intérieur de cette dernière.

Pour calculer le potentiel ψ, on a donc simplement à prendre une couche de matière fictive dont la densité soit en chaque point de la région chargée égale à la valeur supposée de T_2.

On remarquera encore que les expressions des composantes T_2, T_1, N_3 de la tension sur un plan horizontal quelconque sont indépendantes des coefficients d'élasticité.

On obtiendrait par permutation la solution qui serait relative à des forces parallèles à Oy.

A l'aide des solutions simples ainsi obtenues, on pourrait parvenir à la détermination en un point quelconque (xyz), de toutes les composantes des déplacements et des tensions. Mais les expressions obtenues sont assez compliquées dans le cas général, et nous ne les développerons dans les cas particuliers que lorsqu'il en sera besoin.

Nous signalerons cependant l'expression très simple que conservent les composantes T_2, T_1, N_3 de la tension sur les plans parallèles à la surface.

Désignons respectivement par V_x, V_y, V_z les potentiels ordinaires afférents aux couches de matière fictive qui représenteraient les valeurs données de T_2, T_1, N_3 dans la région chargée de la

surface. En additionnant les résultats des trois solutions simples correspondantes, nous obtiendrons :

$$T_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV_x}{dz} + \frac{z}{2\pi}\frac{d}{dx}\left[\frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} \quad \frac{dV_z}{dz}\right],$$

$$T_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV_y}{dz} + \frac{z}{2\pi}\frac{d}{dy}\left[\frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_z}{dz}\right],$$

$$N_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV_z}{dz} + \frac{z}{2\pi}\frac{d}{dz}\left[\frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_z}{dz}\right].$$

Nous signalerons aussi la forme relativement simple du déplacement w, dans le cas de la première solution, correspondant à des forces appliquées normales à la surface. C'est encore le potentiel ordinaire V qui seul intervient. On a, en effet, dans ce cas :

$$w = \gamma - z\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\frac{d^2\psi}{dz^2} - z\frac{d^3\psi}{dz^3}\right]$$
$$= -\frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}V - z\frac{dV}{dz}\right].$$

Simplification du problème. Considération d'une force extérieure unique. — La considération d'une force extérieure unique a une double utilité. D'abord, elle fournit les éléments des intégrales qui sont à envisager dans le cas général, et il est souvent avantageux de n'opérer les sommations qu'une fois les résultats élémentaires obtenus sous leur forme définitive.

En second lieu, quand on ignore la répartition réelle des forces extérieures dans la région chargée, elle permet de trouver des résultats approchés pour des points suffisamment éloignés en considérant simplement les résultantes des forces extérieures. Ces résultats sont d'autant plus exacts qu'ils s'appliquent à des points plus éloignés de la région chargée.

Mais il ne faut jamais perdre de vue que les résultats obtenus ne sont pas applicables au voisinage immédiat du point d'application de la force extérieure. Il faut alors avoir égard à la répartition réelle ou approchée de la force extérieure dans la région chargée, qui pourra être plus ou moins petite, mais dont les dimensions, loin d'être négligeables par rapport à z, seront telles que pour $z = 0$ leur rapport à z devient au contraire généralement infini.

Au surplus, les dimensions de la région chargée doivent être

supposées telles que les densités ρ soient finies, et même ne dépassent pas une certaine limite au delà de laquelle la matière se disloquerait ou subirait des déformations permanentes, de sorte que l'on n'aurait plus affaire à un phénomène élastique. Nous croyons devoir insister sur ces points que certains auteurs paraissent souvent perdre de vue.

Supposons une compression extérieure dont les composantes soient respectivement A, B, C, l'origine des coordonnées étant confondue avec son point d'application. Les masses de matière fictive à considérer seront respectivement (— A), (— B), (— C), et l'on aura pour les potentiels logarithmiques et ordinaires les valeurs :

$$\psi_x = -[r - z\log(r+z)]A, \qquad V_x = -\frac{d^2\psi_x}{dz^2} = -\frac{A}{r},$$

$$\psi_y = -[r - z\log(r+z)]B, \qquad V_y = -\frac{d^2\psi_y}{dz^2} = -\frac{B}{r},$$

$$\psi_z = -[r - z\log(r+z)]C, \qquad V_z = -\frac{d^2\psi_z}{dz^2} = -\frac{C}{r}.$$

Étudions d'abord les tensions T_1, T_2, N_3 sur les plans perpendiculaires à Oz, dont les expressions ne dépendent que des potentiels V. En tenant compte de $\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} = -\frac{x}{r^3}$ et des deux résultats analogues, on trouve

$$T_2 = -\frac{A}{2\pi}\frac{z}{r^3} + \frac{z}{2\pi}\frac{d}{dx}\left[\frac{Ax + By + Cz}{r^3}\right]$$
$$= -\frac{A}{2\pi}\frac{z}{r^3} + \frac{z}{2\pi}\frac{A}{r^3} - \frac{z}{2\pi}(Ax + By + Cz)\frac{3x}{r^5},$$

ou, en simplifiant,

$$T_2 = -\frac{3z}{2\pi r^3}\left[A\frac{x}{r} + B\frac{y}{r} + C\frac{z}{r}\right]\frac{x}{r}.$$

On trouverait de même :

$$T_1 = -\frac{3z}{2\pi r^3}\left[A\frac{x}{r} + B\frac{y}{r} + C\frac{z}{r}\right]\frac{y}{r},$$
$$N_3 = -\frac{3z}{2\pi r^3}\left[A\frac{x}{r} + B\frac{y}{r} + C\frac{z}{r}\right]\frac{z}{r}.$$

Comme $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ sont les cosinus directeurs du rayon r allant de l'origine, point d'application de la force, au point (xyz), on voit que la tension exercée en ce point sur un élément plan parallèle à la surface est une compression, dirigée précisément suivant le rayon. Cette compression a pour valeur

$$\frac{3z}{2\pi r^3}\left[A\frac{x}{r} + B\frac{y}{r} + C\frac{z}{r}\right].$$

Or, le trinome entre parenthèses exprime la projection sur ce même rayon de la force extérieure donnée. On a donc l'énoncé suivant :

Pour trouver en un point (xyz) la compression exercée sur un élément plan parallèle à la surface, il suffit de projeter la force extérieure sur le rayon mené par ce point, puis de réduire cette projection dans le rapport $\frac{3z}{2\pi r^3}$. Cette réduction peut se faire en la multipliant d'abord par $\frac{z}{r}$ (opération qui revient à la projeter sur la verticale Oz), et ensuite en la multipliant par $\frac{3}{2\pi r^2}$ (opération qui revient à la répartir sur le tiers de la surface de la demi-sphère de rayon r). Cette compression est dirigée suivant le rayon.

Ce résultat est très expressif et peut conduire à un certain nombre de conséquences intéressantes.

Si l'on suppose $x = y = 0$, c'est-à-dire si l'on envisage les points situés sur la normale à la surface au point d'application de la force, on a $T_2 = T_1 = 0$, et N_3 se réduit à

$$N_3 = -\frac{3C}{2\pi r^2}.$$

Elle ne dépend que de C et décroît comme l'inverse du carré de la distance. Elle est égale à la compression moyenne que produirait la composante C à la profondeur $z = r$, si on la répartissait sur un cercle dont la surface serait $\frac{2}{3}\pi r^2$, cercle qui correspondrait à un cône ayant un demi-angle au sommet α, tel que $\tang \alpha = \frac{2}{3}$. Cela fournit une règle pratique utilisable. On aurait $\alpha = 33°30'$ environ. La valeur $\alpha = 45°$ qu'on lui substitue parfois est moins rationnelle.

Pour étudier les autres effets de la force extérieure, il est utile de considérer séparément ses composantes. Nous supposerons d'abord qu'elle se réduise à sa composante verticale C. En supprimant les indices, nous appellerons ψ et V les potentiels correspondants.

Cherchons les expressions de u, v, w qui découlent de la première solution type. Nous avons :

$$u = \alpha - z\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{d^2\psi}{dx\,dz} + z\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2}\right],$$
$$v = \beta - z\frac{d\Phi}{dy} = -\frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{d^2\psi}{dy\,dz} + z\frac{d^3\psi}{dy\,dz^2}\right],$$
$$w = \gamma - z\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{d^2\psi}{dz^2} - z\frac{d^3\psi}{dz^3}\right].$$

Les seules dérivées intervenant sont celles de $\frac{d\psi}{dz}$ et de $\frac{d^2\psi}{dz^2} = -V$.

On a :

$$\frac{d\psi}{dz} = C\log(z+r), \qquad \frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{C}{r}, \qquad \frac{d^3\psi}{dz^3} = -C\frac{z}{r^3};$$
$$\frac{d^2\psi}{dx\,dz} = \frac{Cx}{r(r+z)}, \qquad \frac{d^3\psi}{dx\,dz^2} = -\frac{Cx}{r^3},$$
$$\frac{d^2\psi}{dy\,dz} = \frac{Cy}{r(r+z)}, \qquad \frac{d^3\psi}{dy\,dz^2} = -\frac{Cy}{r^3}.$$

En substituant, on trouve :

$$u = \frac{C}{4\pi\mu r}\left[\frac{xz}{r^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{x}{r+z}\right],$$
$$v = \frac{C}{4\pi\mu r}\left[\frac{yz}{r^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{r+z}\right],$$
$$w = \frac{C}{4\pi\mu r}\left[\frac{z^2}{r^2} + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right].$$

Les déplacements se font dans les plans verticaux passant par la ligne d'action Oz de la force C, et de la même manière dans tous. Mais ils ne sont pas dirigés suivant le rayon r.

Si l'on examine, pour simplifier, ce qui se passe dans le plan z Ox, où $y = v = 0$, et si l'on appelle α l'angle, compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, que fait le rayon r avec Oz, on aura $x = r\sin\alpha$,

$z = r\cos\alpha$:

$$u = \frac{C}{4\pi\mu r}\left[\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right],$$

$$w = \frac{C}{4\pi\mu r}\left[\cos^2\alpha + \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right].$$

Sur une sphère de rayon r, les déplacements sont aisés à suivre.

Le déplacement vertical w va constamment en diminuant quand α augmente de o à $\frac{\pi}{2}$. Au facteur $\frac{C}{4\pi\mu r}$ près, il varie de $\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ à $\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$, cette dernière valeur étant obtenue sur la surface libre.

Le déplacement horizontal u est nul pour $\alpha = 0$. Il est ensuite positif. Puis il s'annule pour la valeur α' satisfaisant à l'équation

$$\cos\alpha(1+\cos\alpha) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Ensuite, il devient négatif; et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour la surface libre, sa valeur est

$$u = -\frac{C}{4\pi r(\lambda+\mu)}.$$

La matière se trouve donc refoulée autour de Oz, dans l'intérieur d'un cône ayant α' comme demi-angle au sommet, et attirée vers Oz à l'extérieur de ce cône.

On pourrait achever la détermination des composantes des tensions.

On a, par exemple,

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}.$$

Or :

$$\theta = -\frac{C}{2\pi(\lambda+\mu)}\,\frac{z}{r^3};$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{C}{4\pi\mu}\left\{\frac{z}{r^3} - \frac{3x^2z}{r^5} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\frac{1}{r(r+z)} - \frac{x^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2}\right]\right\};$$

d'où

$$N_1 = \frac{C}{2\pi}\left\{-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\frac{z}{r^3} + \frac{z}{r^3} - \frac{3x^2z}{r^5} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\frac{1}{r(r+z)} - \frac{x^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{C}{2\pi}\left\{-\frac{3x^2z}{r^5} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\frac{z}{r^3} - \frac{1}{r(r+z)} + \frac{x^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2}\right]\right\}.$$

On obtiendrait N_2 en permutant x en y.

Si l'on se borne, en raison de la symétrie, à étudier ce qui se passe dans le plan zOx, on pourra faire $y = 0$ et $x^2 = r^2 - z^2$, et l'on obtiendra, toutes réductions faites :

$$N_1 = \frac{C}{2\pi}\left[-\frac{3x^2z}{r^5} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r(r+z)}\right],$$

$$N_2 = \frac{C}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\frac{z}{r^3} - \frac{1}{r(r+z)}\right].$$

On doit d'ailleurs avoir $T_3 = 0$, en raison de la symétrie.

Si l'on examine, en particulier, les points situés sur l'axe Oz, pour lesquels on a $x = 0$, $z = r$, on trouve

$$N_1 = \frac{C}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{2r^2}, \qquad N_2 = \frac{C}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{2r^2} = N_1,$$

N_1 et N_2 sont des tractions. Elles sont plus petites en valeur absolue que la compression verticale au même point, laquelle est

$$N_3 = -\frac{3C}{2\pi}\frac{z^3}{r^5} = -\frac{3C}{2\pi}\frac{1}{r^2}.$$

Si l'on suppose $\lambda = \mu$, on aurait en ce point $\frac{N_3}{N_1} = 12$. C'est donc N_3 qui détermine la fatigue de la matière.

Examinons encore les points situés sur la surface libre $x = r$, $z = 0$. On trouve

$$N_1 = \frac{C}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r^2}, \qquad N_2 = -\frac{C}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r^2},$$

N_1 est encore une traction, mais N_2 est une compression égale à N_1 en valeur absolue. On a d'ailleurs $N_3 = 0$. C'est N_1 qui détermine la fatigue de la matière.

On pourrait pousser cette étude plus loin et déterminer en chaque point les tensions principales. Mais les résultats obtenus manquent de simplicité.

On peut faire une étude du même genre quand on suppose la force extérieure réduite à sa composante A parallèle à Ox.

On a cette fois, en se reportant à la seconde solution type :

$$u = \alpha - z\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{2\pi\mu}\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{z}{4\pi\mu}\frac{d^3\psi}{dx^2\,dz},$$

$$v = \beta - z\frac{d\Phi}{dy} = \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{d^2\psi}{dx\,dy} - \frac{z}{4\pi\mu}\frac{d^3\psi}{dx\,dy\,dz},$$

$$w = \gamma - z\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{d^2\psi}{dx\,dz} - \frac{z}{4\pi\mu}\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2}.$$

On trouve facilement :

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{Ax}{r+z}, \qquad \frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{A}{r},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx\,dy} = A\frac{xy}{r(r+z)^2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx\,dz} = A\frac{x}{r(r+z)},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -A\left[\frac{1}{r+z} - \frac{x^2}{r(r+z)^2}\right],$$

$$\frac{d^3\psi}{dx^2\,dz} = A\left[\frac{1}{r(r+z)} - \frac{x^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2}\right],$$

$$\frac{d^3\psi}{dx\,dy\,dz} = -A\frac{xy(2r+z)}{r^3(r+z)^2},$$

$$\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2} = -A\frac{x}{r^3}.$$

On en déduit :

$$\frac{u}{A} = \frac{1}{2\pi\mu}\frac{1}{r} - \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\left[\frac{1}{r+z} - \frac{x^2}{r(r+z)^2}\right] - \frac{z}{4\pi\mu}\left[\frac{1}{r(r+z)} - \frac{x^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2}\right],$$

$$\frac{v}{A} = \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{xy}{r(r+z)^2} + \frac{z}{4\pi\mu}\frac{xy(2r+z)}{r^3(r+z)^2},$$

$$\frac{w}{A} = \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{x}{r(r+z)} + \frac{zx}{4\pi\mu r^3}.$$

Malgré la complication de ces expressions, on peut se faire une représentation des déplacements en recherchant comment se comportent les différents points d'un cercle horizontal ayant son centre sur Oz. Le long de ce cercle, on a r et z constants.

On voit alors que $\frac{u}{A}$ contient un certain nombre de termes ne dépendant que de r et z. Ces termes représentent une translation

commune à tous les points du cercle et parallèle à Ox. Sa valeur est

$$\frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{2}{r}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{1}{r+z}-\frac{z}{r(r+z)}\right]=\frac{1}{4\pi\mu(r+z)}\left[\frac{2r+z}{r}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right].$$

Elle est toujours positive.

Les termes restants de $\frac{u}{A}$ s'écrivent :

$$\frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{x^2}{r(r+z)^2}+\frac{z}{4\pi\mu}\frac{x^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2}.$$

Si on les rapproche de $\frac{v}{A}$, on voit qu'ils n'en diffèrent que par le remplacement dans chaque terme d'un facteur $\frac{x}{r}$ par un facteur $\frac{y}{r}$. En chaque point, le déplacement correspondant s'effectue dans le plan du cercle et suivant son rayon. La grandeur de ce déplacement est, d'ailleurs,

$$\frac{1}{4\pi\mu}\frac{x}{(r+z)^2}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{z(2r+z)}{r^2}\right].$$

Il est proportionnel à x et est positif, c'est-à-dire tend à agrandir le cercle en le déformant en avant du plan $z\,O\,y$, et négatif en arrière. Le diamètre parallèle à Oy demeure sans aucun changement.

Enfin, le long du même cercle, w est également proportionnel à x, comme si ce cercle tournait autour de son diamètre parallèle à Oy. La valeur de w est d'ailleurs du même signe que x.

En résumé, la déformation le long d'un cercle horizontal ayant son centre sur Oz se compose d'une translation dans le sens de la force, d'une rotation autour du diamètre parallèle à Oy, et d'une déformation laissant sans changement le diamètre parallèle à Oy. La représentation obtenue est encore assez nette.

Étude des déplacements sur la surface libre, à l'intérieur ou à l'extérieur de la zone chargée, dans le cas de charges verticales. — L'étude précédente, qui suffit pour des points éloignés de la zone chargée, ne donne plus rien d'exact quand il s'agit de points dont la distance à la zone chargée est comparable à l'étendue de cette zone, et à plus forte raison quand il s'agit de points de cette zone elle-même.

Mais, quand on se borne aux déplacements de la surface libre, on a simplement

$$u = \alpha,$$
$$v = \beta,$$
$$w = \gamma.$$

Dans le cas de charges verticales (1re solution type), les fonctions α, β, γ sont d'ailleurs, à des coefficients constants près, les dérivées par rapport à x, y, z de la fonction

$$\frac{d\psi}{dz} = -\int \log(z + r)\, dm.$$

On peut les calculer au moyen des composantes de l'attraction d'un système pour lequel le potentiel serait $\frac{d\psi}{dz}$. On peut même encore simplifier un peu. On a, en particularisant pour $z = 0$, après différentiation :

$$u = \alpha = -\frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{d^2\psi}{dx\, dz} = -\frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int \frac{x}{r^2}\, dm,$$
$$v = \beta = -\frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \int \frac{y}{r^2}\, dm,$$
$$w = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \int \frac{dm}{r}.$$

On voit que u et v seraient respectivement les composantes de l'attraction produite au point (xyO) par les masses dm, si cette attraction était dirigée suivant le rayon vecteur et avait pour valeur

$$\frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{1}{r},$$

expression inversement proportionnelle à la distance. Ces composantes sont, comme on sait, les dérivées par rapport à x et y d'un potentiel logarithmique de la forme

$$U = k \log r,$$

et fonction de r seulement. Nous nous bornerons à cette indication, qui ramène à des problèmes connus.

Quant à w, il est, au facteur $\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ près, égal au potentiel newtonien V des masses dm. C'est aussi un problème connu.

Mais il est intéressant de donner quelques exemples empruntés au Mémoire de M. Boussinesq.

1° Supposons d'abord qu'on ait une charge uniformément répartie sur une circonférence de rayon R, à raison de p par unité de longueur.

On a dans ce cas

$$dm = p\,\mathrm{R}\,d\omega.$$

Soit a la distance du point M (xy), au centre de la circonférence, on a

$$r^2 = a^2 + \mathrm{R}^2 - 2a\mathrm{R}\cos\omega = (a+\mathrm{R})^2 - 4a\mathrm{R}\cos^2\frac{\omega}{2}.$$

Par suite, le potentiel V au point M est

$$\mathrm{V} = p\mathrm{R}\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{r} = 2p\mathrm{R}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{\sqrt{(a+\mathrm{R})^2 - 4a\mathrm{R}\cos^2\frac{\omega}{2}}}.$$

L'intégrale à calculer est une intégrale elliptique à laquelle on fera subir la transformation de Landen, en distinguant le cas où $a > \mathrm{R}$ de celui où $a < \mathrm{R}$. Dans le premier cas, on prendra comme argument le rapport $\frac{\mathrm{R}}{a}$, et dans le second cas l'inverse.

Dans le premier cas, on obtient pour la valeur de cette intégrale

$$\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{R}^2}{a^2}\sin^2\varphi}}$$
$$= \frac{\pi}{a}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\mathrm{R}^2}{a^2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\mathrm{R}^4}{a^4} + \ldots + \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\right]^2\frac{\mathrm{R}^{2n}}{a^{2n}} + \ldots\right\}.$$

Dans le second cas, on n'a qu'à intervertir a et R, ce qui vérifie en passant la loi générale de réciprocité des déplacements.

2° Supposons maintenant qu'on ait une charge totale P uniformément répartie sur la surface d'un cercle de rayon R_1.

La densité superficielle est alors $\rho = \frac{\mathrm{P}}{\pi\mathrm{R}_1^2}$, et, sur la couronne annulaire comprise entre les rayons R et $\mathrm{R} + d\mathrm{R}$, on aura

$$dm = \rho\,d\sigma = \rho\,\mathrm{R}\,d\mathrm{R}\,d\omega.$$

Autrement dit, la pression par unité de longueur sur le cercle de

rayon R sera

$$p = \rho\, dR = \frac{P}{\pi R_1^2}\, dR.$$

On portera cette valeur dans l'une ou l'autre des expressions trouvées plus haut pour V. S'il s'agit d'un point M situé à l'extérieur du cercle $a > R_1$, on aura ensuite à intégrer par rapport à R depuis $R = 0$ jusqu'à $R = R_1$. S'il s'agit, au contraire, d'un point M situé à l'intérieur du cercle $a < R_1$, il faudra intégrer la première formule de $R = 0$ à $R = a$, et ensuite la seconde formule, transformée en permutant R et a, entre les limites $R = a$ et $R = R_1$.

Sans entrer dans le détail du calcul, on trouve :

Pour $a < R_1$,

$$V = \frac{2P}{R_1}\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{a^2}{R_1^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{a^4}{R_1^4} - \ldots - \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \frac{a^{2n}}{R_1^{2n}} + \ldots\right];$$

Pour $a > R_1$,

$$V = \frac{P}{R_1}\left[1 + \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{R_1^2}{a^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{R_1^4}{a^4} + \ldots\right].$$

Au centre, on a

$$V = \frac{2P}{R_1},$$

et sur le bord du cercle

$$V = \frac{4P}{\pi R_1}.$$

La différence, qui mesure la flèche dans l'intérieur de la surface chargée est, en rétablissant le facteur $\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$:

$$f = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{P}{R_1}\left(2 - \frac{4}{\pi}\right).$$

3° On peut de là passer au cas plus général où la densité ρ est une fonction $f(R)$, et l'on peut intégrer toutes les fois que $f(R)$ est une fonction entière. M. Boussinesq a montré que la surface demeure plane dans l'intérieur du cercle chargé lorsque la charge totale est distribuée uniformément sur la surface de la demi-sphère

ayant ce cercle pour base, puis appliquée aux projections verticales des éléments de cette surface.

4° M. Boussinesq a, d'une manière analogue, traité le cas où la zone chargée a la forme d'une ellipse, soit que la charge soit uniformément répartie sur toute la surface, soit que la densité demeure constante dans des bandes annulaires comprises entre des ellipses homothétiques à la première. Nous y reviendrons plus loin, à l'occasion du problème de Hertz, dont la solution était ainsi préparée.

5° Enfin, les résultats obtenus en ce qui concerne la forme prise par la surface, dans l'intérieur de la zone chargée, permettent de trouver inversement la répartition des pressions qui s'exerceraient entre cette surface et un corps dur, supposé indéformable, qui serait pressé contre elle par une force P donnée, et qui aurait précisément, comme surface, la surface déformée.

Nous ne pouvons que renvoyer pour les détails à l'Ouvrage de M. Boussinesq (*voir* aussi une Note insérée dans la *Théorie de l'Élasticité*, de Clebsch, annotée par Saint-Venant, et un article de M. Galliot (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1892).

Pressions et déformations au contact de deux corps solides élastiques (Problème de Hertz). — Supposons deux corps isotropes élastiques, placés d'abord au contact l'un de l'autre et ensuite appuyés l'un contre l'autre par deux forces finies, égales et directement opposées, de valeur P. Ces deux corps vont se déformer. En même temps qu'ils subiront un rapprochement relatif, leurs surfaces déformées coïncideront sur une étendue plus ou moins grande, qu'on appellera la *surface de pression*. Le contour de cette surface de pression sera une courbe fermée.

Nous supposerons connues les constantes d'élasticité des deux corps en contact, la forme et la situation réciproque des surfaces dans le voisinage du point de contact. Nous supposerons aussi que les surfaces soient parfaitement polies, de manière que leurs réactions mutuelles puissent se réduire à des pressions normales entre les parties en contact. Enfin, nous supposerons que la surface de pression ait une étendue très petite au regard des dimensions totales des corps, de manière que, par pressions normales, on puisse entendre des pressions parallèles à la direction de la normale

commune des deux corps, ou si l'on veut aux deux forces P, dirigées suivant cette normale commune.

Le problème consiste à rechercher la forme de la surface de pression, la forme et la grandeur absolue de son contour, et enfin la répartition des pressions normales sur la surface de pression. De cette répartition dépendra la pression maxima développée dans l'un et l'autre des corps pressés, ce qui permettra de reconnaître si cette pression maxima est compatible ou non avec la résistance supposée de la matière, et peut donner lieu ou non à des déformations permanentes. Il est bien clair que ce sont ces pressions localisées au voisinage immédiat de la surface de pression qui déterminent la fatigue de la matière. Celles qui s'exercent à l'intérieur des corps sont rapidement négligeables au regard de celles-là.

Accessoirement, il est intéressant d'évaluer le rapprochement relatif des deux corps.

Prenons d'abord les deux corps dans leur situation de contact mathématique, et prenons pour axe des z leur normale commune, dirigée vers l'intérieur du premier corps, désigné par l'indice 1. Les axes Ox et Oy seront supposés tracés dans le plan tangent commun.

Dans le voisinage du point de contact, les équations des deux surfaces seront de la forme

$$z_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 xy,$$
$$z_2 = A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_2 xy,$$

et la distance séparant deux points situés sur la même verticale sera

$$z_1 - z_2 = (A_1 - A_2)x^2 + (B_1 - B_2)y^2 + (C_1 - C_2)xy.$$

L'ensemble des points, tels que la distance $z_1 - z_2$ soit égale à une valeur constante donnée, est donc situé sur un cylindre à génératrices verticales dont la section droite est une ellipse.

On peut déterminer les directions des axes de ces ellipses et prendre ces directions pour nouveaux axes de coordonnées. Si l'on appelle x' et y' les coordonnées courantes dans le nouveau système, l'équation de ces ellipses prendra la forme

$$z_1 - z_2 = Ax'^2 + By'^2.$$

Les coefficients A et B sont fonctions de $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, coefficients qui sont eux-mêmes des fonctions des rayons de courbure principaux des deux surfaces des corps et de l'orientation des plans principaux par rapport aux axes Ox et Oy.

Si l'on désigne par ρ'_1, ρ''_1 les inverses des rayons de courbure principaux du premier corps, et par ρ'_2 et ρ''_2 les quantités analogues pour le second corps, et si l'on convient de les compter positivement lorsque le centre du cercle de courbure correspondant se trouve à l'intérieur du corps, on aura

$$2(A_1 + B_1) = \rho'_1 + \rho''_1, \qquad -2(A_2 + B_2) = \rho'_2 + \rho''_2,$$
$$4(A_1 - B_1)^2 + 4C_1^2 = (\rho'_1 - \rho''_1)^2, \qquad 4(A_2 - B_2)^2 + 4C_2^2 = (\rho'_2 - \rho''_2)^2.$$

Si les axes primitifs Ox et Oy coïncident avec les bissectrices des directions principales correspondant à ρ'_1 et ρ'_2, par exemple, et si l'on appelle ω l'angle que font entre elles ces deux directions principales, on aura, comme on sait,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{C_1}{A_1 - B_1} = \frac{-C_2}{A_2 - B_2} = \frac{C_1 - C_2}{A_1 - B_1 + A_2 - B_2},$$

et l'on en déduira

$$\begin{aligned}(\rho'_1 - \rho''_1)^2 &= 4(A_1 - B_1)^2 + 4(A_1 - B_1)^2 \operatorname{tang}^2\omega \\ &= 4(A_1 - B_1)^2(1 + \operatorname{tang}^2\omega),\end{aligned}$$
$$(\rho'_2 - \rho''_2)^2 = 4(A_2 - B_2)^2(1 + \operatorname{tang}^2\omega).$$

Cela posé, on a, en considérant la surface $z_1 - z_2$ et ses invariants,

$$2(A + B) = 2(A_1 - A_2) + 2(B_1 - B_2) = \rho'_1 + \rho''_1 + \rho'_2 + \rho''_2,$$
$$\begin{aligned}4(A - B)^2 &= 4[(A_1 - A_2) - (B_1 - B_2)]^2 + 4(C_1 - C_2)^2 \\ &= 4[(A_1 - B_1) - (A_2 - B_2)]^2 \\ &\quad + 4[(A_1 - B_1) + (A_2 - B_2)]^2 \operatorname{tang}^2\omega \\ &= (\rho'_1 - \rho''_1)^2 + (\rho'_2 - \rho''_2)^2 \pm 2(\rho'_1 - \rho''_1)(\rho'_2 - \rho''_2)\cos 2\omega.\end{aligned}$$

Dans cette dernière formule, il faut prendre le troisième terme avec le signe $+$, parce que $\rho'_2 - \rho''_2$ doit, avec les conventions admises, être de signe contraire à $A_2 - B_2$. On peut aussi l'établir en considérant un cas particulier.

Si, maintenant, on définit un angle auxiliaire τ par la condition

$$\cos\tau = \frac{A - B}{A + B},$$

on pourra écrire

$$2A = (\rho'_1 + \rho''_1 + \rho'_2 + \rho''_2)\cos^2\frac{\tau}{2},$$

$$2B = (\rho'_1 + \rho''_1 + \rho'_2 + \rho''_2)\sin^2\frac{\tau}{2}.$$

La connaissance des quatre rayons de courbure principaux, ou de leurs inverses, ainsi que celle de l'angle ω, définit donc entièrement la situation respective des deux corps et l'orientation des ellipses, qui correspondent à des valeurs constantes de la distance verticale $z_1 - z_2$. Nous prendrons désormais les directions des axes de ces ellipses pour axes des x et des y.

Tout cela est très simplifié quand les plans de courbure principaux se correspondent dans les deux corps; car alors $\omega = 0$ et $C_1 = C_2 = 0$, de sorte que Ox et Oy coïncident avec les axes communs des deux indicatrices. Dans ces conditions, on a

$$2(A - B) = \rho'_1 - \rho''_1 + \rho'_2 - \rho''_2.$$

Cela posé, soit α le rapprochement relatif des deux corps quand les forces P agissent, et soient w_1 et w_2 les composantes verticales de la déformation aux points $M_1(xyz_1)$ et $M_2(xyz_2)$ respectivement. Si ces points M_1 et M_2 appartiennent à la surface de pression, ils viennent au contact, de sorte que leur distance s'annule. Or, cette distance est

$$z_1 + w_1 - z_2 - w_2 - \alpha.$$

Il faut donc que la différence $w_1 - w_2$ ait, à l'intérieur de la surface de pression, une expression de la forme

$$w_1 - w_2 = \alpha - (z_1 - z_2) = \alpha - Ax^2 + By^2.$$

Il faut d'ailleurs que, à l'extérieur de cette surface,

$$w_1 - w_2 > \alpha - Ax^2 + By^2.$$

On peut satisfaire à ces conditions en supposant que la surface de pression est une ellipse ayant ses axes dirigés suivant Ox et Oy, la grandeur de ses demi-axes étant a et b, et en supposant,

d'autre part, que les pressions totales P s'y répartissent de telle façon, qu'en un point (ξ, η), on ait pour la densité ρ la valeur

$$\rho = \frac{3P}{2\pi ab}\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}.$$

La condition d'équilibre statique est bien ainsi satisfaite, car pour évaluer la pression totale il faut calculer l'intégrale

$$\int \rho\, d\sigma = \frac{3P}{2\pi ab}\int\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}\, d\sigma.$$

Or, dans le second membre, l'intégrale n'est pas autre chose que le volume du demi-ellipsoïde d'axes $(a, b, 1)$, c'est-à-dire précisément $\frac{2}{3}\pi ab$.

Évaluons maintenant les déformations w_1 et w_2, produites sur la surface libre des deux corps par des pressions normales ainsi réparties. Désignons par $V(xyz)$ le potentiel newtonien dû aux masses $dm = \rho\, d\sigma$, et par ε_1 et ε_2 respectivement les valeurs de l'expression $\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1 - \eta^2}{\pi E}$ pour chacun des deux corps, nous aurons, conformément à ce que nous avons vu précédemment,

$$w_1 = \varepsilon_1 V(xyz_1),$$
$$w_2 = -\varepsilon_2 V(xyz_2).$$

Ces relations ne s'appliquent rigoureusement, il est vrai, qu'à des massifs indéfinis limités par des surfaces planes, mais elles sont très approchées pour les points qui appartiennent à la surface des pressions, ou qui en sont très voisins, lorsque l'on suppose, comme nous le faisons, que la surface de pression a une étendue très petite au regard des dimensions totales des corps, et de leurs rayons principaux de courbure au point de contact. En faisant $z_1 = z_2 = 0$ dans les expressions de w_1 et w_2, on a simplement

$$w_1 - w_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, V(xy0).$$

Il s'agit donc de trouver l'expression du potentiel V de la couche de matière fictive répandue sur l'ellipse de demi-axe a et b avec la densité superficielle ρ. Il reviendra au même de supposer une couche de matière fictive ayant une densité de volume uniforme ρ' et dont la hauteur soit partout proportionnelle à ρ. Cette dernière

couche sera limitée par la surface d'un ellipsoïde dont l'ordonnée ζ serait en chaque point définie par la relation

$$\rho'\zeta = \frac{\xi}{2} = \frac{3P}{4\pi ab}\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}},$$

et dont le demi-axe parallèle à Oz serait c défini par la relation

$$\rho' c = \frac{3P}{4\pi ab}.$$

La valeur de c peut être supposée aussi petite qu'on le voudra, pourvu que la variation corrélative de ρ' assure cette dernière relation.

On peut alors utiliser, pour la recherche de V, les résultats connus relatifs au potentiel d'un ellipsoïde homogène. Nous rappelons seulement qu'il faut distinguer le cas où le point attiré (xyz) est à l'intérieur du cas où ce point est à l'extérieur de l'ellipsoïde.

Dans le premier cas, on a uniformément, pour tout point (xyz),

$$V = 2\pi\rho' abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\gamma^2} - \frac{y^2}{b^2+\gamma^2} - \frac{z^2}{c^2+\gamma^2}\right) \times \frac{\gamma\, d\gamma}{\sqrt{(a^2+\gamma^2)(b^2+\gamma^2)(c^2+\gamma^2)}}.$$

Dans le cas actuel, il n'y a qu'à faire $z = 0$ et $c = 0$, et à remplacer $2\pi\rho' c$ par $\frac{3P}{2ab}$. Alors V se réduit à

$$V = \frac{3P}{2}\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\gamma^2} - \frac{y^2}{b^2+\gamma^2}\right) \frac{d\gamma}{\sqrt{(a^2+\gamma^2)(b^2-\gamma^2)}}.$$

Il est bien de la forme voulue, savoir :

$$V = L - Mx^2 - Ny^2.$$

Lorsque le point (xyz) est à l'extérieur de l'ellipsoïde, le potentiel conserve la même forme, à la seule condition de prendre comme limite inférieure de l'intégration, non plus zéro, mais la racine positive γ_1 de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\gamma^2} + \frac{y^2}{b^2+\gamma^2} + \frac{z^2}{c^2+\gamma^2} = 1,$$

laquelle définit l'ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde donné et passant par le point (xyz). Comme pour toute valeur de γ comprise entre o et γ_1, on a

$$1 - \frac{x^2}{a^2+\gamma^2} - \frac{y^2}{b^2+\gamma^2} - \frac{z^2}{c^2+\gamma^2} < 0;$$

on a, pour tout point extérieur

$$V > L - Mx^2 - Ny^2,$$

L, M, N étant les mêmes fonctions que précédemment, c'est-à-dire les intégrales prises entre o et ∞.

(A défaut de la démonstration de la formule donnant V pour un point intérieur, nous indiquerons une vérification sommaire qu'on peut faire au moyen de résultats généralement fournis dans les cours d'Analyse. L'attraction a pour composante parallèle à Ox la valeur $-2Mx$, et d'autre part la valeur de L conduit bien dans le cas d'une sphère à l'expression du potentiel au centre de la sphère.)

Cela posé, le problème se trouve résolu sous la seule réserve d'identifier les deux expressions trouvées pour $w_1 - w_2$, savoir : d'une part,

$$\alpha - Ax^2 - By^2,$$

et, d'autre part,

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(L - Mx^2 - Ny^2).$$

Cette identification donne d'abord

$$A = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{3P}{2}\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{(a^2+\gamma^2)^3(b^2+\gamma^2)}}$$

et

$$B = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{3P}{2}\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{(a^2+\gamma^2)(b^2+\gamma^2)^3}}.$$

Si l'on pose $\frac{b}{a} = k$, et si l'on change dans l'expression de A la variable d'intégration en posant $\gamma^2 = a^2u^2$, on trouve

$$(a^2+\gamma^2) = a^2(1+u^2),$$
$$(b^2+\gamma^2) = a^2(k^2+u^2),$$
$$d\gamma = a\,du.$$

On peut donc mettre A sous la forme

$$A = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{3P}{2a^3}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)^3(k^2+u^2)}};$$

semblablement on obtiendrait, en changeant a en b et k en $\frac{1}{k}$,

$$B = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{3P}{2b^3}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)^3\left(\frac{1}{k^2}+u^2\right)}}.$$

En divisant membre à membre, on obtiendrait une équation transcendante entre le rapport $k = \frac{b}{a}$ et le rapport $\frac{B}{A}$. Cette équation peut être résolue au moyen des Tables de Legendre. Une fois ce rapport calculé, les équations précédentes feront connaître respectivement les valeurs absolues de a et de b, et par suite la valeur de la pression maxima au contact, laquelle est

$$\rho_{max} = \frac{3P}{2\pi ab}.$$

On voit que, pour une valeur donnée du rapport $\frac{B}{A}$, on obtient une valeur constante du rapport $k = \frac{b}{a}$ et que les grandeurs absolues des axes a et b de l'ellipse de pression varient comme la racine cubique de P. Il est de même de ρ_{max}. On voit aussi que a et b varient comme la racine cubique de l'expression $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, qui dépend des coefficients d'élasticité des deux corps.

La valeur de ρ maximum varie comme la puissance $-\frac{2}{3}$ de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Hertz a donné une Table permettant de calculer a et b en fonction des courbures principales des surfaces en contact et de l'orientation de leurs plans principaux, c'est-à-dire de l'angle auxiliaire τ, qui ne dépend que du rapport $\frac{B}{A}$. On peut mettre a et b sous la forme

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3P\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2(\rho'_1+\rho''_1+\rho'_2+\rho''_2)}} \quad \text{et} \quad b = \nu\sqrt[3]{\frac{3P\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{2(\rho'_1+\rho''_1+\rho'_2+\rho''_2)}}.$$

Ici les lettres μ et ν désignent des fonctions transcendantes de

l'angle τ, dont la Table suivante donne les valeurs de 10° en 10°, ainsi que celle du produit $\mu\nu$:

τ...	90°.	80°.	70°.	60°.	50°.	40°.	30°.	20°.	10°.	0°.
μ.....	1,0000	1,1278	1,2835	1,4858	1,7542	2,1357	2,7307	3,7779	6,6120	∞
ν	1,0000	0,8927	0,8017	0,7171	0,6407	0,5673	0,4930	0,4079	0,3186	0,0
Produit $\mu\nu$.	1,0000	1,0068	1,0290	1,0655	1,1239	1,2116	1,3432	1,5410	2,1066	

Si l'on n'a pas intérêt à calculer a et b, mais seulement ρ_{max}, on déduira la valeur de cette dernière quantité de la formule

$$\rho_{max} = \frac{3P}{2\pi ab} = \frac{1}{\pi\mu\nu}\sqrt[3]{\frac{3P}{2}\,\frac{(\rho'_1+\rho''_1+\rho'_2+\rho''_2)^2}{\pi^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}}.$$

On peut observer que tant que l'angle auxiliaire τ est voisin de 90°, le produit $\mu\nu$ reste sensiblement égal à l'unité, d'après le Tableau précédent. L'interpolation de la valeur de ce produit sera donc facile.

En poursuivant l'identification des formules qui expriment $w_1 - w_2$, on trouve d'autre part

$$\alpha = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{3P}{2}\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{(a^2+\gamma^2)(b^2+\gamma^2)}} = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{3P}{2a}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(k^2+u^2)}}.$$

Le rapprochement α des deux corps, pour une valeur donnée de $\frac{B}{A}$, ou de k, se trouve ainsi proportionnel à la puissance $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de P. Il est proportionnel aussi à la puissance $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

Dans le cas particulier où l'on a $k=1$, l'expression de α se simplifie, car l'intégrale elliptique se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On trouve donc alors

$$\alpha = \frac{3P}{4a}\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

Cette élégante théorie a été utilisée pour préciser la notion phy-

sique de dureté des corps. Elle permet de reconnaître d'une manière très rationnelle et très complète les conditions de résistance de deux corps de forme arrondie pressés l'un contre l'autre par des forces données P. C'est le cas, notamment, pour les billes sphériques, ou les rouleaux cylindriques intercalés entre des plans, des sphères ou des cylindres. Il faut, bien entendu, que les épaisseurs des pièces en contact soient suffisantes pour que l'on puisse accepter l'hypothèse faite, à savoir que les pressions au contact sont indépendantes de ces épaisseurs. Pour des épaisseurs réduites, on ne saurait avoir qu'une approximation, très précieuse toutefois.

Voici quelques formules pratiques, en supposant que les deux corps ont sensiblement les mêmes coefficients d'élasticité ε et η et sont tels que η puisse d'ailleurs être pris égal à $\frac{3}{10}$. Dans ces conditions, on a

$$\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{2(1-\eta^2)}{E} = \frac{1,82}{E}.$$

1° *Cas de deux sphères pleines.* — Soient r_1 et r_2 les rayons des deux sphères. On a évidemment

$$\rho'_1 = \rho''_1 = \frac{1}{r_1} \qquad \text{et} \qquad \rho'_2 = \rho''_2 = \frac{1}{r_2}.$$

On a, d'autre part, par raison de symétrie, $\cos\tau = 0$, d'où $\mu = \nu = 1$ et $a = b$, d'où $k = 1$. On obtient donc

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3P}{2E}\,\frac{0,91}{\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}} = 1,11\sqrt[3]{\frac{P}{E}\,\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}.$$

On en déduit

$$\rho_{max} = \frac{3P}{2\pi ab} = 0,388\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right)^2}.$$

Quant au rapprochement α des centres des deux sphères, il a pour valeur

$$\alpha = \frac{3P}{4a}\,\frac{0,91}{E} = 1,23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right)}.$$

2° *Cas d'une sphère pleine et d'une sphère creuse tangente intérieurement.* — Les formules précédentes s'appliquent à la

seule condition de changer le signe du rayon r_2 de la sphère creuse.

3° *Cas d'une sphère et d'un plan.* — On déduit les résultats du cas de deux sphères, dont l'une a un rayon r_2 infini. Les formules deviennent, en désignant par r le rayon de la sphère,

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P}{E}}\, r,$$

$$\rho_{max} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}},$$

$$z = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}}\, r.$$

4° *Cas de deux cylindres pleins de même rayon, croisés à angle droit.* — On a, dans ce cas,

$$\rho'_1 = \frac{1}{r}, \qquad \rho''_1 = 0, \qquad \rho'_2 = 0, \qquad \rho''_2 = \frac{1}{r}.$$

On en déduit, ω étant encore nul,

$$2(A + B) = \frac{2}{r},$$

$$2(A - B) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1} = 0,$$

d'où

$$\cos\tau = 0.$$

On trouvera les mêmes formules que dans le cas précédent.

5° *Cas de deux cylindres pleins de rayons r_1 et r_2 se touchant suivant une génératrice.* — Ce cas relèverait logiquement du Chapitre suivant. Quand on admet que les cylindres sont infiniment longs et sont pressés par une force *p par unité de longueur de génératrice*, on a affaire à un problème d'élasticité à deux dimensions. Nous donnons ici les résultats pour les grouper avec les précédents.

L'un des demi-axes de l'ellipse de pression devient infini, l'autre a pour valeur

$$a = 1,52 \sqrt[2]{\frac{p}{E}\,\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}.$$

La pression maxima est

$$\rho_{max} = 0,418 \sqrt[2]{pE \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}.$$

Il faut remarquer que les radicaux sont seulement du second degré et non plus du troisième.

Si l'on remplace l'un des cylindres par une plaque, il faut faire $r_2 = \infty$ et l'on trouve

$$a = 1,52 \sqrt{\frac{pr}{E}},$$

$$\rho_{max} = 0,418 \sqrt{\frac{pE}{r}}.$$

Ces formules fournissent une approximation pour des rouleaux de longueur finie.

6° *Cas d'une sphère et d'un cylindre ou d'une sphère et d'un tore.* — On ne peut pas effectuer le calcul jusqu'au bout d'une manière explicite. Mais il est bon d'indiquer comment on pourra le conduire en appliquant la méthode générale, et en profitant de cette circonstance que $\omega = 0$.

Pour la sphère, en désignant son rayon par r_1, on a toujours

$$\rho'_1 = \rho''_1 = \frac{1}{r_1}.$$

Si l'on a affaire à un cylindre, l'un de ses rayons de courbure r_2 est infini et l'on aura $\rho'_2 = 0$. Le rayon du cylindre étant désigné par R_2, on aura, suivant qu'il s'agira d'un contact extérieur ou intérieur,

$$\rho''_2 = \pm \frac{1}{R_2}.$$

On trouvera donc

$$2(A + B) = \frac{2}{r_1} \pm \frac{1}{R_2},$$

$$2(A - B) = \rho'_1 - \rho''_1 + \rho'_2 - \rho''_2 = \mp \frac{1}{R_2},$$

d'où

$$|\cos\tau| = \frac{A - B}{A + B} = \frac{1}{\frac{2R_2}{r_1} \pm 1}.$$

L'angle τ étant supposé calculé, la Table de Hertz fera connaître les coefficients μ et ν.

Si l'on a affaire à une gorge en forme de tore, comme on en emploie dans les roulements à billes, on désignera le rayon de la section droite de la gorge par $r_2 > r_1$ et l'on aura toujours

$$\rho'_2 = -\frac{1}{r_2}.$$

Le rayon du cercle équatorial ou du chemin de roulement étant R_2, on aura

$$\rho''_2 = \pm \frac{1}{R_2},$$

suivant que l'on aura une gorge convexe ou concave.

On obtiendra donc

$$2(A+B) = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} \pm \frac{1}{R_2},$$

$$2(A-B) = -\frac{1}{r_2} \mp \frac{1}{R_2},$$

$$|\cos\tau| = \frac{R_2 \pm r_2}{\frac{2R_2 r_2}{r_1} - R_2 \pm r_2}.$$

Si l'on veut calculer le rapprochement α, dont dépend le jeu du roulement, il faudra employer la formule générale qui renferme une intégrale elliptique. On la calcule au moyen des Tables de Legendre connaissant la valeur de $k = \frac{b}{a}$.

CHAPITRE XXVI.

MASSIF INDEFINI LIMITÉ PAR UN PLAN ET CHARGÉ DANS UNE RÉGION LIMITÉE DE CE PLAN (*suite*). LIMITATION DU PROBLÈME AU CAS DE L'ÉLASTICITÉ PLANE.

ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ D'UN MASSIF INDÉFINI LIMITÉ PAR UNE SURFACE PLANE LORSQUE LES CHARGES APPLIQUÉES SUR CETTE SURFACE SONT CONSTANTES TOUT LE LONG DE DROITES PARALLÈLES A Oy (ÉLASTICITÉ PLANE).

On a à traiter dans ce cas un problème d'élasticité plane, notablement plus simple que le problème général. MM. Boussinesq et Flamant (*C. R.*, 1892) ont traité le cas de charges normales à la surface et déduit leurs résultats d'intégration opérés directement sur les potentiels tout le long de droites parallèles à Oy. Mais les passages aux limites sont assez délicats, à cause des constantes infinies qui s'y introduisent, et qui ont leur répercussion sur certaines composantes des déplacements. Il est beaucoup plus simple d'étudier directement les composantes des tensions en utilisant les formules obtenues en élasticité plane. Les seules composantes utiles à considérer ici sont N_1, N_3, T_2, et l'on sait *a priori* qu'elles ne dépendent pas des coefficients d'élasticité.

D'une manière générale, on peut remarquer d'abord que le potentiel ψ ne doit pas dépendre de y par raison de symétrie et que, dans le plan zOx, il satisfait à la relation simplifiée

$$\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0.$$

D'autre part, le potentiel newtonien V d'un cylindre, ou d'une surface cylindrique, uniformément chargé suivant ses génératrices, se ramène dans le plan zOx à un potentiel logarithmique de la

forme

$$V = \int \log \frac{r_0}{r}\, dm,$$

r_0 étant une constante et r désignant le radical $\sqrt{(x - x_1)^2 + z^2}$. La densité superficielle ρ' des masses dm dans le plan est d'ailleurs liée à la densité linéaire ρ le long des génératrices par la relation $\rho' = 2\rho$ (*voir* Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, p. 29). En un point quelconque d'une bande chargée parallèle à Oy; on aura toujours $\frac{dV}{dz} = -2\pi\rho$.

Cela posé, les composantes N_3 et T_2, qui dans la solution générale ne dépendent que de V, peuvent s'obtenir très simplement, et il en est de même, comme nous l'avons vu, de la dilatation cubique. Quant à N_1, il se déduira de la relation connue

$$N_1 + N_3 = 2(\lambda + \mu)\theta$$

et si même on désirait connaître N_2 on le déduirait de la relation $N_2 = \lambda\theta$.

Nous considérerons encore deux solutions types, suivant que les charges seront parallèles à Oz ou à Ox.

Première solution. — *Charges parallèles à* Oz. — Nous avons trouvé dans le Chapitre précédent

$$N_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV}{dz} + \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dz^2},$$

$$T_2 = \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dx\,dz},$$

$$\theta = \frac{-1}{2\pi(\lambda + \mu)}\frac{dV}{dz}.$$

Il en résulte

$$N_1 = 2(\lambda + \mu)\theta - N_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV}{dz} - \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dz^2}.$$

On peut faire immédiatement cette remarque que pour $z = 0$ on aura toujours

$$N_1 = N_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{dV}{dz}.$$

Or, on a ici

$$\frac{dV}{dz} = -\int \frac{z}{r^2}\, dm,$$

$$\frac{d^2V}{dx\,dz} = \int \frac{2z(x-x_1)}{r^4}\, dm \quad \text{et} \quad \frac{d^2V}{dz^2} = \int \left(\frac{2z^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}\right) dm.$$

Si maintenant on pose $dm = 2\rho\, dx_1$, on trouve facilement les formules

$$N_3 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{2z^3}{r^4}\, dm = \frac{2}{\pi}\int \frac{z^3}{r^4}\, \rho\, dx_1,$$

$$T_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{2z^2(x-x_1)}{r^4}\, dm = \frac{2}{\pi}\int \frac{z^2(x-x_1)}{r^4}\, \rho\, dx_1,$$

$$N_1 = \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{2z}{r} - \frac{2z^3}{r^4}\right) dm = \frac{2}{\pi}\int \frac{z(x-x_1)^2}{r^4}\, \rho\, dx_1.$$

Deuxième solution. — *Charges parallèles à* Ox. — On a cette fois, en se reportant au Chapitre précédent :

$$N_3 = \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dx\,dz},$$

$$T_2 = -\frac{z}{2\pi}\frac{dV}{dz} + \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dx^2},$$

$$\theta = \frac{-1}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{dV}{dx}.$$

Il en résulte

$$N_1 = -\frac{1}{\pi}\frac{dV}{dx} - \frac{z}{2\pi}\frac{d^2V}{dx\,dz}.$$

Par des calculs semblables aux précédents, on trouve, en remplaçant les dérivées du potentiel logarithmique par leurs valeurs :

$$N_3 = \frac{2}{\pi}\int \frac{z^2(x-x_1)}{r^4}\, \rho\, dx_1,$$

$$T_2 = \frac{2}{\pi}\int \frac{z(x-x_1)^2}{r^4}\, \rho\, dx_1,$$

$$N_1 = \frac{2}{\pi}\int \frac{(x-x_1)^3}{r^4}\, \rho\, dx_1.$$

On passe de là au cas général. Si la pression appliquée à l'élément dx_1 a pour composantes $-A\,dx_1$ et $-C\,dx_1$ suivant Ox et Oz

on a évidemment

$$N_2 = -\frac{2}{\pi}\int\left[\frac{(x-x_1)z^2}{r^4}A + \frac{z^3}{r^4}C\right]dx_1$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\left[A\frac{x-x_1}{r} + C\frac{z}{r}\right]\frac{z^2}{r^3}dx_1,$$

$$T_2 = -\frac{2}{\pi}\int\left[\frac{(x-x_1)^2 z}{r^4}A + \frac{(x-x_1)z^2}{r^4}C\right]dx_1$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\left[A\frac{(x-x_1)}{r} + C\frac{z}{r}\right]\frac{(x-x_1)z}{r^3}dx_1,$$

$$N_1 = -\frac{2}{\pi}\int\left[\frac{(x-x_1)^3}{r^4}A + \frac{(x-x_1)^2 z}{r^4}C\right]dx_1$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\left[A\frac{x-x_1}{r} + C\frac{z}{r}\right]\frac{(x-x_1)^2}{r^3}dx_1.$$

Ces expressions mettent en évidence la quantité $A\frac{x-x_1}{r} + C\frac{z}{r}$ qui n'est autre chose que la projection de la charge sur le rayon vecteur allant du point chargé au point auquel se rapportent les tensions.

Ces expressions sont intégrables notamment lorsque A et C sont des fonctions rationnelles de x_1.

Dans ce qui va suivre, nous nous attacherons particulièrement au développement de la première solution, la seconde donnant lieu à des considérations de même nature.

Considération de forces extérieures concentrées le long de Oy. — On supposera $x_1 = 0$ et les forces extérieures concentrées dans une bande étroite dx_1 assimilable à un infiniment petit, avec une densité p telle que $p\,dx_1 = C$. Les intégrales sont à remplacer par leurs éléments et les résultats obtenus seront valables sauf au voisinage de la zone chargée, bien entendu.

On a ainsi

$$N_1 = -\frac{2C}{\pi}\frac{zx^2}{r^4} = -\frac{2C}{\pi}\frac{zx^2}{(x^2+z^2)^2},$$

$$N_2 = -\frac{2C}{\pi}\frac{z^3}{r^4} = -\frac{2C}{\pi}\frac{z^3}{(x^2+z^2)^2},$$

$$T_2 = -\frac{2C}{\pi}\frac{z^2 x}{r^4} = -\frac{2C}{\pi}\frac{z^2 x}{(x^2+z^2)^2}.$$

Les tensions N_1, N_2 représentent des compressions. Elles

s'annulent toutes à l'infini, leurs expressions étant de l'ordre de $\frac{1}{r}$. Elles s'annulent aussi partout pour $z = 0$, sauf, bien entendu, à l'origine, où les formules ne sont du reste pas applicables.

On constate que l'on a la relation

$$N_1 N_3 - T_2^2 = 0,$$

et l'on en conclut, puisque $N_1 N_3 - T_2^2$ est un invariant, que l'une des deux compressions principales, sur les éléments plans normaux à zOx, est toujours nulle. La compression principale non nulle a pour valeur

$$a = N_1 + N_3 = -\frac{2C}{\pi}\frac{z}{r^2} = -\frac{2C}{\pi}\frac{z}{(z^2+x^2)}.$$

Elle s'exerce d'ailleurs sur l'élément perpendiculaire au rayon r. En effet, quelle que soit l'orientation d'un élément plan passant par le point M (xz), la direction de la compression qui s'y exerce demeure constamment parallèle à la compression principale. Or sur l'élément parallèle à Ox on a $\frac{T_2}{N_3} = \frac{x}{z}$. La direction commune cherchée est donc le rayon OM, issu de l'origine.

Il est aisé de suivre dans tout le plan zOx les variations des tensions N_1, N_3, T_2 et a.

Si l'on se déplace, par exemple, sur un plan horizontal, mené à la distance z, on trouve :

1° Que N_1 part de zéro pour $x = 0$, qu'il va ensuite en croissant pour passer par un maximum égal à $-\frac{C}{2\pi z}$, lorsque l'on a $x = z$ et enfin qu'il va en décroissant pour s'annuler avec $x = \infty$.

2° N_3 a pour valeur $-\frac{2C}{\pi z}$ pour $x = 0$ et va constamment en décroissant lorsque x augmente. Il s'annule à l'infini.

Si l'on fait la sommation $\int_0^\infty N_3\,dx$, on trouve, en tenant compte de ce que

$$\int_0^x \frac{dx}{(x^2+z^2)^2} = \frac{x}{2z^2(x^2+z^2)} + \frac{1}{2z^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{z},$$

$$\int_0^\infty N_3\,dx = -\frac{2Cz^2}{\pi}\frac{\pi}{4z^3} = -\frac{C}{2}.$$

3° Quant à T_2, c'est une fonction impaire de x. Elle s'annule

pour $x = 0$, puis va en croissant et passe par un maximum égal à $-\frac{9}{8\pi\sqrt{3}} \times \frac{C}{z}$ pour $x = \frac{z}{\sqrt{3}}$. Ensuite elle va en décroissant et s'annule pour $x = \infty$.

Si l'on fait la sommation $\int_0^\infty T_2\,dx$, on trouve, en tenant compte de ce que

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+z^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+z^2)},$$

$$\int_0^\infty T_1\,dx = -\frac{2Cz^2}{\pi}\,\frac{1}{2z^2} = -\frac{C}{\pi}.$$

4° Enfin, a est égal à $-\frac{2C}{\pi z}$ pour $x = 0$ et va constamment en décroissant lorsque x augmente. Il s'annule à l'infini.

La plus grande valeur de a, égale à la plus grande valeur de N_3, se trouve, à la profondeur z, à l'aplomb de la charge, et pour l'obtenir on peut supposer que celle-ci se répartit uniformément sur la bande découpée à cette profondeur z par deux plans obliques inclinés sur la verticale d'un angle α tel que $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\pi}{4}$. On trouve approximativement $\alpha = 38°10'$.

Examinons de la même façon ce qui se passe lorsqu'on se déplace sur un plan vertical d'abscisse x.

1° N_1 part de zéro pour $z = 0$. Il va ensuite en croissant et passe par un maximum pour $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$. La valeur de ce maximum est $-\frac{9}{8\pi\sqrt{3}} \times \frac{C}{x}$. Ensuite il va en décroissant et s'annule pour $x = \infty$.

Si l'on fait la sommation $\int_0^\infty N_1\,dz$, on trouvera comme résultat $-\frac{C}{\pi}$ en utilisant le résultat analogue trouvé plus haut pour T_2, permutation étant faite des variables x et z.

2° N_3 part aussi de zéro pour $z = 0$, passe par un maximum pour $z = x\sqrt{3}$, puis tend vers zéro.

3° Quant à T_2, il part aussi de zéro pour $z = 0$. Il passe par un maximum pour $z = x$, ce maximum ayant pour valeur $-\frac{C}{2\pi x}$. Ensuite, il décroît jusqu'à zéro.

Si l'on fait la sommation $\int_0^\infty T_2\,dz$, on trouve, en tenant compte

de ce que

$$\int_0^z \frac{z^2\,dx}{(x^2+z^2)^2} = \frac{1}{2x}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{x} - \frac{z}{2(x^2+z^2)},$$

$$\int_0^\infty T_2\,dz = -\frac{2Cx}{\pi}\,\frac{\pi}{4x} = -\frac{C}{2}.$$

4° Enfin, a part de zéro. Il passe par un maximum pour $x = z$, ce maximum ayant pour valeur $-\frac{C}{\pi x}$. Il s'annule à l'infini.

Il est à remarquer que si l'on considérait spécialement le plan vertical passant par Oz, en faisant $x = 0$, on trouverait, quel que soit z, pourvu qu'il soit différent de zéro,

$$N_1 = 0 = T_2.$$

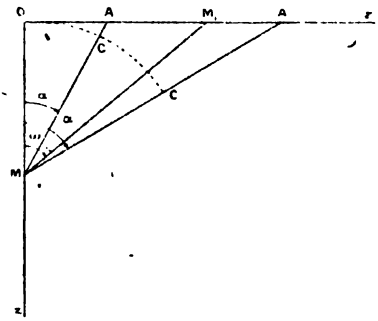
On serait tenté d'en conclure que les intégrales $\int^z N_1\,dz$ et $\int_0^z T_2$ relatives à ce plan dz sont nulles, alors que pour tous les plans parallèles elles ont des valeurs constantes $-\frac{C}{\pi}$ ou $\pm\frac{C}{2}$ respectivement. Mais si l'on examine les conditions d'équilibre statique de la tranche comprise entre le plan vertical Oz et le plan vertical d'abscisse x, on constate que seule la seconde intégrale peut être nulle. Il faut donc supposer quelque part dans le plan vertical Oz des réactions horizontales dont la résultante soit égale à $\frac{C}{\pi}$, autrement dit une compression totale ayant cette valeur. On est conduit à admettre que cette compression totale s'exerce dans la zone infiniment petite au voisinage immédiat du point O, zone dans laquelle les formules n'ont plus de sens et conduisent pour la valeur de N_1, comme pour celle de N_3, à un résultat infini. On peut dire, si l'on veut, que N_1 passe brusquement de la valeur zéro à la valeur $-\frac{C}{\pi}$ au point O. Mais ce n'est là évidemment qu'un langage abrégé, signifiant qu'on ne peut connaître que la résultante des compressions horizontales N_1 au voisinage du point O, de même qu'on ne connaît que la résultante des charges. Ce qui serait faux, ce serait d'en conclure, comme certains auteurs l'ont fait, qu'au point O interviennent deux forces $\frac{C}{\pi}$ tendant à écarter l'une de l'autre les deux moitiés du massif,

alors qu'il s'agit uniquement des réactions (compressions) de l'une des moitiés sur l'autre.

Examen du cas d'une bande uniformément chargée. — Soit A'A la bande uniformément chargée, à raison de p par unité de longueur, et soient a' et a les abscisses de ses extrémités.

Tout le long de A'A on aura $N_3 = -p$ et ce sera là sa valeur maxima. Nous nous bornerons à étudier les deux autres tensions utiles N_1 et T_2, le long d'une verticale Oz dont nous ferons varier la position, par rapport aux points A' et A.

Fig. 192.



Soit $M(Oz)$ le point pour lequel on calcule les tensions et $M_1(x_1 O)$ un point de la bande chargée. Ce dernier peut être défini en coordonnées polaires par l'angle $\widehat{OMM_1} = \omega$, compté positivement à droite de MO, et l'on aura

$$x_1 = z \operatorname{tang} \omega, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + z^2} = \frac{z}{\cos \omega}.$$

Les valeurs extrêmes de ω, pour A' et A seront désignées respectivement par α' et α.

Nous supposerons toujours A à droite de O, c'est-à-dire a et α positifs. Si A' est également à droite de O, comme dans la figure ci-dessus, on aura aussi a' et α' positifs. Mais, dans le cas ou A tomberait à gauche de O, on aurait a' et α' négatifs.

Lorsque l'on fera tendre M vers O, α tendra vers $\frac{\pi}{2}$. Mais, suivant

le cas, α' tendra vers $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Lorsque le point M s'éloignera à l'infini, α et α' tendront tous deux vers zéro.

Étude de la tension N_1. — D'après la formule générale, on a ici

$$N_1 = -\frac{2p}{\pi}\int_{\alpha'}^{\alpha}\frac{x_1^2 z}{r^4}\,dx_1.$$

Or on a

$$dx_1 = z\frac{d\omega}{\cos^2\omega}, \qquad x_1^2 = z^2\tang^2\omega, \qquad r^4 = \frac{z^4}{\cos^4\omega}.$$

On trouve donc

$$N_1 = -\frac{2p}{\pi}\int_{\alpha'}^{\alpha}\sin^2\omega\,d\omega = -\frac{p}{\pi}\left[\omega - \frac{\sin 2\omega}{2}\right]_{\alpha'}^{\alpha}$$
$$= -\frac{p}{\pi}\left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} - \left(\alpha' - \frac{\sin 2\alpha'}{2}\right)\right].$$

Si maintenant on fait tendre M vers l'infini, on trouve $N_1 = 0$, quelle que soit la situation respective des points OA' et A.

Si, au contraire, on fait tendre M vers o, deux cas sont à distinguer. Si A' est à droite de O, autrement dit si le point O est à l'extérieur de la bande chargée, α et α' tendent vers $+\frac{\pi}{2}$ et à la limite $N_1 = 0$.

Si A' est à gauche de O, autrement dit si le point O est un point de la bande chargée, α' tend vers $-\frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$\lim N_1 = -\frac{p}{\pi}\frac{2\pi}{2} = -p.$$

Cette limite représente une *compression* dont l'intensité est égale à celle de la charge au même point.

Ces résultats sont bien conformes au résultat général indiqué plus haut, à savoir que sur la surface on a partout $N_1 = N_3$.

Il est à remarquer que la compression N_1 sur la surface subit, comme N_3, un saut brusque égal à p en valeur absolue, quand le point O franchit le contour de la zone chargée. Cette singularité disparaîtrait pour une répartition de la charge annulant p sur le contour.

Lorsque le point O appartient à la zone chargée et qu'on fait croître

z de o à ∞, et que par suite α décroît de $\frac{\pi}{2}$ à o, ainsi que $(-\alpha')$, chacune des fonctions $\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}$ et $-\left(\alpha' - \frac{\sin 2\alpha'}{2}\right)$ est positive et va constamment en décroissant. Il en est de même de la valeur abolue de N_1, qui en est la somme, au facteur près $\frac{p}{\pi}$.

Lorsque le point O est à gauche de A′ et n'appartient pas à la zone chargée, N_1 est la différence de deux fonctions décroissantes, et l'on ne peut plus faire le même raisonnement. On sait, d'ailleurs, que N_1 part de zéro pour aboutir à zéro et qu'il est toujours négatif. Il passe donc par un maximum en valeur absolue pour un point intermédiaire, que l'on pourrait d'ailleurs déterminer, en tenant compte des relations

$$a = z \operatorname{tang}\alpha, \qquad a' = z \operatorname{tang}\alpha'; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\operatorname{tang}\alpha'}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{a'}{a}.$$

Cherchons maintenant à évaluer l'intégrale $\int_0^z N_1\, dz$ des valeurs de N_1 le lóng de OM. On peut intégrer séparément les termes dépendant de α et ceux dépendant de α'.

On a $z = a \cot\alpha$, d'où $dz = -\frac{a\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$, et les limites d'intégration pour α sont $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \alpha$. On obtient donc pour cette partie de l'intégrale

$$+\frac{pa}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{pa}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \cot\alpha\right)d\alpha = \frac{pa}{\pi}\left[\alpha\cot\alpha\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Or, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a $\alpha\cot\alpha = 0$. Il reste donc

$$-\frac{pa}{\pi}\alpha\cot\alpha = -\frac{pz}{\pi}\alpha.$$

Si α' est positif, un calcul tout semblable donnera pour les termes en α' le résultat $+\frac{pz}{\pi}\alpha'$, de sorte que le résultat final sera

$$-\frac{pz}{\pi}(\alpha - \alpha').$$

Si α' est négatif, en désignant par α'' sa valeur absolue, on trouverait $-\frac{pz}{\pi}\alpha'' = \frac{pz}{\pi}\alpha'$. Le résultat final serait donc encore le même. Il est proportionnel à z et à l'angle $\alpha - \alpha'$ sous lequel on voit du

point M la bande chargée A'A. Autrement dit, il est égal à $-\frac{p}{\pi}\times$ C'C, l'arc C'C étant l'arc de cercle décrit de M comme centre avec $MO = z$ comme rayon, et compris entre les droites MA' et MA.

Si, à présent, on fait tendre M vers l'infini, on a

$$\lim z(\alpha - \alpha') = a - a',$$

de sorte que l'on a

$$\lim \int_0^z N_1\, dz = \int_0^\infty N_1\, dz = -\frac{p}{\pi}(a - a') = -\frac{P}{\pi},$$

en désignant par P la charge totale $p(a - a')$. Ce résultat est indépendant de la situation respective du point O par rapport à A'A.

On peut, par des procédés analogues, calculer $\int_0^z N_1 z\, dr$, intégrale qui représente le moment par rapport au point O des tensions horizontales N_1 s'exerçant entre O et M. En prenant encore α comme variable d'intégration pour intégrer les termes dépendant de α, on trouve pour ceux-ci :

$$\frac{-p}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) a \cot\alpha \frac{-a\, d\alpha}{\sin^2\alpha} = +\frac{pa^2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha} - \cot^2\alpha\right) d\alpha.$$

L'intégrale générale de $\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha} - \cot^2\alpha$ est

$$\alpha - \frac{\alpha}{2\sin^2\alpha} + \frac{\cot\alpha}{2}$$

ainsi qu'on peut le vérifier par différentiation. En tenant compte de ce que pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la valeur de cette fonction se réduit à $\frac{\pi}{4}$, on trouve comme résultat :

$$\frac{pa^2}{\pi}\left[\alpha - \frac{\alpha}{2\sin^2\alpha} + \frac{\cot\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right].$$

Si α' est positif, on intégrera de même les termes correspondants et l'on fera la différence des résultats. Si α' est négatif, on arrivera au même résultat en posant $a' = -a''$ et $\alpha' = -\alpha''$, et l'on en fera

la somme. Dans le premier cas, on obtiendra

$$-\frac{pa'^2}{\pi}\left(\alpha' - \frac{\alpha'}{2\sin^2\alpha'} + \frac{\cot\alpha'}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

et dans le second cas

$$-\frac{pa'^2}{\pi}\left[\alpha' - \frac{\alpha'}{2\sin^2\alpha'} + \frac{\cot\alpha'}{2} + \frac{\pi}{4}\right].$$

Lorsqu'on fait tendre M vers l'infini, α et α' tendent vers zéro. L'ensemble des termes en α et α' tend vers zéro, ainsi qu'il est facile de s'en assurer en développant par rapport à α l'expression

$$-\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} + \cot\alpha = \frac{\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha}{\sin^2\alpha},$$

le numérateur étant de l'ordre de α^3 et le dénominateur de l'ordre de α^2 seulement. Il en résulte que le moment $\int_0^\infty N_1 z\,dz$ tend vers les valeurs suivantes :

$$-\frac{pa^2}{4} + \frac{pa'^2}{4} = -\frac{p}{4}(a^2 - a'^2) \quad \text{quand} \quad a' > 0,$$

$$-\frac{pa^2}{4} - \frac{pa'^2}{4} = -\frac{p}{a}(a^2 + a'^2) \quad \text{quand} \quad a' < 0.$$

En divisant ces expressions par $-\frac{p}{\pi}(a - a')$, on aurait les points de passage de la résultante.

Supposons maintenant que O coïncide avec le milieu de AA' et que, les points A et A' s'éloignant indéfiniment, la bande chargée ait une largeur infinie. Quel que soit le point M, pourvu qu'il reste à distance finie de O, on aura approximativement à la limite

$$N_1 = -\frac{2p}{\pi}\frac{\pi}{2} = -p.$$

Supposons enfin que le massif indéfini soit d'abord aussi au niveau du point M, puis qu'on le complète par couches successives d'épaisseur dz s'incorporant au fur et à mesure au massif, et en faisant dès lors partie intégrante. Chaque couche ajoutée équivaudra à une charge $p\,dz$, par unité de longueur, p étant le poids de l'unité de volume. Elle produira en M une compression $-N_1 = p\,dz$.

La compression totale aura pour valeur pz, quand le massif sera complété jusqu'au niveau de O.

La compression totale entre O et M aura pour valeur

$$\int_0^z pz\,dz = \frac{pz^2}{2}$$

et sera appliquée, au tiers de la hauteur, à partir de M.

Étude de T_2. — D'après la formule générale, on a ici

$$T_2 = +\frac{2p}{\pi}\int_{a'}^{a}\frac{x_1 z^2}{r^4}\,dx_1 = \frac{2p}{\pi}\int_{\alpha'}^{\alpha}\sin\omega\cos\omega\,d\omega = -\frac{p}{\pi}(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha').$$

T_2 s'annule toujours pour $z = \infty$. Quand on fait tendre z vers zéro, α et α' tendent vers $\frac{\pi}{2}$ et $\pm\frac{\pi}{2}$ et l'on a encore $T_2 = 0$, quelle que soit la situation du point O par rapport à la zone chargée.

T_2 conserve toujours le même signe le long d'une verticale quelconque, ce signe dépendant de la grandeur relative de α et de α' en valeur absolue et celle-ci dépendant elle-même de la grandeur relative de a et a'. T_2 passe donc en valeur absolue par un maximum entre $z = 0$ et $z = \infty$. Quand O est au milieu de AA', on a constamment $T_2 = 0$.

Cherchons maintenant à évaluer l'intégrale $\int_0^z T_2\,dz$ le long de OM. On pourra encore intégrer séparément le terme dépendant de α et celui dépendant de α'. A l'égard du premier, en remplaçant dz par $-\frac{a\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$, on obtient

$$\frac{pa}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha = \frac{pa}{\pi}[\alpha + \cot\alpha]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{pa}{2} - \frac{pa\alpha}{\pi} - \frac{pz}{\pi}$$

en tenant compte de $a\cot\alpha = z$.

Le terme en α' donnera de même, si α' est positif,

$$-\left[\frac{pa'}{2} - \frac{pa'\alpha'}{\pi} - \frac{pz}{\pi}\right],$$

de sorte que le résultat final sera

$$\int_0^z T_2\,dz = \frac{p}{2}(a - a') - \frac{p}{\pi}(a\alpha - a'\alpha').$$

Si a' et α' sont négatifs, en désignant par a'' et α'' leurs valeurs absolues, on obtiendrait pour le second terme

$$-\left[\frac{pa''}{2} - \frac{pa''\alpha''}{\pi} - \frac{pz}{\pi}\right],$$

de sorte que le résultat final serait

$$\int_0^z T_2\,dz = \frac{p}{2}(a - a'') - \frac{p}{\pi}(a\alpha - a''\alpha'') = \frac{p}{2}(a + a') - \frac{p}{2}(a\alpha - a'\alpha').$$

Si, à présent, on fait tendre z vers l'infini, α et α' tendent vers zéro et l'on a dans le premier cas ($a' > 0$ et le point O étant en dehors de la zone chargée)

$$\int_0^\infty T_2\,dz = \frac{p}{2}(a - a') = \frac{P}{2}.$$

Dans le second cas ($a' < 0$, le point O étant dans l'intérieur de la zone chargée),

$$\int_0^\infty T_2\,dz = \frac{p}{2}(a + a').$$

En particulier, quand O est au milieu de l'intervalle AA', on a $a' = -a$ et l'intégrale est nulle, ses éléments étant d'ailleurs tous nuls, comme nous l'avons vu.

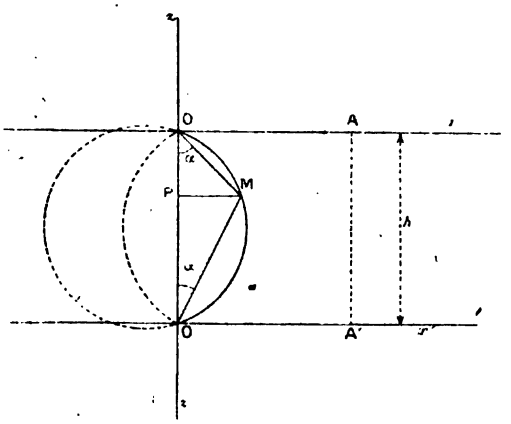
Les résultats qui précèdent paraissent pouvoir légitimement trouver leur application dans l'étude des effets des surcharges imposés à un terre-plein limité par un mur de soutènement vertical.

Étude d'une plaque indéfinie d'épaisseur constante h. — L'étude du massif indéfini conduit tout naturellement à la connaissance de l'état élastique d'une plaque indéfinie pour certains cas, très particuliers, il est vrai, de distribution des charges sur ses deux faces.

Considérons, en effet, le massif indéfini situé au-dessous de Ox, et supposons qu'on applique à sa surface un système de charges, du reste quelconque. Coupons-le par le plan horizontal $O'x'$ mené à la distance h de la surface libre. La plaque indéfinie comprise entre Ox et $O'x'$ conservera l'équilibre élastique qu'elle possédait

antérieurement à la coupure, alors qu'elle faisait partie du massif indéfini, pourvu que sur sa face inférieure $O'x'$ on applique des charges égales aux réactions N_3 et T_2 qui s'exerçaient aux diffé-

Fig. 193.



rents points de cette face. On pourra donc connaître les tensions en tous les points de la plaque, ainsi chargée arbitrairement sur l'une de ses faces et soumise sur la face opposée aux réactions qui y seraient développées par ces charges arbitraires dans le massif indéfini.

Supposons maintenant que, sur la face inférieure, on applique des charges égales et symétriques deux à deux aux charges de la face supérieure et sur la face supérieure des réactions égales et symétriques deux à deux à celles de la face inférieure, on aura encore un système en équilibre. En un point intérieur M, les composantes des tensions relatives au second système de charges se déduiront de celles relatives au premier, à condition de porter l'origine des coordonnées en O', c'est-à-dire de changer z en $z - h$ et de changer le signe des composantes verticales des charges. Si l'on pose $z' = h - z$, de sorte que $z + z' = h$, cela reviendra à changer z en $-z'$ en même temps qu'on changera le signe des composantes verticales des charges. On aura ainsi la solution correspondant à deux ensembles de charges symétriques, dont l'un est arbitraire et dont l'autre est constitué par les réactions qui correspondraient au premier dans un massif indéfini.

Bien que ceci soit très particulier, on peut, dans certains cas, y trouver une méthode permettant l'étude d'un ensemble de charges symétriques, donné arbitrairement. Si, en effet, l'ensemble complémentaire formé par les réactions est susceptible d'une solution exacte ou approchée, il en sera évidemment de même du premier ensemble.

On peut même aller plus loin. Si l'on considère un ensemble de charges égales et opposées à l'ensemble complémentaire des réactions, il aura lui-même un système complémentaire que l'on pourra déterminer, et l'on aura encore une situation d'équilibre pour la plaque soumise à l'ensemble des charges données d'une part, et à l'ensemble des réactions du second système complémentaire, et ainsi de suite. Il pourra arriver que l'on parvienne ainsi, après quelques transformations, à un système complémentaire susceptible d'une solution exacte ou approchée. On en déduira une solution pour le système des charges données.

Afin de préciser par un exemple, nous examinerons le cas où les charges se réduisent à deux forces normales C égales et opposées appliquées respectivement aux points O et O'.

D'après ce que nous avons dit, les charges complémentaires à faire intervenir sur la base inférieure $O'x'$ sont les réactions N_3 et T_2 qui correspondraient à la charge C agissant en O. En un point $A'(\xi h)$ de cette base, on aura

$$C' = N_3 = -\frac{2C}{\pi}\frac{h^3}{(\xi^2+h^2)^2}, \qquad A' = T_2 = -\frac{2C}{\pi}\frac{h^2\xi}{(\xi^2+h^2)^2}.$$

Sur la base supérieure, au point symétrique $A(\xi O)$, on aura une charge complémentaire de composantes $A'(-C')$.

Quant aux tensions en un point $M(xz)$ de la plaque, elles seront données par les formules suivantes où $z' = h - z$:

$$N_1 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{x^2 z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{x^2 z'}{(x^2+z'^2)^2}\right],$$

$$N_3 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{z^3}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z'^3}{(x^2+z'^2)^2}\right],$$

$$T_2 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} - \frac{xz'^2}{(x^2+z'^2)^2}\right].$$

Bien entendu, ces formules s'appliquent à l'ensemble des charges données et des charges complémentaires.

Cherchons à apprécier l'effet de ces dernières. Les charges normales vont régulièrement en diminuant de $+\frac{2C}{\pi h}$ à o, lorsque ξ varie de o à ∞. Les charges tangentielles croissent en valeur absolue de zéro jusqu'à un certain maximum, approximativement égal à $\frac{2C}{\pi h} \times 0{,}32$, puis décroissent jusqu'à zéro. Si l'on fait la somme des charges tangentielles entre une certaine abscisse x et l'infini, on trouve

$$\int_x^\infty A'\,d\xi = -\frac{2Ch^2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\xi\,d\xi}{(\xi^2+h^2)} = -\frac{C}{\pi}\frac{h^2}{(x^2+h^2)}$$

et il faut doubler ce résultat pour tenir compte de la seconde base. Considérons la section normale AA′ d'abscisse x. La portion de la plaque qui est à sa droite est en équilibre sous l'action des charges complémentaires qui lui sont appliquées et des tensions $(-N'_1)$ et $(-T'_2)$ que l'ensemble des charges complémentaires développe dans la section AA′. L'une des équations d'équilibre est donc

$$\int_0^z N'_1\,dz = \int_x^\infty A'\,d\xi = -\frac{2C}{\pi}\frac{h^2}{x^2+h^2}.$$

Ainsi la compression totale dans la section ne dépend pas des charges complémentaires normales C′, mais seulement des forces tangentielles A′, qui se font équilibre de part et d'autre de la section. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire consiste dès lors à supposer que la compression N'_1 est uniforme sur toute l'étendue de la section. Les forces A′ un peu éloignées de la section s'y répartissent certainement d'une manière uniforme, d'après tout ce que l'on sait des expériences sur la traction des barreaux. Pour les autres, ce sera un résultat plus ou moins approché.

La valeur de cette compression complémentaire est donc, d'une manière approchée,

$$N'_1 = -\frac{2C}{\pi}\frac{h}{x^2+h^2}$$

Les deux autres composantes des tensions se déduiront alors des deux équations générales d'équilibre

$$\frac{dN'_1}{dx} + \frac{dT'_2}{dz} = 0,$$

$$\frac{dT'_2}{dx} + \frac{dN'_3}{dz} = 0.$$

On trouve facilement

$$T'_2 = -\frac{2C}{\pi}\frac{hx(2z-h)}{(x^2+h^2)^2} = -\frac{2C}{\pi}\frac{hx(z-z')}{(x^2+h^2)^2},$$

$$N'_3 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{h^3}{(x^2+h^2)^2} + \frac{h(h^2-3x^2)zz'}{(x^2+h^2)^3}\right].$$

Si l'on retranche ces valeurs N'_1, N'_3, T'_2 des expressions écrites plus haut pour N_1, N_3, T_2, on aura donc une solution approchée du problème de la plaque soumise aux deux seules forces C.

On pourrait rechercher une solution plus approchée de la manière suivante. Supposons qu'on superpose un instant au-dessus et au-dessous de la plaque donnée et déjà placée dans l'état élastique précédent deux plaques de même épaisseur, puis qu'on fasse agir aux points O_1 et O'_1 de la nouvelle surface situés sur Oz deux forces égales et opposées, de valeur $(-C)$. Elles produiront dans toute l'étendue du nouveau massif, et en particulier dans l'étendue de la plaque primitive, des tensions dont les expressions seront de même forme que précédemment, à condition de changer C en $-C$ et z et z' en $h+z$ et $h+z'$ respectivement. Si l'on fait maintenant des coupures suivant les plans O et O', la plaque primitive sera dans un état d'équilibre connu, à condition de prendre en considération, le long de ces coupures, des charges complémentaires dont il est aisé de faire le compte. Sur la face O', par exemple, on a d'abord les charges A' et C' dues à la force C agissant en O, puis des charges A' et $-C'$ dues à la force $+C$ agissant en O'_1 et enfin des charges $-A''$ et $-C''$ dues à la force $(-C)$ agissant en O_1. Au total, on aura $2A' - A''$ et $-C''$.

En poursuivant, on finirait par trouver un état d'équilibre pour lequel les charges complémentaires s'exerçant à la surface seraient de la forme $2(A' - A'' + A''' + \ldots) \pm A^n$ et C^n, les derniers termes A^n et C^n tendant vers zéro, quel que soit x. A la limite, ces charges complémentaires se réduiraient donc à des charges tangentielles, nulles pour $x = 0$, croissant plus lentement que les charges A' et dont la valeur totale de 0 à ∞ reste toujours égale à $-\frac{2C}{\pi}$. On pourrait alors supposer que dans la région voisine de OO' elles produisent une traction uniforme.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point. Mais nous signa-

lerons que l'étude détaillée des tensions dans une plaque soumise aux deux forces normales C et aux charges complémentaires (A'C') conduit à la connaissance complète de l'équilibre élastique de certains solides cylindriques comprimés par deux forces C égales et opposées.

Nous transformerons les formules donnant N_1 N_3 T_2 en rapportant le point $M(xz)$ aux deux points chargés O et O' au moyen des deux angles $\widehat{MOO'} = \alpha$, $\widehat{MO'O} = \alpha'$, angles qui seront compris chacun entre o et $\frac{\pi}{2}$ et qui seront regardés comme positifs quand M est à droite de OO'.

On a, en posant $r = OM = \sqrt{x^2 + z^2}$, $r' = O'M = \sqrt{x^2 + z'^2}$, les relations évidentes :

$$z = r\cos\alpha, \qquad z' = r'\cos\alpha',$$
$$x = r\sin\alpha = r'\sin\alpha',$$
$$\frac{r}{\sin\alpha'} = \frac{r'}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

On en déduit facilement

$$N_1 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{r} + \frac{\cos\alpha'\sin^2\alpha'}{r'}\right]$$
$$= -\frac{2C}{\pi h}\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'}[\cos\alpha\sin^3\alpha + \cos\alpha'\sin^3\alpha'],$$
$$N_3 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{\cos^3\alpha}{r} + \frac{\cos^3\alpha'}{r'}\right]$$
$$= -\frac{2C}{\pi h}\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'}[\cos^3\alpha\sin\alpha + \cos^3\alpha'\sin\alpha'],$$
$$T_2 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{r} - \frac{\sin\alpha'\cos^2\alpha'}{r'}\right]$$
$$= -\frac{2C}{\pi h}\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'}[\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha'\cos^2\alpha'].$$

Mettons de côté, pour simplifier les écritures, le facteur commun

$$-\frac{2C}{\pi h}\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'},$$

nous obtiendrons

$$N_1 + N_3 = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha'\cos\alpha' = \sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha - \alpha'),$$
$$N_3 - N_1 = \frac{1}{2}[\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha'\cos 2\alpha'] = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha + \alpha')\cos 2(\alpha - \alpha')'.$$

Cherchons les directions des tensions principales. L'angle φ que fait l'une d'elles avec la direction Ox, ou avec la direction de N_1, est donné par l'équation

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2T_2}{N_1 - N_3} = \frac{4(\sin^2\alpha' \cos^2\alpha' - \sin^2\alpha \cos^2\alpha)}{\sin 2(\alpha + \alpha') \cos 2(\alpha - \alpha')} = -\operatorname{tang} 2(\alpha - \alpha').$$

Or, si l'on trace le cercle passant par les trois points O, O', M, sa tangente en M fait précisément avec Oz l'angle $(\alpha - \alpha')$, et par suite son rayon fait, au signe près, le même angle avec Ox. Les deux directions principales sont donc le rayon et la tangente de ce cercle.

Appelons N_r la tension principale dirigée suivant le rayon, et s'exerçant par suite sur un élément du contour du cercle, et appelons N_t la tension principale dirigée suivant la tangente, nous trouverons pour ces tensions principales les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
N_r &= \frac{N_1 + N_3}{2} + \frac{N_1 - N_3}{2} \frac{1}{\cos 2(\alpha - \alpha')} \\
&= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha') - \frac{1}{4} \sin 2(\alpha + \alpha') \\
&= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \alpha')[\cos(\alpha - \alpha') - \cos(\alpha + \alpha')] \\
&= \sin(\alpha + \alpha') \sin\alpha \sin\alpha';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_t &= \frac{N_1 + N_3}{2} - \frac{N_1 - N_3}{2} \frac{1}{\cos 2(\alpha - \alpha')} \\
&= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \alpha')[\cos(\alpha - \alpha') + \cos(\alpha + \alpha')] \\
&= \sin(\alpha + \alpha') \cos\alpha \cos\alpha'.
\end{aligned}$$

En rétablissant le facteur commun négligé, on trouve finalement

$$N_r = -\frac{2C}{\pi h} \sin^2(\alpha + \alpha') \qquad \text{et} \qquad N_t = -\frac{2C}{\pi h} \frac{\sin^2(\alpha + \alpha')}{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'}.$$

On voit par là que N_r demeure constant lorsque le point M se déplace de telle sorte que $\alpha + \alpha' = \text{const.}$, c'est-à-dire lorsqu'il se déplace sur un arc de cercle passant par OO'.

Si l'on considère le corps en forme de lentille cylindrique compris entre un arc de cercle tel que OMO' et l'arc de cercle symétrique par rapport à OO', on reconnaît qu'il est soumis sur son contour aux forces extérieures suivantes : 1° les deux forces C

appliquées en O, et 2° une compression normale uniforme sur toute sa surface et égale à $-\frac{2C}{\pi h}\sin^2(\alpha+\alpha')$, l'angle $\alpha+\alpha'$ étant la moitié de l'angle sous lequel se coupent les deux faces de la lentille.

Or l'effet d'une compression normale uniforme est connu. En tout point intérieur elle produit une compression uniforme sur tout élément superficiel, quelle que soit son orientation. Si on la retranche des expressions précédemment trouvées pour N_1 et N_3, sans modifier T_2, on aura l'état élastique intérieur de la lentille soumise seulement aux deux forces C et libre sur le reste de sa surface.

Considérons en particulier le cas où $\alpha+\alpha'=\frac{\pi}{2}$, et où par suite la lentille devient le cylindre à base circulaire décrit sur OO' comme diamètre. La compression uniforme a pour valeur $-\frac{2C}{\pi h}$. Par suite en revenant aux expressions primitives des tensions, en fonction de x, z, z', on obtient pour le cylindre comprimé par les deux forces C les expressions

$$N_1 = \frac{2C}{\pi}\left[\frac{1}{h} - \frac{x^2 z}{(x^2+z^2)^2} - \frac{x^2 z'}{(x^2+z'^2)^2}\right],$$

$$N_3 = \frac{2C}{\pi}\left[\frac{1}{h} - \frac{z^3}{(x^2+z^2)^2} - \frac{z'^3}{(x^2+z'^2)^2}\right],$$

$$T_2 = -\frac{2C}{\pi}\left[\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} - \frac{xz'^2}{(x^2+z'^2)^2}\right].$$

On peut en faire une discussion détaillée. Nous nous bornerons à remarquer que tout le long de OO' on a $N_1 = \frac{2C}{\pi h}$. C'est une tension constante. Mais il ne faut pas oublier que, au voisinage des points d'application des forces O et O', il y a des compressions dont la valeur totale est $-\frac{2C}{\pi h}$ et dont la répartition ne peut être connue tant que celle des forces fictives C ne l'est pas elle-même. L'intensité de ces compressions est, comme nous le savons, égale à celle des compressions exercées à la surface, au voisinage immédiat de celle-ci. Elle est toujours incomparablement plus forte que la tension $\frac{2C}{\pi h}$, au moins tant qu'il s'agit d'un phénomène élastique.

Le long de OO′, on a $N_3 = \frac{2C}{\pi}\left(\frac{1}{h} - \frac{h_1}{zz'}\right)$. Il est infini en O et en O′ comme on pouvait s'y attendre.

Une autre remarque intéressante c'est que, dans ce cas particulier, on a en tout point de la surface $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha'$ et, par suite,

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = 1.$$

La tension principale N_t devient elle-même constante et égale à $-\frac{2C}{\pi h}$. Il en résulte que dans le cylindre libre à sa surface, et soumis aux deux seules forces C, il n'y a aucune tension dans aucune direction pour un point de la surface. Il n'y a donc aucune cause de désagrégation de la matière en ces points, à l'exception bien entendu des régions d'application des forces C.

CHAPITRE XXVII.

ÉQUILIBRE DES MASSIFS PESANTS ET PARTICULIÈREMENT DES MASSIFS TRIANGULAIRES EN TERRE OU EN MAÇONNERIE.

Dans les problèmes ordinaires d'élasticité, on part toujours d'un état dit *naturel* dans lequel il n'y a, par hypothèse, aucune tension préalable entre les différentes particules de la matière, et l'on cherche à déterminer les tensions qui y sont produites par l'intervention de causes connues, au nombre desquelles figure le poids des particules elles-mêmes, comme si l'influence de la pesanteur se faisait sentir postérieurement à la constitution du corps ou du massif considéré.

Il en est bien ainsi dans un certain nombre de cas usuels. Par exemple, lorsque l'on construit un arc métallique, ou bien une voûte, sur des cintres, et que l'on établit les calages ou les clefs de voûte de manière à n'introduire aucune réaction appréciable dans les joints laissés libres jusqu'au dernier moment, le poids propre n'intervient qu'après décintrement, c'est-à-dire après la construction, et on peut le considérer au même titre que les charges permanentes provenant de la superstructure, ou que les surcharges variables introduites après coup.

S'il n'en est pas ainsi, et si l'on a effectué les calages de manière à introduire des réactions connues, ou bien des déformations connues, ces réactions ou déformations peuvent et doivent être prises en compte dans les calculs et combinées avec l'effet du poids propre de l'arc ou de la voûte. Mais, dans tous les cas, on peut lever toute indétermination en suivant pas à pas la construction, et l'on obtient un certain état défini auquel on n'a qu'à superposer celui qui correspondra aux surcharges permanentes ou variables ajoutées ultérieurement.

D'ailleurs, le poids propre des particules du corps étudié est

souvent négligeable par rapport aux forces qui s'exercent à sa surface et qui sont les conséquences des forces extérieures appliquées. On le néglige alors, conformément à l'indication de Lamé.

Quand on étudie certains massifs de terre ou de maçonnerie, au contraire, c'est le poids propre qui joue le rôle capital, et souvent même il intervient seul, les autres forces extérieures étant nulles ou négligeables. Dès lors, ce qui est véritablement l'objet du problème, c'est la connaissance d'un certain « état naturel ou initial » qui se produirait avant toute intervention de causes extérieures autres que la pesanteur, l'intervention de celle-ci étant concomitante et non postérieure à la constitution du massif.

On comprend par là que le problème soit en quelque sorte insoluble et échappe en grande partie à la théorie de l'Élasticité.

Pour une matière donnée, il y a en effet toujours une infinité d'états d'équilibre réalisables, lorsque cette matière est composée de particules susceptibles de développer entre elles des forces de frottement ou d'adhérence, ou plus généralement des résistances aux déplacements n'ayant pas le caractère de réversibilité. Or, il n'y a que les fluides parfaits qui, par définition, en soient exempts. Quand il s'agit de corps solides, on peut obtenir des arrangements de molécules très variés suivant le traitement préalable qu'on leur fait subir, soit au moment même de leur constitution, soit après coup : trempe, écrouissage, dépassement de la limite d'élasticité, etc. Quand il s'agit de massifs de terre ou de maçonnerie, l'arrangement des molécules et les tensions intérieures qui en résultent dépendent de même, dans de larges limites, de la façon dont le massif a été constitué, c'est-à-dire de ce que l'on peut appeler « l'élément historique de sa formation ».

Prenons, par exemple, un bloc parallélépipédique de maçonnerie. Si on l'a construit sur une aire indéformable et qu'on le transporte ensuite sur un sol relativement compressible, les réactions sur sa base changeront, et par suite aussi les tensions intérieures. Les réactions du sol seront plus fortes vers le pourtour de la base que vers le centre. Si on l'avait construit directement sur le sol compressible, on aurait pu obtenir un résultat du même genre, sinon identique, à la condition d'opérer la construction par assises horizontales et de donner le temps aux assises inférieures de faire prise avant de leur superposer les autres assises. Si, au

contraire, on imagine que l'on construise côte à côte une série de prismes élémentaires ayant toute la hauteur du massif, en leur laissant leur indépendance, chacun d'eux chargera à peu près uniformément le sol de fondation. Si on les réunit après coup par un coulis de mortier, la pression sera à peu près uniforme sur toute la surface de base, quelle que soit la compressibilité de celle-ci.

De même, on a depuis longtemps observé que la poussée d'un remblai derrière un mur de soutènement dépend, dans une très large mesure, des soins pris dans la confection de ce remblai, toutes choses égales d'ailleurs. Si les terres sont réglées par couches horizontales minces et soigneusement pilonnées, on obtient des poussées moindres qu'avec un remblai exécuté sans ces précautions. Des expériences déjà anciennes, faites en Angleterre par le professeur Howard Darwin, ont d'ailleurs montré toute l'importance de cet « élément historique ». Darwin se servait d'une caisse dont l'une des parois latérales était mobile autour d'une charnière et était retenue par une corde reliée à un dynamomètre. Cette paroi mobile cédait sous la poussée d'un sable parfaitement sec quand on diminuait graduellement la tension du dynamomètre jusqu'à une certaine limite. Cette tension limite n'était pas du tout la même, selon que le sable avait été versé par couches horizontales ou en talus incliné soit vers la paroi mobile, soit vers le côté opposé, ou enfin selon que l'on avait provoqué un tassement plus ou moins intense du sable. Les nombres trouvés n'ont certainement pas une importance absolue en raison des conditions plus ou moins imparfaites des expériences. Mais les écarts systématiques trouvés dans les différentes séries d'expériences ne laissent aucun doute sur les différences considérables que peuvent présenter, au point de vue de leur équilibre intérieur, des massifs constitués avec une matière identique, mais dans des conditions historiques différentes.

Dans ces conditions, on peut légitimement se demander si la théorie de l'élasticité est bien applicable, du moins en ce qu'elle a d'essentiel, c'est-à-dire en ce qui concerne les relations entre les composantes des tensions et les composantes des déformations. Il ne s'agit plus en effet d'un état déformé, mais bien d'un état initial. Alors les équations d'équilibre du parallélépipède élémentaire, qui sont au nombre de trois seulement, ne sont plus suffisantes pour

déterminer les six composantes des tensions. Il en reste trois d'arbitraires dans le cas général.

Si, pour simplifier, on envisage seulement un problème d'élasticité à deux dimensions, les trois tensions utiles N_1, N_2, T_3 satisfont bien aux deux équations différentielles

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + X_0 = 0,$$
$$\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + Y_0 = 0.$$

Mais peut-on, ou non, adjoindre à ces équations la condition

$$\Delta(N_1 + N_2) = 0,$$

qui traduit en somme le fait que les tensions doivent dériver de déplacements élastiques et permettre au besoin de déterminer ces derniers?

Faute de mieux, et pour rendre le problème déterminé, on ne peut que répondre par l'affirmative. On suppose au fond, en opérant ainsi, que l'action de la pesanteur ne se fait sentir qu'après coup sur un massif déjà constitué. Mais il faut se garder d'oublier que ce n'est là qu'une hypothèse pouvant s'éloigner de la vérité.

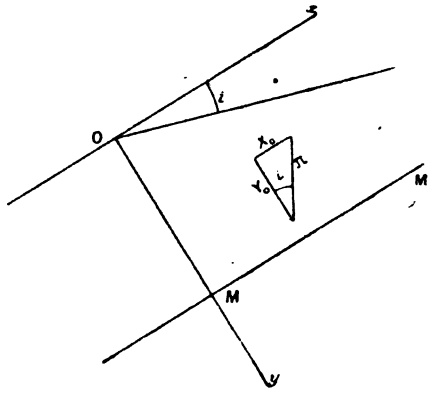
D'un autre côté, pour qu'un problème d'élasticité soit complètement déterminé au point de vue analytique, il est nécessaire que l'on puisse s'assigner d'avance des conditions aux limites, c'est-à-dire les conditions que le massif doit remplir sur toute sa surface, soit au point de vue de ses déformations, soit au point de vue des forces qui lui sont appliquées. Or, dans la plupart des problèmes qu'on aurait à se poser sur des massifs pesants, il n'en est pas ainsi. On a bien des portions de surfaces sur lesquelles on connaît les forces extérieures appliquées. Mais il y a d'autres portions de surfaces par lesquelles le massif s'appuie sur d'autres massifs, rocher fixe ou mur de soutènement, et les réactions qui s'y exercent sont inconnues, du moins en ce qui concerne leur répartition, car les trois équations d'équilibre statique n'en peuvent faire connaître que les résultantes. C'est même le plus souvent la détermination de ces réactions qui serait le véritable objet pratique du problème. Il y a donc là une nouvelle cause d'indétermination qui est souvent irrémédiable.

On peut cependant la restreindre dans quelques cas. Parmi tous les états d'équilibre possibles contenus dans la solution générale, il y en a qui peuvent et doivent être écartés, quand on prend en considération certaines propriétés de la matière constituant le massif, parce que, en certains points ou en certaines régions du massif, il se produirait des effets incompatibles avec ces propriétés. Quand il s'agit de maçonnerie ou de terre, on rejette *a priori* toute solution particulière qui conduirait à des efforts de tension, ces efforts étant supposés inconciliables avec les propriétés des matériaux en question.

Toutes ces considérations apparaîtront mieux en lumière dans la question suivante, qui peut servir d'exemple type.

Équilibre d'un massif de terre indéfini limité par une surface libre plane. — Considérons un massif indéfini limité, à sa partie supérieure, par un plan faisant un angle i avec le plan horizontal. Nous prendrons pour axe des x la ligne de plus grande pente du plan et pour axe des y la normale dirigée de haut en bas. (L'axe Oz du trièdre normal de référence serait ainsi en avant du tableau.)

Fig. 194.



Soit Π le poids du mètre cube de terre. Ses composantes suivant Ox et Oy seront respectivement

$$X_0 = -\Pi \sin i,$$
$$Y_0 = \Pi \cos i.$$

Les deux équations d'équilibre déduites de la considération du parallélépipède élémentaire s'écrivent donc, en considérant les compressions comme positives,

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dy} + \Pi \sin i = 0,$$
$$\frac{dT_2}{dx} + \frac{dN_2}{dy} - \Pi \cos i = 0.$$

Le massif étant indéfini dans la direction Ox, rien ne distingue les uns des autres les différents points M appartenant à une même parallèle à Ox. En conséquence, les trois dérivées

$$\frac{dN_1}{dx}, \quad \frac{dN_2}{dx}, \quad \frac{dT_2}{dx}$$

doivent être nulles.

Les équations précédentes se réduisent à

$$\frac{dN_2}{dy} - \Pi \cos i = 0,$$
$$\frac{dT_2}{dy} + \Pi \sin i = 0.$$

Elles fournissent respectivement

$$N_2 = + \Pi y \cos i,$$
$$T_2 = - \Pi y \sin i.$$

les constantes d'intégration étant nulles si l'on ne suppose aucune charge à la surface.

Ainsi N_2 et T_2 sont déterminés. La tension N_1 demeure au contraire une fonction de y entièrement arbitraire, tant qu'on ne suppose pas qu'il s'agisse d'un état élastique.

Si l'on introduit cette hypothèse et si l'on prend en considération l'équation

$$\Delta(N_1 + N_2) = 0,$$

cette équation se réduit à $\Delta N_1 = 0$, ou même, puisque $\frac{dN_1}{dx} = 0$, à $\frac{d^2 N_1}{dy^2} = 0$.

On en déduit

$$N_1 = Ay + B.$$

La constante B sera supposée égale à zéro si l'on admet que, sur

la surface libre, on ait $N_1 = 0$. Cette condition est nécessaire, comme nous le verrons, quand il s'agit de terre pulvérulente. En tout cas, ces constantes A et B ne peuvent être déterminées que par les conditions aux limites, c'est-à-dire ici par les conditions à l'infini.

Sur tout plan parallèle à Ox, on est bien obligé d'admettre que les réactions N_2 et T_3, indépendantes de x, ont les valeurs indiquées plus haut, et cela n'est pas inadmissible à la limite, ces réactions devenant d'ailleurs infinies avec y. Mais la valeur de N_1 est indifférente.

D'un autre côté, sur tout plan parallèle à Oy, et particulièrement pour le plan à l'infini, la réaction T_3 est déterminée, mais les coefficients de N_1 ne peuvent être connus que si l'on se donne la valeur de cette tension sur l'un quelconque de ces plans. Il est donc impossible, en général, de le déterminer par la seule considération de l'équilibre du massif.

Les mêmes considérations s'appliquent à un massif qui serait limité en profondeur par un plan parallèle à Ox.

Cherchons maintenant les restrictions dont la solution peut devenir susceptible quand on suppose à la terre certaines propriétés.

Il y en a une qui s'impose pour toute nature de terre, c'est que N_1 représente une compression, c'est-à-dire doit être positif. Pour en trouver d'autres, nous envisagerons deux cas, celui où la terre est pulvérulente ou dépourvue de cohésion, et celui où elle possède une certaine cohésion.

Premier cas. — *Terre pulvérulente.* — Du sable fin bien sec, ou des cailloux secs de petite dimension, forment une représentation bien nette des corps que l'on qualifie par l'épithète « pulvérulent ». Les grains de sable n'ont aucune adhérence ou cohésion entre eux ; ils ne sont retenus au contact les uns des autres que par leur pression mutuelle et par le frottement qui en résulte.

On se représente une rupture d'équilibre comme due au glissement des éléments les uns par rapport aux autres lorsque, sur un élément plan, la composante tangentielle de la pression dépasse le produit de la composante normale par un certain coefficient de frottement $f = \operatorname{tang} \varphi$ caractéristique de la matière considérée.

Autrement dit, pour que l'équilibre soit stable, il faut que l'on ait la condition

$$\text{max. de } |T| - |N \tang \varphi| \leqq 0,$$

qui a été étudiée au Chapitre XX.

Cette condition, mise sous une forme plus explicite, s'écrit

$$(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2 - (N_1 + N_2)^2 \sin^2\varphi \leqq 0.$$

On voit d'abord que sur la surface libre, c'est-à-dire pour $y = 0$, N_1 doit s'annuler, car N_2 et T_3 étant nuls, l'inégalité se réduit à

$$N_1^2 \cos^2\varphi \leqq 0.$$

A la surface libre d'un massif pulvérulent, toutes les tensions doivent s'annuler à la fois.

Si maintenant nous remplaçons les composantes des tensions par leurs valeurs, l'inégalité s'écrira

$$U = y^2[(A - \Pi \cos i)^2 + 4\Pi^2 \sin^2 i - (A + \Pi \cos i)^2 \sin^2\varphi] \leqq 0.$$

C'est la condition dite « de Rankine ».

Cette condition est indépendante de y, dont le carré est en facteur commun. Il suffit que la parenthèse soit négative ou au plus nulle. Cette parenthèse peut s'écrire

$$\frac{U}{y^2} = A^2 \cos^2\varphi - 2A\Pi \cos i(1 + \sin^2\varphi) + \Pi^2(\cos^2 i \cos^2\varphi + 4\sin^2 i).$$

Elle est certainement positive, c'est-à-dire du signe de son premier terme, pour des valeurs très grandes de A ainsi que pour $A = 0$. Pour qu'elle puisse être négative, il faut d'abord que le trinome de A ait des racines, ce qui fournit la condition

$$\Pi^2[\cos^2 i(1 + \sin^2\varphi)^2 - \cos^2\varphi(\cos^2 i \cos^2\varphi + 4\sin^2 i)] > 0.$$

Après réduction, cette condition devient

$$4(\sin^2\varphi \cos^2 i - \cos^2\varphi \sin^2 i) = 4\sin(\varphi + i)\sin(\varphi - i) > 0.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $i > 0$, on voit donc qu'il faut satisfaire à la condition $i < \varphi$. Si le contraire avait lieu, $\frac{U}{y^2}$ serait toujours positif quel que soit A, de sorte qu'il n'y aurait aucun état d'équilibre possible.

Lorsque l'on a $i < \varphi$, le trinome $\frac{U}{r^2}$ a deux racines A_1 et $A_2 > A_1$ et ces racines sont toutes deux positives. Pour avoir un équilibre stable, il suffit de prendre pour A une valeur comprise entre A_1 et A_2. Il y aura donc en général une infinité d'équilibres possibles. Celui qui correspond à $A = A_1$ est appelé *équilibre limite supérieur* ou *état ébouleux*. Celui qui correspond à $A = A_2$ est de même appelé *équilibre limite supérieur*.

Les valeurs explicites de A_1 et A_2 sont d'ailleurs

$$\left\{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\right. = \frac{\Pi}{\cos^2\varphi}\left[\cos i(1+\sin^2\varphi) \mp \sqrt{4\sin(\varphi+i)\sin(\varphi-i)}\right].$$

Dans le cas particulier où l'on aurait $i = \varphi$, le radical de la parenthèse disparaît et l'on a

$$A_1 = A_2 = \frac{\Pi(1+\sin^2\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Les deux états d'équilibre limite sont confondus et un seul état d'équilibre est possible. Dans ce cas, l'état d'équilibre réel se trouve déterminé. Mais c'est le seul cas où il en soit ainsi.

Un autre cas particulier intéressant est celui où $i = 0$, la surface libre étant horizontale. On a alors

$$\left\{\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\right. = \frac{\Pi}{\cos^2\varphi}\left[1+\sin^2\varphi \mp 2\sin\varphi\right] = \Pi\frac{1\mp\sin\varphi}{1\pm\sin\varphi}.$$

A_1 est inférieur à Π et A_2 lui est supérieur. Si l'on suppose $\varphi = 30^\circ$ ou $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, on a

$$A_1 = \frac{\Pi}{3} \quad \text{et} \quad A_2 = 3\Pi.$$

L'écart de ces deux valeurs est donc considérable.

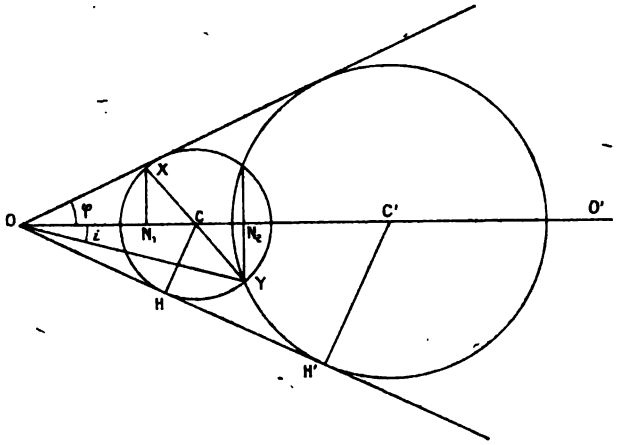
Les résultats obtenus par la discussion précédente peuvent se retrouver aisément au moyen de la construction graphique indiquée au Chapitre XX. On connaît *a priori* les tensions

$$N_2 = +\Pi y\cos i, \qquad T_3 = -\Pi y\sin i,$$

qui s'exercent sur un élément plan parallèle à Ox, à la profondeur y. La tension totale qui s'exerce sur cet élément est verticale

et fait avec Oy un angle $\theta = i$. Prenons sur une droite indéfinie OO′ une longueur $ON_2 = N_2$ en valeur absolue et élevons la perpendiculaire $N_2Y = T_3$, l'angle $\widehat{N_2OY}$ étant égal à $\theta = i$. Puis

Fig. 195.



supposons arbitrairement un centre C sur OO′ et décrivons le cercle ayant comme rayon CY. Nous en déduirons, en prolongeant CY jusqu'en X et en abaissant XN_1 perpendiculaire sur OO′, les tensions $ON_1 = N_1$ et N_1X qui s'exerceraient sur l'élément plan parallèle à Oy, la tension totale étant OX, et faisant avec Ox l'angle $\widehat{NOX}$, de sens contraire à $\widehat{N_2OY}$. On en déduirait les tensions sur un élément plan d'orientation quelconque.

Le maximum de l'angle θ s'obtiendrait en menant du point O les tangentes au cercle, l'une d'elles étant par exemple OH.

Pour qu'il y ait équilibre stable, il faut que l'angle O′OH soit inférieur à φ. Cela est impossible, quel que soit le point C choisi, si l'on a $i > \varphi$. Admettons qu'il en soit autrement, et traçons la droite OH telle que l'angle $O'OH = \varphi$. Puis déterminons les deux cercles de centres C et C′ qui passent par le point Y et sont tangents à OH. Ces deux cercles correspondront aux deux états d'équilibre limites. Pour tout cercle dont le centre serait compris entre C et C′ on aurait un équilibre stable, puisque ce cercle ne couperait pas OH. Pour tout autre cercle, au contraire, on aurait

un équilibre instable, puisqu'il couperait OH et que le maximum de l'angle θ dépasserait φ.

Les deux cercles limites C et C′ détermineront en particulier les valeurs extrêmes attribuables à N_1 et ils pourront faire connaître toutes les circonstances relatives aux équilibres limites, notamment les directions principales et les directions de rupture correspondant à chacun de ces équilibres limites.

Deuxième cas. — *Terre cohérente.* — Le type des terres cohérentes est l'argile plus ou moins mélangée de sable, comme celle que l'on emploie dans la construction des digues en terre.

Une motte de terre argileuse ne se désagrège pas sans que l'on exerce sur elle un effort très appréciable, traction ou effort de cisaillement.

Toutefois, la résistance à la rupture par traction peut tomber à un taux très faible dans certaines circonstances, et notamment sous l'influence de l'humidité. Il est prudent de ne pas compter sur elle et on la suppose nulle.

Au contraire, la résistance à la rupture par cisaillement peut demeurer assez forte dans toutes les circonstances de siccité ou d'imbibition, tout en étant naturellement variable avec ces circonstances. Pour une nature donnée de terre, il y a un certain minimum C par mètre carré sur lequel il semble qu'on puisse compter et qui est du même ordre de grandeur que le poids Π de la terre par mètre cube.

Dans ces circonstances, les équilibres stables correspondront à la condition

$$\max. |T| - |N \operatorname{tang}\varphi| \leq C,$$

qui a été étudiée au Chapitre XX.

Cette condition, mise sous une forme plus explicite, s'écrit, *en regardant les compressions comme positives*,

$$(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2 - [(N_1 + N_2)\sin\varphi + 2C\cos\varphi]^2 \leq 0.$$

C'est la condition dite « de Coulomb ».

Dans le cas actuel, il n'est pas nécessaire que l'on ait $N_1 = 0$ pour $y = 0$. Pour cette valeur de y, on a

$$N_2 = T_3 = 0,$$

et la condition impose seulement que l'on ait

$$N_1(1 - \sin\varphi) - 2\cos\varphi \leqq 0$$

ou

$$N_1 \leqq \frac{2C\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}.$$

Toutefois, comme on n'observe jamais de fortes pressions à la surface d'un sol quelconque, nous admettrons, pour simplifier, que N_1 soit comme précédemment de la forme $N_1 = Ay$.

Si, dans l'inégalité ci-dessus, on remplace les composantes des tensions par leurs valeurs, elle s'écrira

$$\begin{aligned} U = y^2[(A - \Pi\cos i)^2 + 4\Pi^2\sin^2 i - (A + \Pi\cos i)^2\sin^2\varphi] \\ - 4yC\sin\varphi\cos\varphi(A + \Pi\cos i) - 4C^2\cos^2\varphi \leqq 0. \end{aligned}$$

Cette fois, la condition trouvée dépend de la profondeur y. Elle est toujours satisfaite pour de très petites valeurs de y, c'est-à-dire pour une couche plus ou moins profonde à partir de la surface, quelle que soit la valeur attribuée à A, car pour $y = 0$ on a simplement

$$U = -4C^2\cos^2\varphi < 0.$$

Mais il faut s'attendre à ce que certaines valeurs de A soient incompatibles avec les valeurs données de i, φ, Π, C lorsque la profondeur y dépassera certaines limites.

Recherchons d'abord sous quelles conditions un massif indéfini en profondeur peut être en équilibre stable.

Il faut que U reste négatif ou nul, quelle que soit la valeur de y. Cela exige tout d'abord que le coefficient du terme en y^2 soit négatif. Or ce coefficient n'est pas autre chose que le trinome déjà étudié, à propos du massif pulvérulent. Nous avons vu qu'il demeure positif, quel que soit A, lorsque l'on a $i > \varphi$. Une première condition nécessaire est donc que l'on ait $i < \varphi$.

Nous avons vu aussi que, dans ce cas, le trinome a deux racines en A positives, que nous avons désignées par A_1 et A_2. Pour qu'il soit négatif, il faut donc que A reste compris entre ces racines.

D'ailleurs, si cela a lieu, l'équation $U = 0$, considérée comme équation du second degré en y, ne peut avoir de racines positives, car la somme de ces racines, quand elles existent, ne peut être que

négative, tandis que leur produit est positif. Lorsque y varie de 0 à $+\infty$, on a donc toujours $U < 0$.

Les conditions trouvées sont donc exactement les mêmes que pour un massif pulvérulent. Il faut que $i < \varphi$ et que $A_1 < A < A_2$. Elles sont indépendantes de C, puisque A_1 et A_2 n'en dépendent pas. Cela eût d'ailleurs pu être prévu *a priori*, car à l'infini toutes les tensions deviennent infinies, avec y, et la condition de stabilité doit être indépendante de la valeur finie attribuée à C. Elle est remplacée par une condition asymptotique, celle qui convient à la terre pulvérulente.

Recherchons maintenant comment ces conclusions se modifient lorsque, au lieu de supposer que la stabilité de l'équilibre est nécessaire à toute profondeur, on suppose qu'elle est nécessaire seulement jusqu'à une profondeur limitée donnée y', c'est-à-dire lorsque y varie entre zéro et cette profondeur donnée y'.

Pour cela, cherchons d'abord d'une manière générale quelles conditions A doit remplir pour que, à la profondeur y, on ait $U \leqq 0$.

Ordonnons U par rapport à A. On trouve

$$\begin{aligned} U = {} & A^2 y^2 \cos^2\varphi - 2A\,[\Pi y^2 \cos i\,(1 + \sin^2\varphi) + 2Cy \sin\varphi \cos\varphi] \\ & + \Pi^2 y^2 (\cos^2 i \cos^2\varphi + 4 \sin^2 i) - 4\Pi C y \cos i \sin\varphi \cos\varphi - 4C^2 \cos^2\varphi. \end{aligned}$$

L'étude du trinome U repose principalement sur celle de son discriminant Δ, qui, à un facteur $4y^2$ près, est

$$\begin{aligned} \Delta = {} & [\Pi y \cos i\,(1 + \sin^2\varphi) + 2C \sin\varphi \cos\varphi]^2 \\ & - \cos^2\varphi\,[y^2(\cos^2 i \cos^2\varphi + 4 \sin^2 i) - 4\Pi C y \cos i \sin\varphi \cos\varphi - 4C^2 \cos^2\varphi]. \end{aligned}$$

En l'ordonnant par rapport à y, on trouve :

1° Pour le terme en y^2, le résultat déjà trouvé pour les corps pulvérulents, savoir :

$$4\Pi^2 y^2 \sin(\varphi + i) \sin(\varphi - i);$$

2° Pour le terme en y :

$$\begin{aligned} 4\Pi C y \cos i \sin\varphi \cos\varphi (1 + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) &= 8\Pi C y \cos i \sin\varphi \cos\varphi \\ &= 4\Pi C y \cos\varphi\,[\sin(\varphi + i) + \sin(\varphi - i)]; \end{aligned}$$

3° Pour le terme tout connu :

$$4C^2\cos^2\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=4C^2\cos^2\varphi.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta&=4H^2y^2\sin(\varphi+i)\sin(\varphi-i)+4HCy\cos\varphi[\sin(\varphi+i)+\sin(\varphi-i)]+4C^2\cos^2\varphi\\&=4[Hy\sin(\varphi+i)+C\cos\varphi][Hy\sin(\varphi-i)+C\cos\varphi].\end{aligned}$$

Quand on se borne à envisager des valeurs positives pour i et des valeurs positives pour y, le signe de Δ ne dépend que de celui du dernier facteur, c'est-à-dire des valeurs respectives de y et de la racine

$$y_1=\frac{-C\cos\varphi}{H\sin(\varphi-i)}$$

de ce dernier facteur.

Cela posé, nous distinguerons encore deux cas suivant le signe de $\varphi-i$:

a. Supposons $i<\varphi$. La racine y_1 est négative. Par suite, pour toute valeur y comprise entre o et une valeur positive donnée telle que y', on aura $\Delta>0$, et par suite le trinome U aura deux racines réelles et distinctes A'_1 et A'_2. L'intervalle de ces racines contiendra toujours les deux valeurs positives A_1 et A_2 que l'on obtiendrait pour le cas de $y'=\infty$, et qui ne sont autres que les racines de l'équation $U=0$ privée de ses termes en C. La substitution de A_1 (ou de A_2) dans l'équation complète fournit en effet, comme résultat,

$$-4Cy\sin\varphi\cos\varphi(A_1+H\cos i)-4C^2\cos^2\varphi<0.$$

Supposons $A'_2>A'_1$ et considérons le minimum A''_2 de A'_2 et le maximum A''_1 de A'_1 lorsque y varie de o à y', minimum et maximum généralement atteints pour $y=y'$, l'intervalle $A'_2A''_2$ contiendra encore l'intervalle A_1A_2. Si donc on choisit une valeur quelconque de A comprise entre A''_1 et A''_2, on aura, pour toute valeur $y<y'$, l'inégalité $U<0$. Autrement dit, l'équilibre sera assuré jusqu'à la profondeur y'.

Toutefois, parmi ces valeurs admissibles pour A, on ne retiendra que les valeurs positives, puisqu'on suppose la terre incapable d'efforts de traction.

Il est facile de s'assurer directement que l'une au moins des

racines A'_1 et A'_2 est positive, puisque leur somme a le signe de

$$\Pi y^2 \cos i (1 + \sin^2\varphi) + 2Cy \sin\varphi \cos\varphi,$$

quantité essentiellement positive. D'ailleurs, A'_1 et A'_2 encadrent l'intervalle $A_1 A_2$, et ces dernières quantités sont positives.

b. Supposons maintenant $i > \varphi$. Alors, la racine y_1 devient positive.

Pour toute valeur positive de y comprise entre o et y_1, on a encore $\Delta > 0$, et par suite le trinome en U a encore deux racines réelles A'_1 et A'_2, comme précédemment, et l'une d'elles au moins est positive. On trouvera donc deux limites entre lesquelles on peut faire varier A, sans cesser d'avoir un équilibre stable.

Mais si la valeur y' assignée à la profondeur du massif dépasse y_1, pour toutes les valeurs de y comprises entre y_1 et y', on aura $\Delta < 0$. Alors U n'aura pas de racines réelles et demeurera toujours du signe de son premier terme, c'est-à-dire positif, quelle que soit la valeur assignée à A. Il n'y aura pas d'équilibre stable possible pour la couche de profondeur supérieure à y_1.

Cette profondeur y_1 apparaît donc dans ce cas comme l'*épaisseur limite* qu'il est possible d'attribuer au massif quand il est constitué par de la terre répondant aux valeurs de φ et de C qui ont été supposées.

Il est utile d'observer que, pour $y' = y_1$, les deux racines A'_1 et A'_2 sont égales puisque alors $\Delta = 0$. Leur valeur commune est

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cos^2\varphi}\left[\Pi \cos i (1 + \sin^2\varphi) + \frac{2C}{y_1}\sin\varphi\cos\varphi\right] \\ &= \frac{\Pi}{\cos\varphi}[\cos i \cos\varphi + 2\sin i \sin\varphi]. \end{aligned}$$

Dans ce cas, il y a un seul état d'équilibre possible sur toute la profondeur y_1, et il détermine l'état réel, au moins avec les hypothèses admises.

Supposons, en particulier, $i = \varphi$. La profondeur limite y_1 devient infinie. Si l'on suppose le massif infini en profondeur et partout en équilibre, la valeur de A est

$$A = \frac{\Pi}{\cos\varphi}[\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi] = \frac{\Pi}{\cos\varphi}(1 + \sin^2\varphi) = A_1 = A_2.$$

Supposons $i = \frac{\pi}{2}$, en tenant encore comme applicable la théorie précédente. La profondeur limite serait.

$$y_1 = -\frac{C}{\Pi}.$$

Telle serait l'épaisseur maxima que l'on pourrait attribuer à un revêtement ou à un enduit fait avec la terre considérée sur une paroi verticale. Pour un enduit ayant cette épaisseur, on aurait

$$A = \frac{2\Pi \sin\varphi}{\cos\varphi} = 2\Pi \operatorname{tang}\varphi.$$

Examinons encore en terminant le cas de $i = 0$. Dans ce cas, Δ devient un carré parfait et sa racine est, en rétablissant le facteur $4y^2$,

$$4[\Pi y \sin\varphi + C\cos\varphi]y.$$

Par suite, les racines du trinome en A sont

$$\left.\begin{matrix} A'_2 \\ A'_1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{y^2\cos^2\varphi}[\Pi y^2(1+\sin^2\varphi) + 2Cy\sin\varphi\cos\varphi \pm 2y(\Pi y\sin\varphi + C\cos\varphi)],$$

ou encore

$$A'_2 = \frac{1}{1-\sin\varphi}\left[\Pi(1+\sin\varphi) + \frac{2C}{y}\cos\varphi\right] \qquad \text{(équilibre supérieur)},$$

$$A'_1 = \frac{1}{1+\sin\varphi}\left[\Pi(1-\sin\varphi) - \frac{2C}{y}\cos\varphi\right] \qquad \text{(équilibre inférieur)}.$$

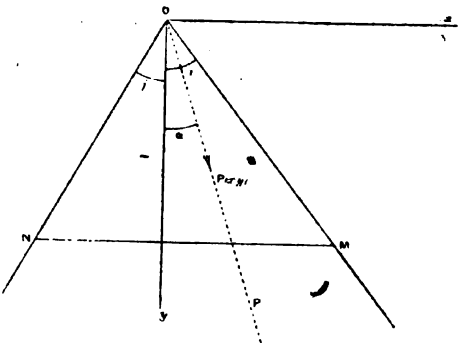
État d'équilibre d'un massif triangulaire indéfini, c'est-à-dire compris entre deux talus plans, quand les forces extérieures sur chacun de ces talus sont parallèles entre elles et proportionnelles aux distances du sommet à leur point d'application. — Soient OM et ON les deux talus faisant, avec la verticale Oy, des angles i et j que nous compterons positivement, l'un de Oy vers Ox, l'autre de Oy vers Ox', et soient

$$\operatorname{tang} i = m, \qquad \operatorname{tang} j = n.$$

Dans les conditions de charges supposées, la situation d'un point $P(x, y)$ sur une droite telle que OP définie par l'angle α qu'elle fait avec Oy, ne diffère de celle d'un autre point P', pris

sur la même droite, que par un simple changement dans l'échelle des longueurs, deux figures quelconques homothétiques par rap-

Fig. 196.



port au point O pouvant se déduire l'une de l'autre par la considération de leur rapport d'homothétie, tout au moins en ce qui concerne les distances et les charges appliquées et, par suite aussi, les tensions intérieures.

Sur un élément plan *d'orientation donnée* passant par le point P, la tension aura donc une expression de la forme

$$F = \rho f(\alpha),$$

ρ désignant la distance OP. Les conséquences suivantes s'en déduisent.

Considérons d'abord la fonction $F = N_1 + N_2$. S'il s'agit bien d'un équilibre élastique, cette fonction doit satisfaire à la condition

$$\Delta F = 0.$$

Or, en coordonnées polaires, en tenant compte des relations

$$x = \rho \sin\alpha, \quad y = \rho \cos\alpha,$$

cette équation devient, comme l'on sait,

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} = \frac{d^2F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0.$$

Pour une fonction F de la forme considérée, on a

$$\frac{dF}{d\rho} = f(\alpha), \qquad \frac{d^2F}{d\rho^2} = 0, \qquad \frac{d^2F}{d\alpha^2} = \rho\frac{d^2f}{d\alpha^2}.$$

La condition se réduit donc à

$$\frac{1}{\rho}\left(f + \frac{d^2f}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

de sorte que la fonction $f(\alpha)$ doit être de la forme

$$f = A\sin\alpha + B\cos\alpha,$$

A et B étant des constantes. Autrement dit, la fonction F est de la forme

$$F = A\rho\sin\alpha + B\rho\cos\alpha = Ax + By,$$

c'est-à-dire une fonction linéaire et homogène en x et y. Autrement dit, $N_1 + N_2$ doit avoir cette forme.

D'un autre côté, considérons les équations indéfinies d'équilibre, savoir :

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} = 0,$$
$$\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} - \Pi = 0.$$

(Nous écrivons Π avec le signe — afin de considérer les compressions comme des quantités positives.)

En différentiant la première équation par rapport à x, la seconde par rapport à y, et en les retranchant, on obtient

$$\frac{d^2N_1}{dx^2} - \frac{d^2N_2}{dy^2} = 0.$$

Comme on a identiquement

$$2N_1 = (N_1 + N_2) + (N_1 - N_2),$$
$$2N_2 = (N_1 + N_2) - (N_1 - N_2),$$

on en déduit

$$\Delta(N_1 - N_2) = \frac{d^2(N_1 + N_2)}{dy^2} - \frac{d^2(N_1 + N_2)}{dx^2}.$$

Les deux dérivées secondes de $N_1 + N_2$ étant nulles, il en est de même de $\Delta(N_1 - N_2)$, de sorte que $N_1 - N_2$ est, comme $N_1 + N_2$,

une fonction linéaire et homogène en x et y. Il en est de même pour N_1 et N_2 séparément.

En différentiant la première équation d'équilibre par rapport à y et la seconde par rapport à x, et en les ajoutant, on obtient, d'autre part,

$$-\Delta T_3 = \frac{d^2 N_1}{dx\,dy} + \frac{d^2 N_2}{dx\,dy} = \frac{d^2(N_1 + N_2)}{dx\,dy}.$$

La même conclusion s'impose donc à l'égard de T_3.

La solution ne peut donc être qu'une solution linéaire et homogène de la forme

$$\begin{aligned} N_1 &= a_1 x + b_1 y, \\ N_2 &= a_2 x + b_2 y, \\ T_3 &= cx + dy. \end{aligned}$$

Les constantes c et d ne sont pas indépendantes, car il faut satisfaire aux deux équations indéfinies d'équilibre.

Il en résulte

$$\begin{aligned} a_1 + d &= 0, \\ c + b_2 &= \Pi, \end{aligned}$$

et par suite l'expression de T_3 est

$$T_3 = (\Pi - b_2)x - a_1 y.$$

Pour achever de déterminer la solution, il faut satisfaire aux conditions à la surface, c'est-à-dire sur les deux talus.

Si l'on considère un élément plan appartenant à l'un de ces talus, la solution linéaire et homogène qui vient d'être obtenue conduira, pour les deux composantes X et Y de la tension sur cet élément, à deux expressions de la forme

$$\begin{aligned} X &= Ax + By, \\ Y &= Cx + Dy, \end{aligned}$$

les quatre coefficients A, B, C, D étant des fonctions linéaires des quatre constantes a_1, b_1, a_2, b_2, et d'autre part x et y étant proportionnels à la distance ρ du point (x, y) au sommet. Comme, par hypothèse, X et Y sont précisément proportionnels à ρ, l'identification aura lieu quel que soit ρ et conduira à deux équations linéaires, fournissant deux conditions auxquelles les quatre constantes a_1, b_1, a_2, b_2 doivent satisfaire.

On en aurait deux autres semblables en considérant l'autre talus, de sorte que les quatre constantes seront déterminées et que la solution sera complète.

Cette solution est même la seule possible, du moins c'est la seule solution élastique possible pour le massif indéfini considéré.

Il faut remarquer que toutes les tensions deviennent infinies quand x ou y, ou ρ, deviennent infinis. Les réactions à l'infini doivent donc être supposées également infinies, et sous cette seule réserve elles sont indifférentes.

Si, au lieu d'un massif indéfini en hauteur, on considère un massif limité par un plan horizontal, tel que MN, on pourra encore utiliser la solution obtenue, mais à condition toutefois que la répartition des réactions extérieures sur ce plan de base, *qui fait partie de la surface du massif*, puisse être conforme à la loi linéaire déduite de la solution elle-même. Cela exigera que les déformations de la base puissent être égales à celles que l'on obtiendrait dans le massif indéfini. Il y a là une hypothèse supplémentaire qu'il faut admettre et qui pourra se trouver en défaut lorsque le massif et le sol de fondation auront des propriétés élastiques très différentes. On aura donc à apprécier, en définitive, la convenance de l'hypothèse initiale d'après laquelle des massifs homothétiques se comportent d'une manière semblable.

Quand l'angle au sommet $i+j$ est relativement petit et que la surface de base est petite relativement à la hauteur, il paraîtra généralement naturel de supposer que la composante N_2 varie linéairement sur la base du massif, au moins à titre d'approximation. C'est là, au fond, l'hypothèse de la *résistance des matériaux* que vient compléter seulement, dans ses conséquences, la théorie de l'Élasticité.

Remarque. — Au lieu de prendre, pour N_1, N_2, T_3, des expressions linéaires et homogènes en x et y, on pourrait envisager des expressions linéaires seulement, c'est-à-dire ajouter des constantes arbitraires. Cette solution, qui satisfait encore aux équations générales d'équilibre et à la condition $\Delta(N_1 + N_2) = 0$, conviendrait au cas où les composantes X et Y des forces extérieures sur les deux parements seraient de la forme $Ay + B$, au lieu d'être de la forme Ay. Toutefois, pour que l'identification soit possible, les

quatre coefficients tels que B ne peuvent être tous arbitraires, il doit y avoir entre eux une relation. Nous n'insisterons pas sur cette extension du problème, qui peut offrir certaines ressources.

Application aux massifs triangulaires en maçonnerie ayant un parement libre OM et un second parement ON, soit libre, soit soumis à une pression hydrostatique sur toute sa hauteur. — Pour un massif indéfini, ce n'est évidemment qu'un cas particulier du problème précédent, la proportionnalité des forces appliquées aux distances comptées à partir du sommet étant réalisée sur les deux talus. Pour un massif de hauteur limitée, on admettra que la solution reste applicable à titre d'approximation, pour la raison donnée plus haut, de sorte que ce massif limité sera considéré comme une partie du massif indéfini. On pourra alors le matérialiser, c'est-à-dire cesser de le considérer comme une matière idéale capable de supporter des efforts de grandeur infinie, et rechercher les régions dans lesquelles les efforts peuvent demeurer compatibles avec la nature de la matière envisagée.

Ceci bien entendu, reprenons la détermination des coefficients $a_1 b_1$, $a_2 b_2$.

Pour le talus OM, on a $X = Y = 0$. La normale, dirigée vers l'intérieur, fait d'ailleurs avec Ox un angle égal à $-i+\pi$, de sorte que les équations à la surface s'écrivent, en désignant par $\cos i$

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} N_1 - T_2 m = 0, \\ T_2 - N_2 m = 0, \end{array} \right. \qquad \text{d'où} \qquad N_1 = N_2 m^2.$$

Développons la seconde et la troisième équation, en tenant compte de ce que $T_2 = (\Pi - b_2)x - a_1 y$ et de ce que $x = my$, nous aurons, en supprimant le facteur y,

$$(1') \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 m^2 + 2 b_2 m = \Pi m, \\ a_1 m + b_1 - (a_2 m + b_2) m^2 = 0. \end{array} \right.$$

Pour le talus ON, nous aurons des équations toutes semblables en remplaçant m par $-n$, si ce talus est libre. S'il supporte une pression hydrostatique F, celle-ci aura pour valeur Ky, en désignant par K le poids de l'unité de volume de l'eau. Elle est d'ailleurs normale au talus, et cette normale fait avec Ox un angle égal à j.

On a donc

$$X = F\cos j = Ky\cos j, \qquad Y = F\sin j = Ky\sin j,$$

et les équations à la surface s'écrivent

$$F\cos j = N_1\cos j + T_3\sin j,$$
$$F\sin j = T_3\cos j + N_2\sin j.$$

On peut les remplacer par

$$(2) \qquad \begin{cases} T_3 = (F - N_2)n, \\ N_1 = F + (N_2 - F)n^2. \end{cases}$$

Développons-les en tenant compte encore de la valeur de T_3 et de ce que cette fois $x = -ny$, nous obtiendrons, en supprimant le facteur y,

$$(2') \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 n^2 - 2b_2 n = -\Pi n - Kn, \\ -a_1 n + b_1 - (-a_2 n + b_2)n^2 = K(1 - n^2). \end{cases}$$

Le système des équations (1′) et (2′) n'est pas difficile à résoudre. On éliminera, par exemple, a_1 et b_1, et les inconnues restantes a_2 et b_2 seront données par les deux équations

$$a_2(m^2 - n^2) + 2b_2(m + n) = \Pi(m + n) + Kn,$$
$$2a_2(m^2 + n^2) + 3b_2(m^2 - n^2) = \Pi(m^2 - n^2) + K(1 - 2n^2).$$

On peut remarquer en passant que ces deux équations, à des facteurs constants près, s'obtiendraient directement en suivant la méthode usuelle de la Résistance des matériaux, c'est-à-dire en évaluant, pour une section horizontale quelconque, l'effort normal, ainsi que le moment par rapport au point situé sur l'axe Oy. On aurait à les égaler respectivement aux intégrales

$$\int (a_2 x + b_2 y)\,dx \quad \text{et} \quad \int (a_2 x + b_2 y)x\,dx$$

appliquées à toute la section.

On trouve finalement les expressions suivantes :

$$a_1 = \frac{\Pi}{(m+n)^2} mn(m-n) + \frac{K}{(m+n)^3} mn(mn - m^2 - 2),$$
$$b_1 = \frac{\Pi}{(m+n)^2} 2m^2n^2 - \frac{K}{(m+n)^3} m^2(2mn^2 - 3n - m),$$
$$a_2 = -\frac{\Pi}{(m+n)^2}(m-n) - \frac{K}{(m+n)^3}(n^2 + 3mn - 2),$$
$$b_2 = \frac{\Pi}{(m+n)^2}(m^2 + n^2) - \frac{K}{(m+n)^3}(m - n - 2m^2n).$$

Il suffit évidemment de faire $K = 0$ dans ces expressions pour obtenir celles qui se rapportent au cas d'un réservoir vide.

Le problème, dans ce qu'il a d'essentiel et de général, se trouve entièrement résolu par ce qui précède. Dans un cas particulier quelconque, m, n, Π, K étant connus, on connaîtra en tout point du massif les trois tensions N_1, N_2, T_3, d'où toutes les autres circonstances dépendent. On pourra donc faire toutes les vérifications numériques utiles.

En pratique, il suffit de calculer, pour une valeur donnée de y, les valeurs de N_2 sur chacun des talus. Les valeurs correspondantes de N_1 et T_3 s'en déduisent au moyen des équations (1) et (2). On peut ensuite déterminer les trois tensions en un point intermédiaire quelconque, puisque l'on sait qu'elles varient linéairement.

On trouve facilement pour N_2 les valeurs suivantes pour les deux talus :

1° Talus d'aval :

$$N_2 = y(\quad a_2 m + b_2) = y\left[\frac{\Pi n}{m+n} + K\frac{(1-mn)}{(m+n)^2}\right];$$

2° Talus d'amont :

$$N_2 = y(-a_2 n + b_2) = y\left\{\frac{\Pi m}{m+n} + K\left[1 - \frac{1+m^2}{(m+n)^2}\right]\right\}.$$

Pour le cas du réservoir vide, il faut faire $K = 0$.

En un point du talus libre, on a des relations analogues à (1). Il est d'ailleurs évident que la compression nulle qui s'exerce à la surface est une compression principale. L'autre compression principale s'exercera sur le plan normal au talus. Sa valeur est

$$a = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2} = N_2(1 + m^2).$$

En un point d'un talus chargé, on a les relations (2). Il est d'ailleurs évident que la pression hydrostatique F, étant normale à la surface, est encore une compression principale, et que l'autre compression principale s'exercera encore sur le plan perpendicu-

laire au talus. Les relations (2) conduisent à

$$N_1 + N_2 = F(1 - n^2) + N_2(1 + n^2),$$
$$N_1 - N_2 = (F - N_2)(1 - n^2),$$
$$\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2} = \pm(N_2 - F)(1 + n^2).$$

Il faut prendre le signe + ou le signe — dans le second membre de la dernière relation, suivant que N_2 est supérieur ou inférieur à F. Dans le premier cas, la valeur de la plus petite compression b est égale à F, et la compression sur le plan perpendiculaire est la compression maxima, donnée par la formule

$$a = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2} = N_2(1 + n^2) - Fn^2.$$

Dans le second cas, au contraire, F serait la plus grande compression, et l'expression précédente fournirait la valeur de la compression minima.

Conditions générales de résistance indépendantes de la hauteur du massif. — Il convient de distinguer le cas du réservoir vide de celui du réservoir plein.

1° *Réservoir vide.* — La seule condition générale est qu'il n'y ait nulle part d'effort de traction dans le massif. On s'assure facilement qu'elle est toujours remplie.

D'abord, en un point du parement aval, à la profondeur de y, on a

$$N_2 = \Pi y \frac{n}{m+n} > 0, \qquad \text{d'où} \qquad N_1 = N_2 m^2 > 0.$$

En un point du parement amont, on aurait de même

$$N_2 = \Pi y \frac{m}{m+n} > 0, \qquad \text{d'où} \qquad N_1 = N_2 n^2 > 0.$$

Il en résulte qu'en tout point intérieur on aura $N_1 > 0$, $N_2 > 0$.

Dans ces conditions, les compressions principales sont positives, l'une d'elles s'annulant sur les parements, par hypothèse.

2° *Réservoir plein.* — Il faut tout d'abord satisfaire à la même condition générale que ci-dessus :

Sur le parement d'aval, à la profondeur y, on a

$$N_2 = y\left[\frac{\Pi n}{m+n} + K\frac{(1-mn)}{(m+n)^2}\right],$$

d'où la condition

$$\Pi n(m+n) + K(1-mn) > 0.$$

Si elle est remplie, on aura évidemment $N_1 > 0$.

Sur le parement d'amont on devra avoir de même $N_2 > 0$.

Mais cette condition ne suffit pas.

Dans le cas où l'on aurait $N_2 < F$, nous avons vu en effet que l'on aurait

$$b = N_2(1+n^2) - Fn^2.$$

Il faudrait donc encore écrire cette condition plus rigoureuse :

$$N_2 \geqq F\frac{n^2}{1+n^2}.$$

C'est d'ailleurs là la condition suffisante pour que l'on ait $b \geqq 0$ dans tout l'intérieur du massif, en supposant remplie celle qui a été écrite pour le parement d'aval.

Mais il y a une autre condition plus rigoureuse encore à s'imposer sur ce parement, et sur laquelle divers auteurs ont insisté avec raison. Il est essentiel qu'en cas de fissures accidentelles passant par une horizontale du parement on se mette à l'abri des troubles qui résulteraient des sous-pressions. La sous-pression n'est pas, en effet, une réaction progressive et variable comme celle du sol de fondation. C'est une pression effective atteignant la valeur F, dont elle est susceptible, dans toute la profondeur de la fissure. Si donc dans le plan de celle-ci on avait $N < F$, tout se passerait comme si l'on introduisait dans ce plan, et après coup, des efforts égaux à la différence entre F et N. Il faudrait donc, et cela pour diverses orientations du plan de fissuration, reconnaître la gravité du trouble apporté, et déterminer les limites des fissurations possibles. Il faudrait aussi s'assurer qu'il n'y a pas de danger de cisaillement ou de glissement suivant le plan fissuré. Tout cela ne laisserait pas d'être assez compliqué et assez incertain. Si l'on a, au contraire, $N > F$, rien n'est changé aux conditions d'équilibre, même en cas de fissure réelle.

D'autre part, on connaît les inconvénients pratiques des fissures

qui s'ouvrent et se referment suivant certaines circonstances. Lorsqu'elles sont ouvertes, il s'y introduit des matières étrangères qui les empêchent ensuite de se refermer complètement. Dans le cas actuel, cela ne présente pas sans doute le même danger que lorsqu'il s'agit des fissures de dilatation des murs courbes. Il n'en est pas moins utile d'éviter cette nouvelle cause de perturbation.

La condition qui en résulte se traduit par l'inégalité

$$N \geqq F$$

pour toutes les directions autour d'un point du parement. Mais si l'on observe que F est toujours une des compressions principales, cette inégalité peut se remplacer par cette autre

$$N_2 \geqq F$$

qui est plus rigoureuse que celles précédemment rencontrées pour le même parement d'amont.

En développant cette dernière condition, et supprimant le facteur y, on trouve

$$\frac{\Pi m}{m+n} - K\frac{(1+m^2)}{(m+n)^2} \geqq 0$$

ou encore

$$\Pi m(m+n) - K(1+m^2) \geqq 0. \tag{5}$$

Si on la compare à celle qui a été écrite plus haut pour le talus d'aval, savoir :

$$\Pi n(m+n) - K(mn-1) \geqq 0,$$

on voit facilement qu'elle est plus rigoureuse que cette dernière, car on a toujours

$$\frac{1+m^2}{m} > \frac{mn-1}{n} \quad \text{ou} \quad m + \frac{1}{m} > m - \frac{1}{n}.$$

Elle peut donc être conservée seule.

En définitive, l'inégalité (5) assure, quand elle est remplie, qu'il n'y a nulle part d'efforts de traction dans le massif, pas plus en charge qu'à vide, et en outre qu'il n'y aura pas de sous-pression à redouter.

Il est bien évident qu'elle peut être remplie par une infinité de

valeurs simultanées de m et de n, et, si on la met sous la forme

$$(\Pi - K)m^2 + \Pi mn - K \geqq 0,$$

on reconnaît que si elle est satisfaite par un groupe de valeurs positives m et n, elle le sera *a fortiori* par tout autre groupe de valeurs plus grandes, car $\Pi - K$ est toujours positif.

Cela posé, occupons-nous du cas limite où l'on se proposerait d'obtenir exactement $N_2 = F$ sur le parement d'amont, c'est-à-dire de construire un mur strictement à l'abri des sous-pressions. Il faudrait transformer l'inégalité (5) en égalité.

On peut rendre le problème déterminé en s'imposant une seconde condition, et il est tout naturel de songer à la combinaison qui rendrait $m + n$ minimum, c'est-à-dire qui correspondrait au plus faible volume de maçonnerie.

Cette condition conduit alors à rendre minimum la quantité $\frac{1 + m^2}{m} = m + \frac{1}{m}$, c'est-à-dire à prendre $m = 1$. On en déduit pour n la valeur

$$n = 2 - \frac{\Pi}{K}.$$

Lorsque $\frac{\Pi}{K} > 2$, ainsi que cela arrive d'ordinaire pour les maçonneries, cette dernière est inconciliable avec les nécessités de construction, car on admettrait difficilement de faire $n < 0$. Mais la conclusion à en tirer c'est qu'il y a alors avantage à faire n aussi petit que possible et à lui attribuer, théoriquement au moins, la valeur $n = 0$.

Alors m se déterminera par la condition

$$m^2 = \frac{K}{\Pi - K},$$

et sera plus petit que l'unité puisque, par hypothèse, $K < \Pi - K$.

Pour $\frac{\Pi}{K} = 2,4$, chiffre habituel pour la maçonnerie, on trouve $m = 0,845$.

Il est bon de remarquer que, pour les murs en maçonnerie, la condition $1 - mn > 0$ est aussi généralement satisfaite.

L'égalité $1 - mn = 0$ supposerait que l'angle au sommet fût égal à un angle droit, ce qui est manifestement excessif. Il est rare

que cet angle dépasse 45° et au surplus n est généralement très petit, sinon rigoureusement nul.

Nous excluons provisoirement, dans ce qui suit, les digues en terre corroyée pour lesquelles le contraire a lieu.

Courbes d'égales compressions maxima. — Les conditions précédentes étant supposées satisfaites, c'est-à-dire les compressions étant supposées positives dans tout le massif, la compression maxima en un point $P(xy)$ est toujours donnée par la formule

$$a = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}.$$

En égalant cette expression à une constante R, on aura le lieu des points pour lesquels $a = R$.

Il est aisé de tracer cette courbe par points. On trouvera le point situé sur une demi-droite quelconque, telle que OP, définie par $\tang \omega = p$, en posant $x = py$, de sorte que

$$\begin{aligned} N_1 &= y[a_1 p + b_1] = yN'_1, \\ N_2 &= y[a_2 p + b_2] = yN'_2, \\ T_3 &= y[\ cp + d\ ] = yT'_3, \end{aligned}$$

et la valeur de y sera fournie par l'équation

$$y\left[N'_1 + N'_2 + \sqrt{(N'_1 - N'_2)^2 + 4T'^2_3}\right] = 2R.$$

La parenthèse, coefficient de y, étant toujours positive, la valeur de y sera toujours bien déterminée et positive. La courbe dont il s'agit traverse donc le massif de parement à parement. C'est d'ailleurs une branche d'hyperbole.

Pour déterminer les intersections avec les parements, on utilisera les relations qui donnent a en fonction de N_2, jointes aux formules qui fournissent la valeur de N_2.

Dans le cas du réservoir vide, on aura, pour le parement d'aval, l'équation

$$y\frac{\Pi(1 + m^2)n}{m + n} = R,$$

et pour le parement d'amont une équation semblable, obtenue en permutant m et n.

Dans le cas du réservoir plein, on aurait pour le parement d'aval l'équation

$$y\left[\frac{\Pi n}{m+n}+K\frac{(1-mn)}{(m+n)^2}\right](1+m^2)=R,$$

et pour le parement d'amont l'équation

$$y\left[\frac{\Pi m(1+n^2)}{m+n}-K\frac{(1-mn)^2}{(m+n)^2}\right]=R.$$

Si l'on a fait le tracé pour une valeur arbitraire R, toutes les courbes correspondant à d'autres valeurs de R seront, comme nous l'avons déjà remarqué, homothétiques à la première par rapport au sommet. On pourra donc notamment en déduire celle qui correspondrait à la valeur limite de R, c'est-à-dire à la limite admissible pour la résistance à la compression de la maçonnerie dont on veut faire usage. Si cette dernière courbe ne coupe pas le massif de hauteur limitée H que l'on a à construire, on aura toute sécurité. Sinon, il faudra, soit réduire la hauteur du massif, soit modifier dans un sens favorable les valeurs primitivement assignées à m et à n, soit enfin adopter pour la base du massif, en dehors de la courbe tracée, une maçonnerie plus soignée et plus résistante, conduisant pour R à une valeur plus grande, sans changer notablement la valeur de Π.

Courbes d'égaux cisaillements maxima. — En un point donné $P(xy)$, l'effort tangentiel T, ou cisaillement, a pour valeur maxima :

$$\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(N_1-N_2)^2+4T_3^2}.$$

En égalant cette expression à une constante C, on aura le lieu des points pour lesquels on a $\frac{a-b}{2}=C$. Ce lieu est encore une conique, mais cette fois du genre ellipse. Toutes ces courbes sont encore homothétiques, et, si l'on prend pour C la limite jugée admissible pour la maçonnerie, on aura la courbe, lieu des points pour lesquels le cisaillement atteint cette limite. La base du mur ne devra pas la couper, si l'on admet que c'est la valeur maxima de l'effort tangentiel qui crée le danger de rupture par cisaillement.

Mais M. Maurice Levy a fait observer que la condition ainsi posée est trop restrictive, en ce qu'elle ne tient aucun compte du frottement qui s'exerce entre les surfaces en contact et pressées l'une contre l'autre. Il suffit, pour écarter tout danger de rupture par cisaillement, que sur un élément plan quelconque la différence

$$|T| - |N \operatorname{tang} \varphi|$$

demeure plus petite que la limite C admissible pour le cisaillement des matériaux. L'angle φ est l'angle de frottement des matériaux sur eux-mêmes.

La quantité $|T| - |N \operatorname{tang} \varphi|$ peut s'appeler le *cisaillement effectif* dans la direction considérée autour du point $P(xy)$.

On sait que son maximum a pour expression

$$\frac{1}{2\cos\varphi}[(a-b)-(a+b)\sin\varphi]$$
$$= \frac{1}{2\cos\varphi}\left[\sqrt{(N_1-N_2)^2+4T^2}-(N_1+N_2)\sin\varphi\right].$$

Si on l'égale à une constante C, on aura le lieu des points pour lesquels le cisaillement effectif atteint cette valeur C. On pourra encore le construire point par point.

En développant, on verrait encore que ce lieu est une conique, du genre hyperbole, mais cette fois il n'est pas certain que pour toute direction donnée telle que OP, tracée dans l'intérieur du massif, on obtiendra un point d'intersection tel que y soit positif. Cela dépendra du signe de la parenthèse, qui formera le coefficient de y.

Mais on peut faire au sujet de ces nouvelles courbes une remarque générale importante. Leur équation peut se mettre sous la forme

$$a(1-\sin\varphi) - b(1+\sin\varphi) = 2C\cos\varphi$$

ou encore

$$a - b\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \frac{2C\cos\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

Si on la compare à l'équation de l'article précédent, savoir :

$$a = R.$$

on voit que, du moins en ce qui concerne sa branche utile, celle pour laquelle on aurait $y > 0$, les points de la nouvelle courbe

seront toujours au delà de ceux de la courbe $a = R$, pour laquelle on aurait

$$R = \frac{2C\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}.$$

Pour les parements libres, comme on a toujours $b = 0$, les points d'intersection avec les deux courbes seront confondus.

Pour des maçonneries, les valeurs limites admissibles pour R et C satisfont généralement à l'inégalité

$$R < \frac{2C\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}.$$

Lignes isostatiques. Lignes de glissement. — Nous croyons devoir, en terminant, ajouter quelques mots au sujet de ces lignes, bien que leur considération ait un intérêt plutôt théorique que pratique. Leur rôle principal paraît être, en effet, de faire entrevoir des modes de rupture possibles des massifs, tandis que les recherches des constructeurs tendent surtout à déterminer les conditions qui écartent les dangers de rupture.

Lorsqu'on a déterminé la courbe lieu des points du massif pour lesquels la compression maxima atteint la valeur limite R, que l'on considère comme dangereuse, cela ne veut pas dire, même si l'on ne s'est réservé aucune marge de sécurité, que la rupture s'ensuivra tout le long de cette courbe. La limite R n'est jamais qu'une sorte de moyenne, et il est permis de penser qu'il y aura seulement un point plus faible où la matière commencera par céder, tandis qu'aux points voisins la résistance demeurera suffisante. Dès lors, comment se propagera la rupture commencée? On ne le sait guère, mais il est assez vraisemblable qu'elle commencera tout au moins suivant le plan de compression maxima, lequel n'est nullement le plan tangent au lieu considéré. Le trouble ainsi apporté modifiera la répartition des efforts dans le reste du massif, et l'on ne sait pas *a priori* où se rencontrera le nouveau point le plus dangereux. Mais on fait une hypothèse plausible en supposant qu'il se trouvera au voisinage immédiat du premier point de rupture et dans la direction même où s'est effectuée cette première rupture. Dans ces conditions, la ligne de rupture serait la ligne partant du premier point et dont la tangente serait en chaque point dirigée suivant le plan de compression

maxima. Ce sera une ligne dite *isostatique*, ces lignes étant par définition telles que leur tangente soit en chaque point orientée suivant une des directions principales. Rappelons que ces lignes sont de deux espèces, suivant que l'on considère l'une ou l'autre des directions principales et qu'elles forment deux systèmes orthogonaux.

De la même façon, on admet généralement que la rupture par cisaillement ne s'effectue pas dans un massif en suivant la courbe lieu des points pour lesquels le cisaillement atteint sa valeur limite C considérée comme dangereuse, mais bien suivant une courbe telle qu'en chaque point sa tangente soit dirigée suivant le plan de cisaillement maximum. Ce sont ces dernières courbes qu'on appelle courbes *de glissement*.

Si l'on envisage le cisaillement pur et simple, on sait que les directions suivant lesquelles ce cisaillement est maximum sont orientées à 45° sur les directions principales. Les lignes de glissement sont donc, dans ce cas, des lignes coupant à 45° le réseau des lignes isostatiques. Elles sont donc faciles à tracer quand on connaît ces dernières.

Si l'on envisage le cisaillement effectif, comme on le fait pour tous les massifs cohérents, les directions suivant lesquelles ce cisaillement effectif est maximum font, comme on sait, des angles égaux à $\pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$, avec la direction de la plus grande tension principale. Les lignes de glissement coupent donc dans ce cas, suivant ces mêmes angles $\pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$, les lignes isostatiques de première espèce, c'est-à-dire celles qui, en chaque point, sont tangentes à la direction de la plus grande tension principale. Il est donc également facile de les tracer quand on connaît les lignes isostatiques.

Tel est donc l'intérêt qui s'attache à la considération de ces dernières lignes, au sujet desquelles, dans le cas de massifs triangulaires, on peut présenter les observations générales qui suivent.

Dans un Mémoire de M. Chigot, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées [1], on trouvera leur détermination effective dans un

---

[1] Tome V du *Bulletin de l'Hydraulique agricole*.

certain nombre de cas. Nous nous bornerons à montrer ici que leur équation différentielle est toujours intégrable.

Si l'on désigne par β l'angle que fait avec Ox la normale à l'élément sur lequel s'exerce une tension principale, c'est-à-dire l'angle que fait avec Ox la direction principale elle-même, on a la relation

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{N_1 - N_2 \pm \sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}}{2T_3}.$$

L'équation différentielle des lignes isostatiques s'obtient donc en faisant $\operatorname{tang}\beta = \frac{dy}{dx}$ dans cette dernière relation.

Dans le cas actuel, les expressions de N_1 N_2 N_3 étant linéaires et homogènes en x et y, cette équation rentre dans la catégorie des équations différentielles homogènes que l'on sait résoudre. On connaît le procédé classique. Quand on a

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

on pose $y = xz$, d'où $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$ et l'équation se transforme en

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z},$$

dont l'intégrale générale est

$$x = A\, e^{\int [\varphi(z) - z]\, dz}.$$

Dans le cas actuel, l'intégrale qui figure en exponentielle est elle-même calculable, car $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle du premier degré par rapport à z et au radical $\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_3^2}$ qui n'est lui-même que du second degré en z.

Sans entrer dans une discussion analytique un peu compliquée, nous dirons simplement que, lorsqu'il s'agit d'un massif à l'abri des sous-pressions, les deux parements sont nécessairement des lignes isostatiques de première espèce, puisque la plus grande compression a est toujours dirigée suivant les parements, soit à vide, soit en charge. Comme, d'autre part, deux courbes de même espèce ne peuvent se rencontrer qu'en un point singulier pour lequel les compressions sont égales dans toutes les directions, cela

suffit à montrer que toutes les courbes de cette espèce doivent se rencontrer au sommet du mur.

Si l'on se rappelle, en outre, que toutes ces courbes sont homothétiques à l'une d'elles par rapport au sommet, on en conclut même qu'elles doivent toutes partir tangentiellement à une même droite OT, qui fait partie de leur famille et qu'il est intéressant de déterminer.

Cette droite est telle qu'en l'un quelconque de ses points, de coordonnées y et $x = y \operatorname{tang} \omega = py$, on ait

$$\beta = K\frac{\pi}{2} - \omega,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\beta = \frac{2p}{p^2 - 1}.$$

Comme on a, d'autre part,

$$\operatorname{tang} 2\beta = \frac{2T_3}{N_1 - N_2} = \frac{2(cp + d)}{(a_1 - a_2)p + (b_1 - b_2)},$$

la quantité $p = \operatorname{tang} \omega$ satisfait à l'équation du troisième degré

$$\frac{cp + d}{(a_1 - a_2)p + (b_1 - b_2)} = \frac{p}{p^2 - 1}.$$

Or on connaît *a priori* deux des racines de cette équation ; ce sont les inclinaisons des talus $p = m$, $p = -n$. La troisième s'obtiendra donc en divisant par $-mn$ le produit des racines, qui est $\frac{d}{c}$.

Sa valeur explicite sera

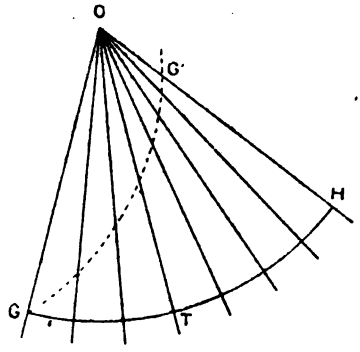
$$p = \frac{\Pi(m - n)(m + n) + K(mn - m^2 - 2)}{\Pi\, 2mn(m + n) + K(m - n - 2m^2 n)}.$$

On a donc de la sorte une idée assez précise des lignes isostatiques de première espèce qui peuvent être en gros assimilées à l'ensemble des hyperboles tangentes en O à la droite OT et ayant comme directions asymptotiques les deux parements. Ceux-ci correspondent à l'hyperbole particulière dont le centre serait au point O.

Les courbes de seconde espèce, qui forment aussi une famille de courbes homothétiques, orthogonales aux premières, couperont

donc le massif de part en part, et seront, bien entendu, normales aux deux parements ainsi qu'à la droite OT.

Fig. 197.



Quant aux lignes de glissement (celles correspondant aux cisaillements effectifs), elles affecteront l'allure représentée par la courbe pointillée GG_1 sur la figure ci-dessus. Les angles aigus en G et G_1 sont égaux à $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

Le cas des murs strictement à l'abri des sous-pressions présente une particularité intéressante. Lorsque le réservoir est plein, les lignes isostatiques d'un même système sont des droites parallèles entre elles. Cherchons, en effet, sous quelles conditions cela peut avoir lieu. Il faut que β soit constant, ou, ce qui revient au même, que

$$\operatorname{tang} 2\beta = \frac{2(cx + dy)}{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y} = \text{const.}$$

Cela exige que l'on ait entre les coefficients la relation

$$\frac{c}{a_1 - a_2} = \frac{d}{b_1 - b_2}.$$

Or, dans le cas considéré, on a sur le parement d'amont

$$N_1 = N_2 = F \qquad \text{et} \qquad T_2 = 0,$$

ce qui a nécessairement établi entre les coefficients les relations

$$-a_1 n + b_1 = -a_2 n + b_2,$$
$$-c\,n + d = 0,$$

d'où

$$n = \frac{d}{c} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}.$$

La valeur constante de β, pour les lignes de première espèce, est d'ailleurs nécessairement l'angle i du parement d'aval, qui demeure une ligne isostatique de cette espèce. Le parement d'amont qui devient une ligne singulière, puisque toutes les compressions y deviennent égales, n'en fait plus partie. Les lignes de glissement deviennent aussi des droites.

Digues en terre corroyée à profil triangulaire. — Il existe également un assez grand nombre de digues en terre corroyée dont le profil est triangulaire, ou du moins très voisin du triangle quand on fait abstraction de quelques détails de couronnement ou de redans. Si l'on admet que leurs conditions de résistance peuvent être soumises au calcul et que les lois générales de l'élasticité leur sont applicables, il est bien évident que la solution ne saurait différer de celle qui vient d'être exposée. Ce qui a été dit de la considération du *cisaillement effectif*, notamment, trouve ici son application toute naturelle, puisque ce n'est que la traduction de la loi de Coulomb, reprise par M. Résal, pour les terres pourvues de cohésion.

Toutefois, les nécessités de la construction s'opposent ici à ce qu'on puisse donner aux parements les inclinaisons qui conviendraient à une digue strictement à l'abri des sous-pressions. On est obligé d'admettre des valeurs de m et de n toujours assez notablement supérieures à l'unité.

Dans ces conditions, l'inégalité (5), qui écarte le danger des sous-pressions, est toujours amplement satisfaite, mais l'inégalité $1 - mn > 0$ ne l'est plus, et il faut, bien entendu, renoncer à faire usage des conséquences particulières qui, dans le cas des murs en maçonnerie, reposeraient sur cette inégalité. La plupart du temps, il faudra les inverser.

Une seconde différence, beaucoup plus importante, réside dans ce que, pour une digue en terre, ce seront généralement les conditions relatives au cisaillement effectif qui conduiront aux plus faibles valeurs des hauteurs dangereuses, car au lieu d'avoir entre

les limites R et C l'inégalité

$$R < \frac{2C\cos\varphi}{1-\sin\varphi},$$

c'est l'inégalité inverse qui traduira les faits. Ici, en effet, C se tient aux environs de 4000^{kg} à 5000^{kg} par mètre carré, d'après les expériences de M. Frontard (*Annales des Ponts et Chaussées*, V, 1914), tandis que R atteint l'ordre de grandeur des valeurs que l'on assigne aux mortiers, c'est-à-dire des valeurs dix fois plus fortes environ. D'autre part, φ ne dépasse guère 10° à 15°.

Quelques objections. Considération de lignes de discontinuité dans les massifs en terre. — Nous croyons devoir revenir encore sur les réserves déjà faites à plusieurs reprises au sujet de l'exactitude des hypothèses sur lesquelles repose la solution linéaire envisagée, hypothèses dont il convient toujours d'apprécier *a priori* le degré de vraisemblance dans les problèmes pratiques que l'on se pose. Voici notamment deux conséquences qui paraissent difficiles à accepter pour les massifs en terre. La première nous a été indiquée par M. l'inspecteur général Galliot.

Supposons un massif symétrique ($m = n$) et ne supportant aucune charge extérieure. En se reportant aux formules, on trouve que, sur les deux talus, on a $N_2 = \frac{H\gamma}{2}$. (Cette tension doit d'ailleurs être uniforme sur tout plan horizontal, d'après la loi linéaire supposée.) On en déduit pour la compression maxima sur l'un des talus

$$a = N_2(1+m^2) = \frac{H\gamma}{2}(1+m^2).$$

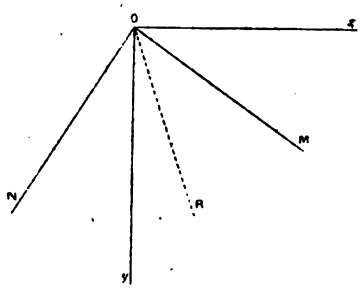
Cette valeur irait en croissant avec m, c'est-à-dire au fur et à mesure que le talus va en s'adoucissant. Elle serait infinie pour $m = \infty$. Cela paraît inacceptable.

D'autre part, supposons un massif triangulaire quelconque, constitué avec une matière pulvérulente et sans charge. Sur chacun des talus, toutes les tensions doivent s'annuler à la fois et, comme dans l'intérieur du massif elles varient linéairement, elles doivent être nulles partout, ce qui est absurde. Il serait donc impossible, quels que soient m et n, de constituer un massif triangulaire de matière pulvérulente, sans maintenir par une charge au moins l'un

des talus. Cela semble également en contradiction avec la réalité.

On peut lever en partie ces difficultés, tout au moins pour les massifs de profondeur indéfinie, de la manière suivante. On peut réaliser pour le massif entier de nouveaux états d'équilibre, satisfaisant encore à la condition que les tensions varient proportionnellement à ρ, distance d'un point au sommet, en supposant que pour certaines droites issues du sommet il y ait des discontinuités

Fig. 198.



dans les déplacements élastiques. Si, par exemple, OR représente une pareille ligne, le massif entier pourra être décomposé en deux massifs MOR et RON, appuyés l'un contre l'autre et tels que dans chacun d'eux la loi des tensions soit linéaire. Pour chacun d'eux on disposera de quatre constantes a_1, a_2, b_1, b_2, soit huit en tout. On pourra les déterminer en partie : 1° par les conditions sur les deux talus ou surfaces libres ; 2° par la condition que sur les éléments plans dirigés suivant OR, les composantes X et Y des tensions soient égales. Cela fera en général six conditions et il restera deux arbitraires dont on pourra disposer suivant les conditions du problème, et notamment pour attribuer à la ligne de discontinuité OR une direction vraisemblable. En particulier, on pourra faire en sorte que le long de OR on ait une condition d'équilibre limite.

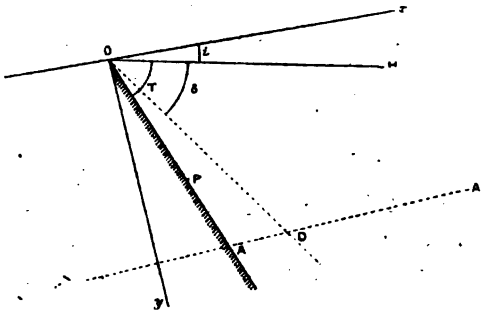
Dans le cas d'un massif triangulaire pulvérulent à talus libres, il sera loisible de supposer deux lignes de discontinuité OR et OS. Pour chacun des massifs extérieurs on aura une seule constante, les trois autres s'exprimant en fonction de celle-là, puisque sur les surfaces libres les trois composantes des tensions doivent s'annuler à la fois. Pour le massif intérieur, on en a quatre. Les six constantes satisferont à quatre relations exprimant l'égalité des tensions

sur les éléments des lignes de discontinuité, de sorte qu'il en resterait encore deux arbitraires. On aurait une solution vraisemblable en traçant des lignes de discontinuité OR et OS telles qu'elles correspondent à des lignes de rupture pour les massifs extérieurs et en admettant d'ailleurs que ceux-ci soient censés appartenir à des massifs indéfinis simplement limités par les plans des talus correspondants. Les tensions le long de ces lignes de rupture étant entièrement déterminées, l'état d'équilibre du troisième massif compris entre elles sera aussi entièrement déterminé, et il suffira de reconnaître s'il est stable, ce qui arrivera en général.

Cette considération de lignes de discontinuité, correspondant à l'idée de ruptures partielles pendant la construction et à des tassements inégaux du sol de fondation, peut ainsi être intéressante dans l'étude des digues en terre. Nous la retrouverons dans l'étude des murs de soutènement.

Théorie de la poussée des terres sur les murs de soutènement. — On suppose, dans ce problème, un massif de terre triangulaire limité

Fig. 199.



d'un côté par une surface libre OX, faisant avec l'horizontale un angle i, et de l'autre côté par la paroi d'un mur de soutènement OA, faisant avec l'horizontale et en dessous d'elle un angle donné γ. La nature de la terre est censée connue et il s'agit de trouver les composantes de l'action, ou poussée, exercée par le massif de terre sur un élément P de la paroi du mur de soutènement.

Les théories proposées sont fort nombreuses ; elles s'appuient sur des hypothèses souvent discordantes. Aussi n'essaierons-nous pas

de les résumer toutes. Nous nous bornerons à faire connaître les principes de quelques-unes.

Une hypothèse commune à toutes consiste à admettre que tout le long de la paroi OA les composantes de la poussée sont proportionnelles à la distance $OP = \rho$; on en déduit que, sur une longueur finie telle que OA, la résultante des poussées passe au tiers inférieur de OA, et est proportionnelle au carré de OA. La difficulté est de trouver le coefficient de proportionnalité qui dépend notamment des angles i et γ.

On suppose aussi que le massif de terre est dans un état d'équilibre élastique et que le long d'une droite quelconque issue du sommet O les tensions varient comme la distance du point considéré au sommet. Il en résulte que la solution est linéaire, sauf à admettre certaines lignes de discontinuité, s'il y a lieu.

Théorie dite de Rankine et de Maurice Levy. — Rankine et Maurice Levy n'envisageaient que des massifs indéfinis en profondeur et constitués par de la terre pulvérulente. Mais leur théorie peut être conservée, en la généralisant, même dans le cas où il s'agit de terre cohérente, et de massifs limités à une profondeur inférieure à la profondeur limite admissible.

Envisageons d'abord un massif de terre, limité supérieurement par le plan OX et, s'il y a lieu, inférieurement par un plan parallèle AA'. Supposons qu'on ait fait l'étude, abstraction faite de la paroi OA du mur de soutènement, c'est-à-dire qu'on ait déterminé les limites inférieure et supérieure que l'on peut attribuer au coefficient A de la composante N_1 (qui reste indéterminée et que l'on suppose de la forme $N_1 = Ay$) de manière à assurer partout l'équilibre. Le long de toute droite telle que OA, issue du point O, on pourra déterminer les tensions qui s'exercent sur les éléments plans dirigés suivant OA, et cela pour toute valeur de la constante A, comprise entre ses deux limites.

Supposons maintenant que, à gauche du plan OA, on remplace le massif par une paroi rigide. Rankine et Maurice Levy admettent que la paroi OA tient lieu purement et simplement de la portion du massif qui est supprimée. Cette hypothèse est rationnelle en ce que l'on obtient bien ainsi un état d'équilibre possible.

Mais quelle valeur convient-il d'attribuer à la constante A,

parmi toutes les valeurs qu'elle peut prendre? Si on lui attribuait la valeur maxima, qui correspond à l'état d'équilibre limite supérieur, on aurait évidemment toute sécurité. Mais on serait conduit à des poussées telles qu'il faudrait donner au mur de soutènement, pour le mettre en mesure d'y résister, des dimensions exagérées, très supérieures à celles que la pratique a montrées suffisantes.

Alors on choisit pour A sa limite inférieure en justifiant ce choix par les considérations suivantes. Le mur de soutènement, introduit après coup, n'est pas absolument indéformable, si rigide soit-il. Si les actions exercées sur lui deviennent suffisantes pour le déformer ou pour lui faire prendre un petit mouvement d'ensemble, ces déformations, ou ce mouvement, auront pour effet de diminuer les réactions exercées sur lui. D'ailleurs, si ces réactions diminuaient au point de correspondre à une valeur de A inférieure à sa limite inférieure, le massif de terre cesserait lui-même d'être en équilibre. Des mouvements se produiraient à son intérieur jusqu'à ce que les réactions sur le mur atteignent de nouveau les valeurs correspondant à la limite inférieure de A.

On admet donc comme vraisemblable qu'après une période plus ou moins longue de mouvements successifs, tant du mur de soutènement que du massif de terre, il finira par s'établir un état d'équilibre réel et définitif tel que le mur de soutènement soit en état d'y résister indéfiniment, sans déplacement nouveau de sa paroi. Cet état définitif peut dépendre évidemment de la résistance du mur lui-même et rester d'autant plus éloigné de l'état d'équibre limite inférieur du massif de terre que le mur sera plus résistant. Mais la condition nécessaire et *strictement suffisante* pour qu'un pareil état définitif puisse se produire, et pour que le mur puisse résister indéfiniment, c'est qu'il soit au moins en situation de résister à la poussée correspondant à l'état d'équilibre limite inférieur.

Il suffira donc, pour satisfaire aux règles de la prudence, de se donner une marge convenable, c'est-à-dire un coefficient de sécurité. Il serait rationnel de faire porter ce coefficient sur la valeur attribuée à A, plutôt que sur le résultat définitif du calcul de la fatigue dans le mur de soutènement.

Bien entendu, il faut admettre que pendant la période de construction et pendant la période troublée ultérieure, le mur ne souffrira aucun dommage grave du fait des déformations ou des

mouvements qui pourraient lui être imposés. Tout au moins faut-il admettre qu'on serait en mesure d'y parer provisoirement par des étais, des tirants, ou par tout autre moyen.

On voit que cette théorie fort simple s'applique aussi bien aux massifs cohérents, limités ou illimités en profondeur, qu'aux massifs pulvérulents infinis.

Théorie de M. Boussinesq. — Beaucoup d'ingénieurs, et avec eux M. Boussinesq, trouvant encore trop rigoureuses les conditions imposées par la théorie précédente, au moins dans certains cas, ont contesté que l'état d'équilibre réel du massif de terre, réduit par l'introduction de la paroi OA, pût se ranger dans la série des états d'équilibre élastique possibles pour le massif indéfini. On a objecté notamment que si l'on admet la possibilité d'un petit mouvement du mur, et si ce petit mouvement est assimilable à un mouvement de rotation autour d'un point de la base du mur, il doit se produire une situation telle que, tout le long de OA, le rapport de la réaction tangentielle T à la réaction normale N doive être égal au coefficient de frottement $\tang\varphi'$ de la terre sur la maçonnerie, ou tout au moins égal au coefficient de frottement $\tang\varphi$ de la terre sur elle-même.

Cela constitue une hypothèse nouvelle, et il est utile en premier lieu de faire observer qu'elle ne convient pas sans doute à tous les cas. Elle suppose un mode de renversement déterminé pour le mur, et il peut y en avoir d'autres possibles. Certains murs peuvent se déplacer en glissant sur leur base parallèlement à eux-mêmes. D'autres peuvent glisser simplement du pied, leur sommet restant sensiblement immobile, ou même se déplaçant vers l'intérieur du massif. Dans ce dernier cas, la réaction tangentielle devrait être à l'opposé de celle que l'on admet.

Quoi qu'il en soit, si l'on admet ce mode de renversement du mur et la condition $\frac{T}{N} = \tang\varphi$, avec T dirigé de O vers A, il y a encore d'autres complications qui surgissent.

Supposons qu'il s'agisse de terre pulvérulente, seul cas envisagé par M. Boussinesq.

Le massif triangulaire AOx est forcément dans un état d'équilibre correspondant à une solution linéaire. Trois des constantes arbitraires de cette solution sont déterminées en fonction de la

quatrième par les trois conditions que l'on doit satisfaire sur la surface libre Ox, où les trois tensions doivent s'annuler à la fois. Si l'on dispose de la quatrième constante pour satisfaire sur OA à la condition $\frac{T}{N} = \tang\varphi$, le problème est complètement déterminé. Mais alors, à moins de circonstances particulières relatives à l'orientation des droites Ox et OA, l'état d'équilibre obtenu ainsi ne sera pas stable. Autour d'un point P pris sur OA, il y aura des éléments plans pour lesquels on aura $\tang\theta = \frac{T}{N} > \tang\varphi$, puisque pour l'élément plan dirigé suivant OA on a déjà $\tang\theta = \tang\varphi$, et que rien n'impose *a priori* que le maximum de θ corresponde à la direction OA.

A la vérité, cela pourrait conduire à changer l'hypothèse primitive, savoir $\frac{T}{N} = \tang\varphi$ suivant OA, et à la remplacer par cette autre hypothèse max. $\frac{T}{N} = \tang\varphi$ pour les éléments plans tracés par un point quelconque P de la paroi OA. Autrement dit, on s'imposerait, pour déterminer la quatrième constante de la solution linéaire, la condition que l'état limite inférieur, ou état ébouleux, se trouve réalisé tout le long de la paroi OA. Mais il faudrait vérifier ensuite que cet état d'équilibre est stable dans le reste du massif.

Cette hypothèse, malgré sa simplicité et son caractère assez rationnel, n'est pas celle qui est faite par M. Boussinesq. En traduisant très librement ses remarquables travaux, on est fondé à dire que son analyse revient à supposer dans l'intérieur du massif AOx une ligne de discontinuité, de part et d'autre de laquelle se rencontrent des solutions différentes. Comme ligne de discontinuité, on prend la droite OD qui correspondrait à la direction de rupture intérieure au massif dans le cas où ce massif ferait partie du massif indéfini de Rankine, limité seulement par le plan Ox. Le massif DOx est censé atteindre son état d'équilibre limite inférieur, de sorte que le long de OD on a à la fois $\frac{T}{N} = \tang\varphi$ pour les éléments plans dirigés suivant OD et max. $\frac{T}{N} = \tang\varphi$ pour un élément plan d'orientation quelconque. Quant au massif restant DOA, dont on suppose, bien entendu, l'existence, $\gamma > \delta$, il doit être dans un état aussi voisin que possible de l'état ébouleux, comme dans la solution

de Rankine, mais tel cependant que l'on ait $\frac{T}{N} = \tang\varphi$ le long des éléments de OA. M. Boussinesq ajoute donc dans ce but à la solution de Rankine une solution complémentaire, satisfaisant aux deux équations générales d'équilibre, sans constante Π, et qui est par suite de la forme

$$N_1 = \frac{d^2F}{dy^2}, \qquad N_2 = \frac{d^2F}{dx^2}, \qquad T_3 = \frac{d^2F}{dx\,dy},$$

avec la condition que ces termes s'annulent le long de la ligne de discontinuité OD. On achève de déterminer la solution par la considération d'ordre de grandeur relative des termes principaux et des termes complémentaires, ce qui revient en gros à s'imposer une condition de raccordement le long de la ligne OD. Malgré tout cela, M. Boussinesq rencontre la difficulté déjà signalée; à savoir que l'état d'équilibre obtenu n'est pas stable au voisinage de la paroi OA, car on aura forcément des éléments plans pour lesquels max. $\theta > \varphi$. La différence entre le maximum de θ et φ est petite, mais toujours positive, naturellement. Pour terminer, M. Boussinesq conseille de prendre sur la paroi OA la condition $\frac{T}{N} = \tang\varphi'$, l'angle φ' étant légèrement inférieur à l'angle φ.

Pratiquement, les résultats se traduisent ainsi qu'il suit.

Si l'on désigne par H la hauteur du mur, la longueur de la paroi OA étant $\frac{H}{\sin\gamma}$, la poussée totale sur cette paroi OA sera

$$Q = \frac{\Pi H^2}{2\sin^2\gamma} \times K,$$

K étant un coefficient numérique fonction des angles i et γ.

En désignant par ψ et δ deux angles auxiliaires déterminés par les relations

$$\sin(i + 2\psi) = \frac{\sin i}{\sin\varphi}, \qquad \delta = \gamma - \frac{\varphi}{2} - \psi - \frac{\pi}{4},$$

on aurait

$$K = \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\cos\psi\cos(\varphi + \delta)\sin(i + \gamma)}{\cos(\varphi - \delta)\cos(i + \psi)}.$$

La poussée totale est appliquée au tiers de OA, à partir du point A et fait l'angle φ avec la normale à la paroi, du côté de AO.

Ces formules ne sont applicables qu'autant que l'angle δ est

positif, ce qui correspond à presque tous les cas de la pratique. Elles ont servi à calculer des tables numériques commodes (Flamant et Résal).

On se rendra compte par un exemple de la différence qui existe entre l'application de la théorie de Rankine et celle de M. Boussinesq.

Supposons $i = 0$ et $\gamma = \frac{\pi}{2}$, terre-plein horizontal et mur de soutènement vertical.

Dans la première théorie, on a

$$N_1 = Ay = \Pi y \frac{(1 - \sin\varphi)}{1 + \sin\varphi} \qquad \text{avec } T_2 = 0.$$

La poussée est horizontale, appliquée au tiers de la hauteur, et a pour valeur

$$Q = \frac{\pi H^2}{2} \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}.$$

Dans la théorie de M. Boussinesq la poussée totale a pour valeur

$$Q = \frac{\pi H^2}{2} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Elle a pour composante horizontale $X = Q\cos\varphi$, et pour composante verticale $Y = Q\sin\varphi$.

En attribuant maintenant à φ la valeur 30°, qui correspond à une terre moyenne, on trouve, au facteur $\frac{\Pi H^2}{2}$ près, les valeurs suivantes :

Théorie de M. Rankine.....	$X = 0,333$,	$Y = 0$;
Théorie de M. Boussinesq....	$X = 0,250$,	$Y = 0,144$.

La différence est donc importante surtout quand il s'agit de prendre les moments de la poussée par rapport à un point de la base du mur de soutènement en avant du point A.

Autre manière d'introduire une ligne de discontinuité. — Si l'on ne juge pas possible de se contenter de la solution linéaire applicable à tout le massif de terre et telle que l'état éboulieux se trouve réalisé seulement au contact de la paroi du mur, il est loisible, quand $\gamma > \delta$, de décomposer le massif de terre en deux

autres par la ligne de discontinuité OD, qui correspondrait à la direction de rupture dans la théorie de Rankine, et de supposer que le massif DOx est rendu à l'état ébouleux, comme dans la théorie de M. Boussinesq. Mais, pour le massif restant DOA, on peut recourir à une solution élastique linéaire en satisfaisant à deux conditions. On dispose de deux des quatre constantes a_1, b_1, a_2, b_2, car on a déjà à satisfaire à deux conditions exprimant l'égalité des tensions sur les éléments plans appartenant à la ligne OD. Ces conditions, d'après le choix de OD et d'après l'hypothèse admise pour le massif DOx, rendu à l'état ébouleux, équivalent à $\frac{T}{N} = \tang\varphi$ et max. $\frac{T}{N} = \tang\varphi$. Cette dernière n'est d'ailleurs pas autre chose que l'équation de Rankine

$$\frac{\sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4T_1^2}}{N_1 + N_2} = \sin\varphi.$$

On peut donc satisfaire à deux autres conditions sur la paroi OA, et en particulier on peut y exprimer deux conditions analogues aux précédentes, l'une exprimant que le massif est à l'état ébouleux le long de OA et l'autre exprimant qu'une direction de rupture coïncide avec OA.

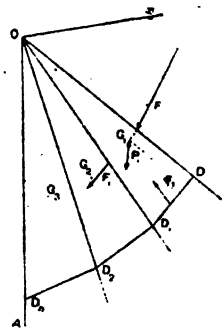
On aurait ainsi une solution simple et complète, et assez voisine de celle qui assurerait l'état ébouleux dans tout le massif, si cette dernière existe et si elle correspond bien aux conditions strictement suffisantes pour le mur. Elle pourrait s'appliquer aussi bien au cas où le mur de soutènement est exposé à glisser du pied qu'au cas où il est exposé au renversement autour d'un point de sa base. A la direction de rupture OD on pourrait substituer, le cas échéant, la direction de rupture conjuguée si cette dernière était voisine de OA.

Au surplus, il semble bien peu nécessaire de rechercher une très haute précision dans une étude de ce genre, étant données toutes les incertitudes inévitables du point de départ lui-même.

En particulier, on pourrait, principalement lorsque les directions OD et OA ne sont pas trop éloignées l'une de l'autre, supposer que le long de toute droite intermédiaire issue du point O, la condition $\frac{T}{N}$ est approximativement réalisée, ainsi que la condition relative à l'état ébouleux, puisque ces deux conditions sont réalisées

aux deux limites. On pourrait alors utiliser pour déterminer la poussée la construction graphique suivante, indiquée par M. Baticle, ingénieur des Ponts et Chaussées.

Fig. 200.



Prenons sur OD un point D et déterminons la force F faisant avec la normale à OD un angle φ, et représentant l'action due au massif DOx, rendu à l'état éboulieux, dans la solution de Rankine. Puis traçons différentes droites intermédiaires OD_1, OD_2 convenablement rapprochées, de manière que leurs angles respectifs soient assimilables à des infiniment petits.

L'action du massif D_1OD sur le massif suivant D_2OD_1 est par hypothèse une force F_1 faisant un angle φ avec OD_1. Si l'on trace DD_1 parallèle à cette direction, la tension Φ_1 qui s'exercera sur DD_1 sera parallèle à OD_1 (principe des directions conjuguées). La résultante de F et du poids P_1, correspondant au massif élémentaire D_1OD, doit donc être équilibrée par les deux forces F_1 et Φ_1 dont les directions sont connues. Ces deux forces F_1 et Φ_1 seront donc entièrement déterminées. A des infiniment petits près, la première passera au tiers de D_1O, la seconde au milieu de DD_1.

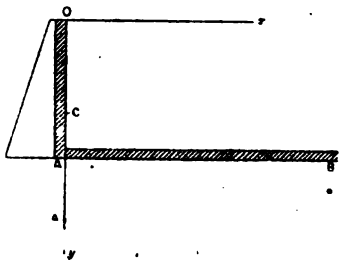
On partira ensuite de la force F_1 et du point D_1, comme on l'a fait de F et de D et, de proche en proche, on trouvera une force F_n qui ne sera pas autre chose que la poussée sur OD_n. On en déduira la poussée correspondant à une longueur de paroi quelconque $OA \neq OD_n$.

La ligne brisée $DD_1D_2D_n$ représente approximativement une ligne de rupture du massif DOA. Elle se prolongerait dans le massif supérieur DOx par une ligne droite parallèle à F. Cette

ligne brisée se transformerait à la limite en une spirale, sa tangente faisant avec le rayon vecteur un angle constant.

Hypothèse sur l'action de couches successives. — Signalons, en terminant, une autre hypothèse qui tiendrait compte dans une certaine mesure d'un mode habituel de constitution des remblais

Fig. 201.



derrière un mur de soutènement. Pour simplifier, supposons la paroi OA verticale et le remblai exécuté par couches horizontales indéfinies.

Une première couche AB de poids $\Pi dy = p$ appliquée sur un sol indéfini sous-jacent donnerait en un point A', si l'on appliquait les résultats du Chapitre XXVII, des tensions

$$N_1 = -\frac{p}{\varpi}(\alpha - \alpha') = -\frac{\Pi dy}{2}$$

$$T_3 = -\frac{p}{\varpi}(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha') = \frac{\Pi dy}{\varpi},$$

et ces tensions seraient les mêmes à toute profondeur sur la verticale du point A, pourvu que cette profondeur soit limitée, car on aurait toujours $\alpha' = 0$ et $\alpha = \frac{\varpi}{2}$. On peut les admettre en particulier pour le point A.

Admettons maintenant que cette première couche de remblai, butée par le mur de soutènement, se comporte à son tour comme une couche indéfinie superposée au terrain primitif, et qu'on lui superpose successivement d'autres couches horizontales jusqu'à ce que le niveau du remblai arrive en O. En un point tel que C, pris dans l'épaisseur du remblai, on aura comme réactions totales

$$N_1 = -\frac{\Pi y}{1}, \qquad T_3 = \frac{\Pi y}{\varpi}.$$

Avec une pareille répartition, on aurait pour les composantes de

la réaction totale appliquée sur une hauteur z les valeurs suivantes :

$$X = \frac{2\Pi y^2}{2} \times \frac{1}{2}, \qquad Y = \frac{\pi y^2}{2\varpi}.$$

Ces valeurs seraient à peu près le double de celles indiquées plus haut comme résultant de la théorie de M. Boussinesq lorsque $\varphi = 30^\circ$. On a en effet, pour les coefficients de X et de Y, respectivement les valeurs

0,500 au lieu de 0,250

et

0,318 au lieu de 0,144.

L'évaluation qui vient d'être ainsi faite se rapporte aux réactions réelles et immédiates qui pourraient résulter de la construction du remblai derrière un mur préalablement établi, et d'ailleurs indéformable. et non aux réactions limites qui peuvent résulter des mouvements ulterieurs possibles du mur. Il serait peut-être prudent de les envisager au moins comme ordre de grandeur pendant la période de construction, qui est toujours en fait la période dangereuse.

Les valeurs trouvées sont indépendantes de la qualité de la terre formant le remblai, puisque les coefficients C et tangφ n'y figurent pas. Toutefois, il faut remarquer que dans l'évaluation qui a été faite on a supposé que les couches successives du remblai n'agissaient que par leur propre poids et n'étaient ni pilonnées, ni tassées. En réalité, la composante N_1 duc à la couche AB peut, au droit de cette couche et suivant le traitement qui lui est imposé, varier entre zéro et la valeur limite $\frac{2C\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$ qui est admissible, comme nous l'avons vu, à la surface libre d'un remblai. Il en résulte que, tout le long de la paroi, on peut avoir, indépendamment des réactions ci-dessus évaluées, une compression uniforme égale à cette valeur limite, si l'on a pilonné chaque couche au refus, c'est-à-dire si on lui a fait prendre artificiellement et individuellement son état d'équilibre limite supérieur.

Cette compression uniforme serait nulle pour les terres pulvérulentes, et elle demeurerait vraisemblablement petite pour des terres quelconques faiblement ou moyennement pilonnées.

Entre toutes ces théories, il est assez délicat de faire un choix.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVANT-PROPOS V

CHAPITRE I. — *Rappel de notions de Mécanique. Moments d'inertie*..... 1

I. Rappel de quelques notions de Mécanique..... 1
II. Constantes mécaniques d'un système matériel. Somme. Moments et centre de gravité. Moments d'inertie 7

CHAPITRE II. — *Statique graphique. Calcul graphique d'intégrales*..... 25

I. Statique graphique..... 25
II. Sommations ou intégrations graphiques..... 36

CHAPITRE III. — *Considérations générales sur les solides naturels*..... 47

Application des conditions générales d'équilibre aux solides naturels... 47

CHAPITRE IV. — *Théorie des poutres prismatiques : Définitions. Réactions des appuis. Force extérieure relative à une section*..... 64

Définition géométrique des poutres prismatiques..... 64

CHAPITRE V. — *Théorie des poutres prismatiques* (suite) : *Recherche des efforts moléculaires. Hypothèses de la résistance des matériaux*..... 86

I. Recherche des efforts moléculaires qui se produisent dans une section et quand la force extérieure relative à cette section est connue. 86
II. Application 100

CHAPITRE VI. — *Théorie des poutres prismatiques* (suite) : *Recherche des déformations* 115

I. Déformation du prisme élémentaire..... 115
II. Déformation d'ensemble de la fibre moyenne..... 119

CHAPITRE VII. — *Lignes représentatives. Lignes d'influence. Lignes enveloppes. Travail de déformation*..... 129

I. Lignes représentatives. Lignes d'influence. Lignes enveloppes..... 129
II. Travail de déformation dans un corps élastique 139

CHAPITRE VIII. — *Poutre droite reposant sur deux appuis simples*..... 153

I. Étude des efforts..... 153
II. Étude de la déformation..... 167

Pages.

CHAPITRE IX. — *Consoles. Poutres-consoles. Ponts-grues* 186

I. Consoles simples 186
II. Poutres consoles 190
III. Ponts-grues complets ou incomplets 196

CHAPITRE X. — *Poutres encastrées* 199

I. Poutre encastrée à ses deux extrémités 199
II. Poutre encastrée à une extrémité et simplement appuyée à l'autre.. 220

CHAPITRE XI. — *Poutres continues ou à travées solitaires. Portiques* 224

I. Considérations générales 224
II. Étude détaillée des poutres sur appuis incompressibles quand leurs déplacements longitudinaux sont sans influence sur les réactions d'appuis 234
III. Étude sommaire des poutres sur appuis compressibles 261

CHAPITRE XII. — *Poutres courbes ou arcs* 268

I. Généralités sur les arcs 268
II. Arcs articulés aux naissances 273
III. Arcs encastrés aux naissances 293

CHAPITRE XIII. — *Arcs divers. Assemblages divers de poutres et d'arcs* .. 319

I. Arcs à triple articulation 319
II. Poutres à béquilles 325
III. Poutres droites ou courbes réunies à leurs abouts par des assemblages rigides 328
IV. Arcs et poutres solidarisés par les montants verticaux 330
V. Poutres à semelles indépendantes 333

CHAPITRE XIV. — *Quelques règles spéciales de calcul* 335

I. Flexion des pièces à forte courbure 335
II. Poutres de hauteur rapidement variable 342
III. Pièces chargées de bout 346
IV. Systèmes instables 357

CHAPITRE XV. — *Poutres et systèmes triangulés munis d'articulations* ... 376

I. Considérations générales sur les systèmes triangulés 376
II. Recherche des efforts dans les barres 384
III. Recherche des déformations 410
IV. Recherche des réactions des appuis dans les systèmes hyperstatiques. 418

CHAPITRE XVI. — *Poutres triangulées à assemblages rigides* 422

I. Méthode basée sur la théorie des systèmes articulés 422
II. Méthode de M. Résal. Retour à la théorie des poutres prismatiques.. 427
III. Poutres composées 432

Pages.

CHAPITRE XVII. — *Câbles de ponts suspendus isolés ou associés à des poutres de rigidité* 435

I. Câbles flexibles 435
II. Câble associé à une poutre de rigidité 454

CHAPITRE XVIII. — *Règles spéciales aux ouvrages en maçonnerie ou en ciment armé* 467

I. Ouvrages en maçonnerie 467
II. Ouvrages en maçonnerie armée ou en ciment armé 479

CHAPITRE XIX. — *Théorie générale de l'Élasticité* 484

I. Théorie des tensions intérieures 484
II. Théorie des déplacements dans un système *continu* 494
III. Relations entre les tensions et les déformations d'un solide élastique à partir de l'état naturel 501
IV. Équations générales de l'équilibre élastique 505

CHAPITRE XX. — *Élasticité plane ou à deux dimensions* 519

CHAPITRE XXI. — *Divers problèmes simples* 545

I. Compression normale et uniforme 545
II. Extension longitudinale d'un prisme ou d'un cylindre 546
III. Équilibre d'une couche cylindrique 549
IV. Équilibre d'une couche sphérique 557

CHAPITRE XXII. — *Problème de Saint-Venant* 561

Application du problème de Saint-Venant 574
I. Extension simple 574
II. Flexion simple 575
III. Flexion composée 575
IV. Torsion simple 585

CHAPITRE XXIII. — *Flexion des plaques planes* 595

I. Théorie générale 595
II. Plaques circulaires uniformément chargées 604
III. Plaques circulaires incomplètement soumises à une charge uniforme, ou soumises à une charge centrale concentrée 611
IV. Plaques rectangulaires simplement appuyées à leur pourtour 619
V. Plaques rectangulaires encastrées sur leurs quatre côtés et uniformément chargées 643
VI. Plaques rectangulaires appuyées sur un cadre élastique 652

CHAPITRE XXIV. — *Massif indéfini, sollicité dans une région limitée* 657

Équilibre d'élasticité d'un solide indéfini sollicité dans une certaine région par des forces extérieures données 657